スタートアップゼミ発表資料
【ネットワーク交通量配分】

03-250032　学部4年

冨矢 航大

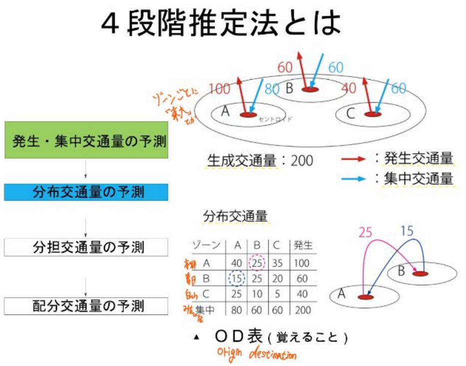
⓪発表の流れ

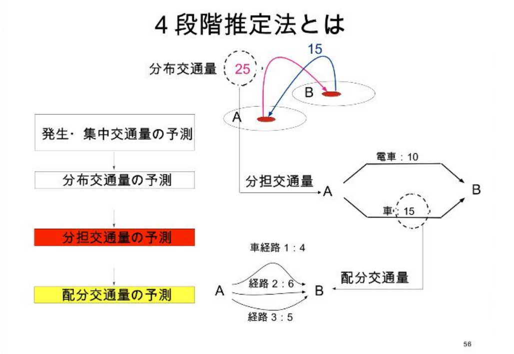
（テキストとの対応）

①「交通量配分」の位置づけ	序章　15～16頁
②交通量配分モデルの分類	序章　17～18頁
③交通ネットワークの記述法	2.1.1～2.1.3　19～22頁
④All-or-Nothing配分	2.1.4／2.2.1　22～26頁
⑤確率的配分	2.2.2～2.2.4　26～32頁
⑥利用者均衡配分	2.3　32～42頁
⑦確率的利用者均衡配分	2.4　42～47頁
⑧システム最適配分	2.5.1　47～49頁
⑨混雑課金	2.5.2～2.5.4　49～54頁

①「交通量配分」の位置づけ

4段階推定法の第４段階





2025.06.10「交通学」講義資料より

【～第3段階】
出発地 (Origin) から目的地 (Destination)までの交通手段ごとの利用者数を推定

【第４段階】
（その交通手段のなかで）経路ごとに交通を配分

②交通量配分モデルの分類

※フロー非依存型：旅行時間は（交通量に関係なく）一定
※フロー依存型　：交通量が増えると旅行時間は増加

	フロー非依存型 （非混雑型）	フロー依存型 （混雑型）
確定的選択	All-or-Nothing 配分（④）	利用者均衡配分（⑥）
確率的選択	確率的配分（⑤）	確率的利用者均衡配分（⑦）

※数字はスライド中の番号

※確定的選択：必ず起こる。
※確率的選択：ランダム（統計的に処理する）

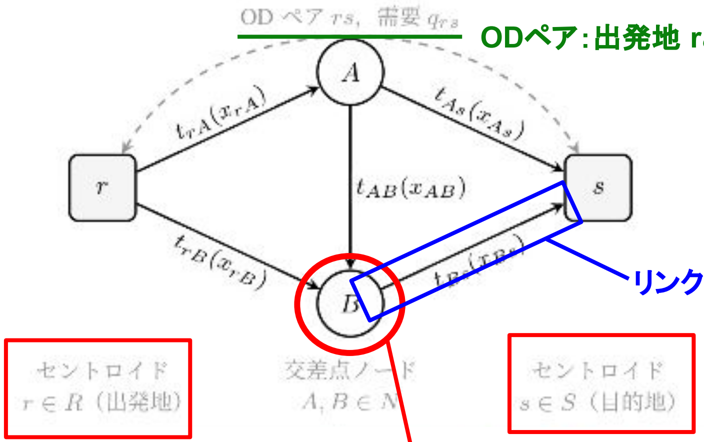
③交通ネットワークの記述法

ODペア rs を結ぶリンク列の集合

経路一覧 K_{rs}

経路 $k=1$: $r \to A \to s \in K_{rs}$
経路 $k=2$: $r \to B \to s \in K_{rs}$
経路 $k=3$: $r \to A \to B \to s \in K_{rs}$

ODペア：出発地 rと目的地 sの組み合わせ



リンク：道路を表す有向線分

ノード：節点（交差点など）

テキスト19頁より

表 2.1　交通量配分の主要記号

記号	意味	単位（例）
x_a	リンク a の交通量	台/時
$t_a(x_a)$	リンク a の旅行時間（リンクパフォーマンス関数）	分
t_{a0}	リンク a の自由流旅行時間（$x_a = 0$ のとき）	分
C_a	リンク a の交通容量（キャパシティ）	台/時
f_k^{rs}	OD ペア rs の経路 k の交通量	台/時
q_{rs}	OD ペア rs の OD 交通量（需要）	台/時
c_k^{rs}	OD ペア rs の経路 k の旅行時間	分
u_{rs}	OD ペア rs の均衡最小旅行時間	分
$\delta_{a,k}^{rs}$	リンク a が経路 k^{rs} に含まれるなら 1，含まれないなら 0	—

テキスト20頁より

・流量保存条件

$$x_a = \sum_{rs \in \Omega} \underbrace{\sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs}}_{q_{rs}} \times \delta_{a.k}^{rs}$$

rs間の
q_{rs}：全需要

$(f_k^{rs} \geqq 0$ ：非負性$)$

リンクaの交通量

すべての出発地・目的地で足す

rsのすべての経路で足す

経路kの交通量

1 or 0
リンクaが経路kに含まれるか

「通らないリンクは考えない」ではなく
「×0をしてすべてのリンクについて考える」

・経路旅行時間

$$C_k^{rs} = \sum_{a \in A} t_a(x_a)\, \delta_{a.k}^{rs}$$

経路k^{rs}の旅行時間

すべてのリンク

リンクaの旅行時間

③交通ネットワークの記述法

・リンクパフォーマンス関数（ BPR関数）

$$t_a(x_a) = \underline{t_{a0}} \left\{ 1 + \alpha \left(\frac{x_a}{\underline{C_a}} \right)^\beta \right\}$$

自由旅行時間
（$x_a = 0$のとき の時間）

交通容量

α=0.15 β=4 など

単調増加、下に凸のグラフになる。

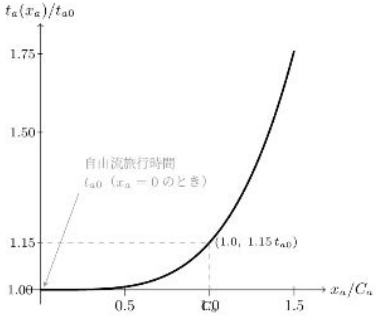


図 2.4　BPR 関数のグラフ（$\alpha = 0.15, \beta = 4$）．横軸は交通量 x_a を容量 C_a で正規化した値，縦軸は旅行時間 $t_a(x_a)$ を自由流旅行時間 t_{a0} で正規化した値．$x_a = C_a$（容量到達点）での旅行時間は 1.15 t_{a0} となる（破線）．

表 2.1　交通量配分の主要記号

記号	意味	単位（例）
x_a	リンク a の交通量	台/時
$t_a(x_a)$	リンク a の旅行時間（リンクパフォーマンス関数）	分
t_{a0}	リンク a の自由流旅行時間（$x_a = 0$ のとき）	分
C_a	リンク a の交通容量（キャパシティ）	台/時
f_k^{rs}	OD ペア rs の経路 k の交通量	台/時
q_{rs}	OD ペア rs の OD 交通量（需要）	台/時
c_k^{rs}	OD ペア rs の経路 k の旅行時間	分
u_{rs}	OD ペア rs の均衡最小旅行時間	分
$\delta_{a,k}^{rs}$	リンク a が経路 k^{rs} に含まれるなら 1，含まれないなら 0	—

テキスト20頁より

④All-or-Nothing配分

※フロー非依存型：旅行時間は（交通量に関係なく）一定
※フロー依存型　：交通量が増えると旅行時間は増加

	フロー非依存型（非混雑型）	フロー依存型（混雑型）
確定的選択	**All-or-Nothing 配分（④）**	利用者均衡配分（⑥）
確率的選択	確率的配分（⑤）	確率的利用者均衡配分（⑦）

※数字はスライド中の番号

※確定的選択：必ず起こる。
※確率的選択：ランダム（統計的に処理する）

④All-or-Nothing配分

【特徴】
・旅行時間は定数（交通量に依らない）
・すべての利用者が最短経路のみを選択

→全交通量が1本に集中（all）
　ほかの経路は全く流れない（ Nothing）

・経路旅行時間

Xaの関数とはならない！

$$\underbrace{C_k^{rs}}_{\text{経路}k^{rs}\text{の旅行時間}} = \underbrace{\sum_{a\in A}}_{\text{すべてのリンク}} \underbrace{t_a \cancel{(x_a)}}_{\text{リンク}a\text{の旅行時間}} \delta_{a,k}^{rs}$$

表 2.1　交通量配分の主要記号

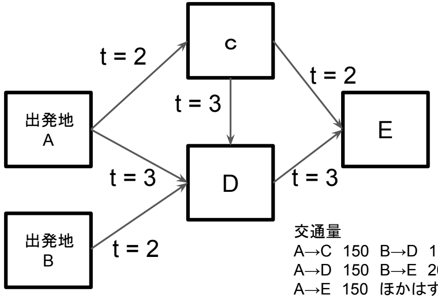
記号	意味	単位（例）
x_a	リンク a の交通量	台/時
$t_a(x_a)$	リンク a の旅行時間（リンクパフォーマンス関数）	分
t_{a0}	リンク a の自由流旅行時間（$x_a = 0$ のとき）	分
C_a	リンク a の交通容量（キャパシティ）	台/時
f_k^{rs}	OD ペア rs の経路 k の交通量	台/時
q_{rs}	OD ペア rs の OD 交通量（需要）	台/時
c_k^{rs}	OD ペア rs の経路 k の旅行時間	分
u_{rs}	OD ペア rs の均衡最小旅行時間	分
$\delta_{a,k}^{rs}$	リンク a が経路 k^{rs} に含まれるなら 1，含まれないなら 0	—

表 2.2　非混雑型配分の主要記号

記号	意味	単位（例）
$c(i)$	ノード i への最短経路費用（起点からの最小旅行時間）	分
F_j	先行ポインタ（最短経路ツリー上のノード j の直前ノード）	—
y_{ij}	AoN 集計補助フロー（起点からリンク (i,j) に集計される交通量）	台/時
P_{ij}	ノード i からノード j への遷移確率（マルコフ配分）	—
$\mathbf{N}$	基本行列 $(I-Q)^{-1}$（一時的状態間の平均通過回数を表す行列）	—
v_j^*	目的地までの最短残余費用（目的地考慮型ロジットで事前計算）	分
θ	ロジットの感度パラメータ（$\theta \to \infty$ で AoN 配分に収束）	分 $^{-1}$
P_k^{rs}	OD ペア rs の利用者が経路 k を選択するロジット確率	—
$L[i \to j]$	Dial のアルゴリズムにおけるリンク尤度	—
$W[i \to j]$	Dial のアルゴリズムにおけるリンクウェイト	—

④All-or-Nothing配分

【アルゴリズム】



交通量
A→C　150　B→D　100
A→D　150　B→E　200
A→E　150　ほかはすべて0

【step1】はじめは全リンクで交通量0

【step2】まず、起点Aについて考える。

ノードj	最短経路費用c(j)	先行ポインタFj
A	0	なし
B	(なし)	なし
C	2	A
D	3	A
E	4	E

【step3】

遠いほうから
考えていくの
がポイント

A→E交通量

Eを通ってEよりも先に行く交通量

先行ポインタはC

$$y_{CE} = q_{AE} + \sum_{m\in O_j^{(0)}} y_{Em}$$
$$= 100 + 0 = \boxed{100}$$

$$y_{AD} = q_{AD} + \sum_{m\in O_j^{(0)}} y_{Dm}$$
$$= 200 + 0 = 200$$

$$y_{AC} = q_{AC} + \sum_{m\in O_j^{(0)}} y_{Cm}$$
$$= 150 + \boxed{100} = 250$$

リンク交通量の更新

$$x_{AC}^{(1)} = x_{AC}^{(0)} + y_{AC} = 0 + 250 = 250$$
$$x_{AD}^{(1)} = x_{AD}^{(0)} + y_{AD} = 0 + 200 = 200$$
$$x_{CE}^{(1)} = x_{CE}^{(0)} + y_{CE} = 0 + 100 = 100$$

【step4】続いて起点Bについて考える。
　→起点Bでstep2･3を行う
　（計算略）

これですべての起点について考えたので、計算終了。

表 2.1　交通量配分の主要記号

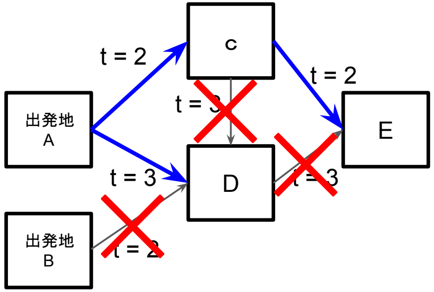
記号	意味	単位（例）
x_a	リンク a の交通量	台/時
$t_a(x_a)$	リンク a の旅行時間（リンクパフォーマンス関数）	分
t_{a0}	リンク a の自由流旅行時間（$x_a = 0$ のとき）	分
C_a	リンク a の交通容量（キャパシティ）	台/時
f_k^{rs}	OD ペア rs の経路 k の交通量	台/時
q_{rs}	OD ペア rs の OD 交通量（需要）	台/時
c_k^{rs}	OD ペア rs の経路 k の旅行時間	分
u_{rs}	OD ペア rs の均衡最小旅行時間	分
$\delta_{a,k}^{rs}$	リンク a が経路 k^{rs} に含まれるなら 1，含まれないなら 0	—

表 2.2　非混雑型配分の主要記号

記号	意味	単位（例）
$c(i)$	ノード i への最短経路費用（起点からの最小旅行時間）	分
F_j	先行ポインタ（最短経路ツリー上のノード j の直前ノード）	—
y_{ij}	AoN 集計補助フロー（起点からリンク (i,j) に集計される交通量）	台/時
P_{ij}	ノード i からノード j への遷移確率（マルコフ配分）	—
$\mathbf{N}$	基本行列 $(I-Q)^{-1}$（一時的状態間の平均通過回数を表す行列）	—
v_j^*	目的地までの最短残余費用（目的地考慮型ロジットで事前計算）	分
θ	ロジットの感度パラメータ（$\theta \to \infty$ で AoN 配分に収束）	分 $^{-1}$
P_k^{rs}	OD ペア rs の利用者が経路 k を選択するロジット確率	—
$L[i \to j]$	Dial のアルゴリズムにおけるリンク尤度	—
$W[i \to j]$	Dial のアルゴリズムにおけるリンクウェイト	—

★最短経路がツリー構造だからできる計算

（図）Aが出発地の場合



⑤確率的配分

※フロー非依存型：旅行時間は（交通量に関係なく）一定
※フロー依存型　：交通量が増えると旅行時間は増加

	フロー非依存型（非混雑型）	フロー依存型（混雑型）
確定的選択	All-or-Nothing 配分（④）	利用者均衡配分（⑥）
確率的選択	**確率的配分（⑤）**	確率的利用者均衡配分（⑦）

※数字はスライド中の番号

※確定的選択：必ず起こる。
※確率的選択：ランダム（統計的に処理する）

⑤確率的配分

⑤-1　吸収マルコフ過程配分
⑤-2　ロジット配分
⑤-3　Dialのアルゴリズム

の3種類を順に紹介する。

⑤-1 吸収マルコフ過程配分

表 2.1 交通量配分の主要記号

記号	意味	単位（例）
x_a	リンク a の交通量	台/時
$t_a(x_a)$	リンク a の旅行時間（リンクパフォーマンス関数）	分
t_{a0}	リンク a の自由流旅行時間（$x_a = 0$ のとき）	分
C_a	リンク a の交通容量（キャパシティ）	台/時
f_k^{rs}	OD ペア rs の経路 k の交通量	台/時
q_{rs}	OD ペア rs の OD 交通量（需要）	台/時
c_k^{rs}	OD ペア rs の経路 k の旅行時間	分
u_{rs}	OD ペア rs の均衡最小旅行時間	分
$\delta_{a,k}^{rs}$	リンク a が経路 k^{rs} に含まれるなら 1，含まれないなら 0	—

表 2.2 非混雑型配分の主要記号

記号	意味	単位（例）
$c(i)$	ノード i への最短経路費用（起点からの最小旅行時間）	分
F_j	先行ポインタ（最短経路ツリー上のノード j の直前ノード）	—
y_{ij}	AoN 集計補助フロー（起点からリンク (i,j) に集計される交通量）	台/時
P_{ij}	ノード i からノード j への遷移確率（マルコフ配分）	—
$\mathbf{N}$	基本行列 $(I-Q)^{-1}$（一時的状態間の平均通過回数を表す行列）	—
v_j^*	目的地までの最短残余費用（目的地考慮型ロジットで事前計算）	分
θ	ロジットの感度パラメータ（$\theta \to \infty$ で AoN 配分に収束）	分 $^{-1}$
P_k^{rs}	OD ペア rs の利用者が経路 k を選択するロジット確率	—
$L[i \to j]$	Dial のアルゴリズムにおけるリンク尤度	—
$W[i \to j]$	Dial のアルゴリズムにおけるリンクウェイト	—

【特徴】
All-or-Nothingでは、最短経路に100%流れていたが、
例えば最短経路に90%、やや遠回りな経路に10%流れるような可能性を考慮

ノードiにいる人が、隣接したノード jに行く確率を次のように定義

$$P_{ij}^{\mathrm{local}} = \frac{\exp(-\theta \underline{t_{ij}})}{\sum_{k \in \mathcal{A}(i)} \exp(-\theta t_{ik})}$$

t_{ij} : i→j の旅行時間

近いノードほど行く確率が高い（合理的）
が、近いノードばかりをぐるぐるまわる可能性大

そこで、ノードjから目的地までの残余費用　を加えた以下の式を用いる。

$$P_{ij} = \frac{\exp\left(-\theta(\underline{t_{ij} + v_j^*})\right)}{\sum_{k \in \mathcal{A}(i)} \exp\left(-\theta(t_{ik} + v_k^*)\right)}$$

近い・かつ目的地に近づけるノードに行く確率が高い！
（もっと合理的）

※θ→∞で Pij→1 / All-or-Nothingに収束

Pを行列表記

$$P = \begin{array}{c} \text{よこ：移動後} \\ \begin{pmatrix} Q & R \\ O & I \end{pmatrix} \end{array}$$

たて：移動前

Q：途中どうし
R：途中 → 目的地
O I：目的地からは動かない

$$\mathbf{N} = \underbrace{I}_{\text{最初}} + \underbrace{Q}_{\text{1回移動}} + \underbrace{Q^2}_{\text{2回}} + \underbrace{\cdots}_{\cdots} = (I-Q)^{-1}$$

成分 N_{ij} が、起点 i を出発した人が
j を平均で何回通過するか

$$\underbrace{x_a^{rs}}_{\text{r→s の移動でリンクaを通る交通量}} = \underbrace{q_{rs}}_{\text{r→s の OD交通量}} \cdot \underbrace{N_{ri}}_{\text{rを出発した人が何回 i にくるか}} \cdot \underbrace{P_{ij}}_{\text{iに来た人が i→j のリンクを通る確率}}$$

（リンクa : i→j）

$$x_a = \sum_{rs \in \Omega} x_a^{rs}$$

すべての出発・目的地について足す

⑤-2　ロジット配分

【特徴】
利用者の旅行時間の認知の誤差を、ランダムモデルで再現
（⑤-1 吸収マルコフ過程配分との違いは、
選択の対象が次に進むリンクか、経路全体か）

利用者の知覚経路費用

$$\tilde{C}_k^{rs} = \underbrace{C_k^{rs}}_{\text{実際の経路費用}} + \underbrace{\varepsilon_k}_{\text{誤差項}\ (\sim \mathrm{Gumbel}(0,\theta^{-1}))}$$

各経路の選択確率

ガンベル分布のパラメータ

$$P_k^{rs} = \frac{\exp(-\theta c_k^{rs})}{\sum_{k' \in K_{rs}} \exp(-\theta c_{k'}^{rs})}$$

$$\underbrace{E[f_k^{rs}]}_{f_k^{rs}\text{の期待値}} = \underbrace{q_{rs}}_{rs\text{間の交通量}} \times \underbrace{P_k^{rs}}_{\text{選択確率}}$$

※θ→∞で All-or-Nothingに収束（吸収マルコフと同じ）
θ→0で 均等配分（経路費用によらず等確率で配分）

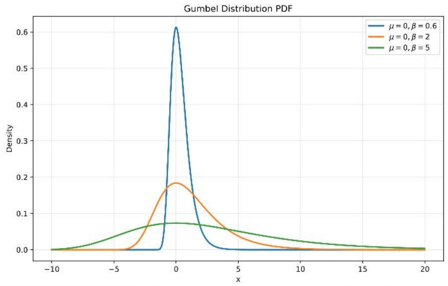
表 2.1　交通量配分の主要記号

記号	意味	単位（例）
x_a	リンク a の交通量	台/時
$t_a(x_a)$	リンク a の旅行時間（リンクパフォーマンス関数）	分
t_{a0}	リンク a の自由流旅行時間（$x_a = 0$ のとき）	分
C_a	リンク a の交通容量（キャパシティ）	台/時
f_k^{rs}	OD ペア rs の経路 k の交通量	台/時
q_{rs}	OD ペア rs の OD 交通量（需要）	台/時
c_k^{rs}	OD ペア rs の経路 k の旅行時間	分
u_{rs}	OD ペア rs の均衡最小旅行時間	分
$\delta_{a,k}^{rs}$	リンク a が経路 k^{rs} に含まれるなら 1，含まれないなら 0	—

表 2.2　非混雑型配分の主要記号

記号	意味	単位（例）
$c(i)$	ノード i への最短経路費用（起点からの最小旅行時間）	分
F_j	先行ポインタ（最短経路ツリー上のノード j の直前ノード）	—
y_{ij}	AoN 集計補助フロー（起点からリンク (i,j) に集計される交通量）	台/時
P_{ij}	ノード i からノード j への遷移確率（マルコフ配分）	—
$\mathbf{N}$	基本行列 $(I-Q)^{-1}$（一時的状態間の平均通過回数を表す行列）	—
v_j^*	目的地までの最短残余費用（目的地考慮型ロジットで事前計算）	分
θ	ロジットの感度パラメータ（$\theta \to \infty$ で AoN 配分に収束）	分 $^{-1}$
P_k^{rs}	OD ペア rs の利用者が経路 k を選択するロジット確率	—
$L[i \to j]$	Dial のアルゴリズムにおけるリンク尤度	—
$W[i \to j]$	Dial のアルゴリズムにおけるリンクウェイト	—

ガンベル分布



https://wayama.io/rec/stats/01/

今回は誤差項なので μ=0、
βの値を変えると誤差の散らばり具合
が変わる。

⑤-3 Dialのアルゴリズム

【特徴】
⑤-2 ロジット配分の確率を、経路列挙なしに計算できる

「リンク尤度」Lを定める。（1に近いほど最短に近く、選ばれやすい経路）

$$L[i \to j] = \begin{cases} \exp[\theta\{\underbrace{c(j)-c(i)}_{i\text{に}j\text{の最短経路費用の差}} - \underbrace{t_{ij}}_{\text{リンク間の費用}}\}] & (c(i) < c(j)\ \text{のとき}) \\ 0 & (c(i) \geq c(j)\ \text{のとき}) \end{cases}$$

最短経路で 0 → L=1
遠回りだと 負 → 0<L<1

逆走

Lを用いて「リンクウェイト」Wを計算する。 Wが大きいほど選択されやすい

$$\underbrace{W[i \to j]}_{j\text{に着くまでのリンク尤度の和}} = \underbrace{L[i \to j]}_{i\to j\text{のリンク尤度}} \times \underbrace{\sum_{m \in I_i} W[m \to i]}_{i\text{に着くまでのリンク尤度の和}}$$

（ただし、$W[r \to j] = L[r \to j]$ とする）

←漸化式なので、<u>起点から近い順に</u>計算する

リンクの交通量を計算する。

$$y_{ij} = \Big(\underbrace{q_{rj}}_{j\text{が目的地}} + \underbrace{\sum_{m \in O_j} y_{jm}}_{j\text{を経由する}}\Big) \frac{W[i \to j]}{\sum_{m \in I_i} W[m \to j]}$$

j が目的地 + j を経由する
॥
j を通る交通量

$$\frac{(i \to j\text{のリンクウェイト})}{(j\text{に至るすべてのリンクウェイト})}$$

→この計算をすべてのrでやる。

表 2.1　交通量配分の主要記号

記号	意味	単位（例）
x_a	リンク a の交通量	台/時
$t_a(x_a)$	リンク a の旅行時間（リンクパフォーマンス関数）	分
t_{a0}	リンク a の自由流旅行時間（$x_a = 0$ のとき）	分
C_a	リンク a の交通容量（キャパシティ）	台/時
f_k^{rs}	OD ペア rs の経路 k の交通量	台/時
q_{rs}	OD ペア rs の OD 交通量（需要）	台/時
c_k^{rs}	OD ペア rs の経路 k の旅行時間	分
u_{rs}	OD ペア rs の均衡最小旅行時間	分
$\delta_{a,k}^{rs}$	リンク a が経路 k^{rs} に含まれるなら 1，含まれないなら 0	—

表 2.2　非混雑型配分の主要記号

記号	意味	単位（例）
$c(i)$	ノード i への最短経路費用（起点からの最小旅行時間）	分
F_j	先行ポインタ（最短経路ツリー上のノード j の直前ノード）	—
y_{ij}	AoN 集計補助フロー（起点からリンク (i,j) に集計される交通量）	台/時
P_{ij}	ノード i からノード j への遷移確率（マルコフ配分）	—
$\mathbf{N}$	基本行列 $(I-Q)^{-1}$（一時的状態間の平均通過回数を表す行列）	—
v_j^*	目的地までの最短残余費用（目的地考慮型ロジットで事前計算）	分
θ	ロジットの感度パラメータ（$\theta \to \infty$ で AoN 配分に収束）	分 $^{-1}$
P_k^{rs}	OD ペア rs の利用者が経路 k を選択するロジット確率	—
$L[i \to j]$	Dial のアルゴリズムにおけるリンク尤度	—
$W[i \to j]$	Dial のアルゴリズムにおけるリンクウェイト	—

⑥利用者均衡配分

※フロー非依存型：旅行時間は（交通量に関係なく）一定
※フロー依存型　：交通量が増えると旅行時間は増加

	フロー非依存型（非混雑型）	フロー依存型（混雑型）
確定的選択	All-or-Nothing 配分（④）	**利用者均衡配分（⑥）**
確率的選択	確率的配分（⑤）	確率的利用者均衡配分（⑦）

※数字はスライド中の番号

※確定的選択：必ず起こる。
※確率的選択：ランダム（統計的に処理する）

⑥利用者均衡配分

【特徴】
・旅行時間最小化：すべての利用者は、自己の旅行時間が最小となるような経路を選択
・完全情報を仮定（全経路の旅行時間を知っている）
→ルートを変更してもそれ以上早くならない、という均衡状態に落ち着く

【Wardropの第１原則】

$$f_k^{rs} > 0 \Rightarrow c_k^{rs} = u_{rs}$$ 車の走ってる経路：（どこでも）均衡最小旅行時間と一致

$$f_k^{rs} = 0 \Rightarrow c_k^{rs} \geqq u_{rs}$$ それより時間のかかるルートは誰も走らない

式変形すると

$$f_k^{rs} \geqq 0,\ c_k^{rs} - u_r \geqq 0,\quad f_k^{rs}(c_k^{rs} - u_{rs}) = 0 \quad \forall k \in K_{rs},\ \forall rs \in \Omega$$

ラグランジュの未定乗数法を用いると、以下を計算すればいいとわかる

$$\min_f Z(f) = \sum_{a \in A} \int_0^{x_a(f)} t_a(w)\,dw$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs} = q_{rs} \quad \forall rs \in \Omega$$

$$f_k^{rs} \geqq 0 \qquad \forall k \in K_{rs},\ \forall rs \in \Omega$$

表 2.1　交通量配分の主要記号

記号	意味	単位（例）
x_a	リンク a の交通量	台/時
$t_a(x_a)$	リンク a の旅行時間（リンクパフォーマンス関数）	分
t_{a0}	リンク a の自由流旅行時間（$x_a = 0$ のとき）	分
C_a	リンク a の交通容量（キャパシティ）	台/時
f_k^{rs}	OD ペア rs の経路 k の交通量	台/時
q_{rs}	OD ペア rs の OD 交通量（需要）	台/時
c_k^{rs}	OD ペア rs の経路 k の旅行時間	分
u_{rs}	OD ペア rs の均衡最小旅行時間	分
$\delta_{a,k}^{rs}$	リンク a が経路 k^{rs} に含まれるなら 1，含まれないなら 0	—

表 2.2　非混雑型配分の主要記号

記号	意味	単位（例）
$c(i)$	ノード i への最短経路費用（起点からの最小旅行時間）	分
F_j	先行ポインタ（最短経路ツリー上のノード j の直前ノード）	—
y_{ij}	AoN 集計補助フロー（起点からリンク (i,j) に集計される交通量）	台/時
P_{ij}	ノード i からノード j への遷移確率（マルコフ配分）	—
$\mathbf{N}$	基本行列 $(I - Q)^{-1}$（一時的状態間の平均通過回数を表す行列）	—
v_j^*	目的地までの最短残余費用（目的地考慮型ロジットで事前計算）	分
θ	ロジットの感度パラメータ（$\theta \to \infty$ で AoN 配分に収束）	分 $^{-1}$
P_k^{rs}	OD ペア rs の利用者が経路 k を選択するロジット確率	—
$L[i \to j]$	Dial のアルゴリズムにおけるリンク尤度	—
$W[i \to j]$	Dial のアルゴリズムにおけるリンクウェイト	—

⑥利用者均衡配分

$$\min_{f} Z(f) = \sum_{a \in A} \int_0^{x_a(f)} t_a(w)\,dw$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs} = q_{rs} \quad \forall rs \in \Omega$$

$$f_k^{rs} \geqq 0 \qquad \forall k \in K_{rs},\ \forall rs \in \Omega$$

この最小値を求める方法は複数ある。
最も使いやすいのがFrank-Wolfe法（この計算方法の詳細は発表では省略）

表 2.4 UE を解く Frank-Wolfe 法のアルゴリズム

Step	内容
1	**初期化**：すべてのリンク交通量を $x_a^{(0)} = 0$ とし，自由流旅行時間 $t_a(0) = t_{a0}$ に基づいて All-or-Nothing 配分を実行し，初期解 $\boldsymbol{x}^{(1)}$ を得る．$n \leftarrow 1$．
2	**旅行時間の更新**：現在の解 $\boldsymbol{x}^{(n)}$ の各リンクで旅行時間 $t_a\left(x_a^{(n)}\right)$ を計算する．
3	**補助解の計算**（Frank-Wolfe ステップ）： 更新された旅行時間のもとで All-or-Nothing 配分を実行し，補助解 $\boldsymbol{y}^{(n)}$ を得る（式 ([illegible]) の線形計画の解）．
4	**ステップサイズ探索**（線探索）： $\alpha^* = \arg\min_{0 \leq \alpha \leq 1} Z\left(\boldsymbol{x}^{(n)} + \alpha\left(\boldsymbol{y}^{(n)} - \boldsymbol{x}^{(n)}\right)\right)$ 黄金分割法などの 1 次元最小化を用いる（第 [illegible] 節参照）．
5	**解の更新**：$\boldsymbol{x}^{(n+1)} = (1 - \alpha^*)\boldsymbol{x}^{(n)} + \alpha^* \boldsymbol{y}^{(n)}$．
6	**収束判定**：相対ギャップ（式 ([illegible])）が閾値 ε 以下なら終了．そうでなければ $n \leftarrow n+1$ として Step 2 へ．

テキスト37頁より

表 2.1 交通量配分の主要記号

記号	意味	単位（例）
x_a	リンク a の交通量	台/時
$t_a(x_a)$	リンク a の旅行時間（リンクパフォーマンス関数）	分
t_{a0}	リンク a の自由流旅行時間（$x_a = 0$ のとき）	分
C_a	リンク a の交通容量（キャパシティ）	台/時
f_k^{rs}	OD ペア rs の経路 k の交通量	台/時
q_{rs}	OD ペア rs の OD 交通量（需要）	台/時
c_k^{rs}	OD ペア rs の経路 k の旅行時間	分
u_{rs}	OD ペア rs の均衡最小旅行時間	分
$\delta_{a,k}^{rs}$	リンク a が経路 k^{rs} に含まれるなら 1，含まれないなら 0	—

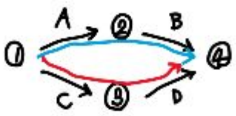
表 2.2 非混雑型配分の主要記号

記号	意味	単位（例）
$c(i)$	ノード i への最短経路費用（起点からの最小旅行時間）	分
F_j	先行ポインタ（最短経路ツリー上のノード j の直前ノード）	—
y_{ij}	AoN 集計補助フロー（起点からリンク (i, j) に集計される交通量）	台/時
P_{ij}	ノード i からノード j への遷移確率（マルコフ配分）	—
$\mathbf{N}$	基本行列 $(I - Q)^{-1}$（一時的状態間の平均通過回数を表す行列）	—
v_j^*	目的地までの最短残余費用（目的地考慮型ロジットで事前計算）	分
θ	ロジットの感度パラメータ（$\theta \to \infty$ で AoN 配分に収束）	分 $^{-1}$
P_k^{rs}	OD ペア rs の利用者が経路 k を選択するロジット確率	—
$L[i \to j]$	Dial のアルゴリズムにおけるリンク尤度	—
$W[i \to j]$	Dial のアルゴリズムにおけるリンクウェイト	—

⑥利用者均衡配分

【Braessのパラドックス】
新たな道路(リンク)を建設したことでかえって混雑が悪化する現象

例)参考:2023/10/25 社会システム工学基礎② 井料先生の講義資料

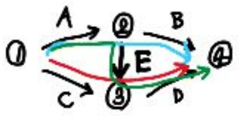


OD交通量
: 1→4で6(千台)

$t_A(x_A) = 10 + 10x_A$　$t_B(x_B) = 60 + x_B$

$t_C(x_C) = 60 + x_C$　$t_D(x_D) = 10 + 10x_D$

3(千台)
3(千台)
旅行時間103分



OD交通量
: 1→4で6000台

$t_A(x_A) = 10 + 10x_A$　$t_B(x_B) = 60 + x_B$

$t_C(x_C) = 60 + x_C$　$t_D(x_D) = 10 + 10x_D$

$t_E(x_E) = 10 + x_E$

2(千台)
2(千台)
2(千台)
旅行時間112分

表 2.1　交通量配分の主要記号

記号	意味	単位(例)
x_a	リンク a の交通量	台/時
$t_a(x_a)$	リンク a の旅行時間(リンクパフォーマンス関数)	分
t_{a0}	リンク a の自由流旅行時間($x_a = 0$ のとき)	分
C_a	リンク a の交通容量(キャパシティ)	台/時
f_k^{rs}	OD ペア rs の経路 k の交通量	台/時
q_{rs}	OD ペア rs の OD 交通量(需要)	台/時
c_k^{rs}	OD ペア rs の経路 k の旅行時間	分
u_{rs}	OD ペア rs の均衡最小旅行時間	分
$\delta_{a,k}^{rs}$	リンク a が経路 k^{rs} に含まれるなら 1, 含まれないなら 0	—

表 2.2　非混雑型配分の主要記号

記号	意味	単位(例)
$c(i)$	ノード i への最短経路費用(起点からの最小旅行時間)	分
F_j	先行ポインタ(最短経路ツリー上のノード j の直前ノード)	—
y_{ij}	AoN 集計補助フロー(起点からリンク (i,j) に集計される交通量)	台/時
P_{ij}	ノード i からノード j への遷移確率(マルコフ配分)	—
$\mathbf{N}$	基本行列 $(I - Q)^{-1}$(一時的状態間の平均通過回数を表す行列)	—
v_j^*	目的地までの最短残余費用(目的地考慮型ロジットで事前計算)	分
θ	ロジットの感度パラメータ($\theta \to \infty$ で AoN 配分に収束)	分 $^{-1}$
P_k^{rs}	OD ペア rs の利用者が経路 k を選択するロジット確率	—
$L[i \to j]$	Dial のアルゴリズムにおけるリンク尤度	—
$W[i \to j]$	Dial のアルゴリズムにおけるリンクウェイト	—

⑦確率的利用者均衡配分

※フロー非依存型：旅行時間は（交通量に関係なく）一定
※フロー依存型　：交通量が増えると旅行時間は増加

	フロー非依存型（非混雑型）	フロー依存型（混雑型）
確定的選択	All-or-Nothing 配分（④）	利用者均衡配分（⑥）
確率的選択	確率的配分（⑤）	**確率的利用者均衡配分（⑦）**

※数字はスライド中の番号

※確定的選択：必ず起こる。
※確率的選択：ランダム（統計的に処理する）

⑦確率的利用者均衡配分

表 2.1　交通量配分の主要記号

記号	意味	単位（例）
x_a	リンク a の交通量	台/時
$t_a(x_a)$	リンク a の旅行時間（リンクパフォーマンス関数）	分
t_{a0}	リンク a の自由流旅行時間（$x_a = 0$ のとき）	分
C_a	リンク a の交通容量（キャパシティ）	台/時
f_k^{rs}	OD ペア rs の経路 k の交通量	台/時
q_{rs}	OD ペア rs の OD 交通量（需要）	台/時
c_k^{rs}	OD ペア rs の経路 k の旅行時間	分
u_{rs}	OD ペア rs の均衡最小旅行時間	分
$\delta_{a,k}^{rs}$	リンク a が経路 k^{rs} に含まれるなら 1，含まれないなら 0	—

表 2.2　非混雑型配分の主要記号

記号	意味	単位（例）
$c(i)$	ノード i への最短経路費用（起点からの最小旅行時間）	分
F_j	先行ポインタ（最短経路ツリー上のノード j の直前ノード）	—
y_{ij}	AoN 集計補助フロー（起点からリンク (i,j) に集計される交通量）	台/時
P_{ij}	ノード i からノード j への遷移確率（マルコフ配分）	—
$\mathbf{N}$	基本行列 $(I-Q)^{-1}$（一時的状態間の平均通過回数を表す行列）	—
v_j^*	目的地までの最短残余費用（目的地考慮型ロジットで事前計算）	分
θ	ロジットの感度パラメータ（$\theta \to \infty$ で AoN 配分に収束）	分 $^{-1}$
P_k^{rs}	OD ペア rs の利用者が経路 k を選択するロジット確率	—
$L[i \to j]$	Dial のアルゴリズムにおけるリンク尤度	—
$W[i \to j]$	Dial のアルゴリズムにおけるリンクウェイト	—

【特徴】

・⑥利用者均衡配分で考えなかった、
　利用者ごとの旅行時間の認知の差を計算に考慮

誤差の考え方は、⑤-2 ロジット配分と同じ

$$\underbrace{U_k^n}_{\text{「効用」として考える}} = \ominus \underbrace{C_k}_{\text{旅行時間}} + \underbrace{\varepsilon_k^n}_{\text{知覚誤差}\ (\sim \mathrm{Gumbel}(0,\frac{1}{\theta}))}$$

$$P(k|rs) = \frac{\exp(-\theta c_k^{rs})}{\sum_{k' \in K_{rs}} \exp(-\theta c_{k'}^{rs})}$$

↑「ロジットモデル」という

ロジット配分（13頁）の再掲

$$\tilde{c}_k^{rs} = \underbrace{c_k^{rs}}_{\text{実際の経路費用}} + \underbrace{\varepsilon_k}_{\text{誤差項}\ (\sim \mathrm{Gumbel}(0,\theta^{-1}))}$$

ガンベル分布のパラメーター

$$P_k^{rs} = \frac{\exp(-\theta c_k^{rs})}{\sum_{k' \in K_{rs}} \exp(-\theta c_{k'}^{rs})}$$

知覚誤差が正規分布に従うとした「プロビットモデル」も使われる。

$$\min_{f \in F} Z(f) = \underbrace{\sum_{a \in A} \int_0^{x_a} t_a(w)\,dw}_{\text{ここまでは利用者均衡配分とおなじ}} + \underbrace{\frac{1}{\theta} \sum_{rs \in \Omega} \sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs} \ln f_k^{rs}}_{\text{追加}}$$

ラグランジュの未定乗数法で、左の関数 Zを最小化すればよいと分かる。
計算方法は何通りかあり、
逐次平均法／部分線形化法／ Simplicial Decomposition法 などで求める。

⑧システム最適配分

ネットワーク全体の<u>総旅行時間を最小化</u>

【Wardropの第2原則】
ネットワーク全体の総旅行時間が最小となる交通量の配分

$$\min_{x,f} Z_{SO}(x) = \sum_{a\in A} \underbrace{x_a}_{交通量} \times \underbrace{t(x_a)}_{時間}$$

すべての道路について足す

$$\text{s.t.}\quad x_a = \sum_{rs\in\Omega} \sum_{k\in K_{rs}} f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs} \quad \forall a\in A$$

$$\sum_{k\in K_{rs}} f^{rs} = q_{rs} \quad \forall rs\in\Omega$$

$$f_k^{rs} \geqq 0 \quad \forall k\in K_{rs},\ \forall rs\in\Omega$$

⑥利用者均衡配分と同じようにFranl-Wolfe法で解ける

表 2.11 SO を解く Frank-Wolfe 法のアルゴリズム

Step	内容
1	**初期化**：すべてのリンク交通量を $x_a^{(0)} = 0$ とし，自由流社会的限界費用 $\mathrm{SMC}_a(0) = t_{a0}$ に基づいて All-or-Nothing 配分を実行し，初期解 $\boldsymbol{x}^{(1)}$ を得る．$n \leftarrow 1$．
2	**社会的限界費用の更新**：現在の解 $\boldsymbol{x}^{(n)}$ の各リンクで社会的限界費用 $\mathrm{SMC}_a\left(x_a^{(n)}\right) = t_a\left(x_a^{(n)}\right) + x_a^{(n)}\, t'_a\left(x_a^{(n)}\right)$ を計算する（式 ([illegible])）．
3	**補助解の計算**（Frank-Wolfe ステップ）： 更新された社会的限界費用のもとで All-or-Nothing 配分を実行し，補助解 $\boldsymbol{y}^{(n)}$ を得る．
4	**ステップサイズ探索**（線探索）： $\alpha^* = \arg\min_{0\le\alpha\le1} Z_{SO}(\boldsymbol{x}^{(n)} + \alpha(\boldsymbol{y}^{(n)} - \boldsymbol{x}^{(n)}))$ 黄金分割法などの 1 次元最小化を用いる．
5	**解の更新**：$\boldsymbol{x}^{(n+1)} = (1-\alpha^*)\boldsymbol{x}^{(n)} + \alpha^* \boldsymbol{y}^{(n)}$．
6	**収束判定**：相対ギャップ（式 ([illegible])）が閾値 ε 以下なら終了．そうでなければ $n \leftarrow n+1$ として Step 2 へ．

テキスト49頁より

表 2.1 交通量配分の主要記号

記号	意味	単位（例）
x_a	リンク a の交通量	台/時
$t_a(x_a)$	リンク a の旅行時間（リンクパフォーマンス関数）	分
t_{a0}	リンク a の自由流旅行時間（$x_a = 0$ のとき）	分
C_a	リンク a の交通容量（キャパシティ）	台/時
f_k^{rs}	OD ペア rs の経路 k の交通量	台/時
q_{rs}	OD ペア rs の OD 交通量（需要）	台/時
c_k^{rs}	OD ペア rs の経路 k の旅行時間	分
u_{rs}	OD ペア rs の均衡最小旅行時間	分
$\delta_{a,k}^{rs}$	リンク a が経路 k^{rs} に含まれるなら 1，含まれないなら 0	—

記号	意味	単位（例）
$Z_{SO}(\boldsymbol{x})$	SO の目的関数（ネットワーク全体の総旅行時間）	台・分
PMC_a	私的限界費用 $= t_a(x_a)$（ドライバー自身の旅行時間）	分
SMC_a	社会的限界費用 $= t_a(x_a) + x_a\, t'_a(x_a)$	分
MEC_a	限界外部費用 $= x_a\, t'_a(x_a) = \mathrm{SMC}_a - \mathrm{PMC}_a$	分
τ_a^*	最適混雑課金額（ピグー税；$\tau_a^* = x_a^{SO}\, t'_a(x_a^{SO})$）	分
$D(x_a)$	需要曲線（交通量 x_a 台目の移動への支払意思額）	分
$W(x_a)$	社会的余剰（総便益 − 総社会的費用）	台・分
ΔW	死荷重損失（UE 配分による社会的余剰の損失）	台・分

テキスト48頁より

⑨混雑課金

利用者均衡配分	システム最適配分
自然な状況	理想的な状況

こっちに持っていく施策 **混雑課金**

車が1台増えることで、1本のリンク(aとする)の総旅行時間がどれだけ増えるか

$$SMC_a(x_a) = \frac{d}{dx_a}[x_a t_a(x_a)]$$

社会的限界費用

$$= \underbrace{t_a(x_a)}_{\text{私的限界費用 (PMC)}} + \underbrace{x_a t_a'(x_a)}_{\text{外部コスト}}$$

外部コスト：1台増えると、全体の流れも変化させる

※利用者均衡配分では、
この第1項のみを考えていた

利用者均衡配分の解をシステム最適配分の解と一致させるには、外部コスト分の課金をすればいい。

つまり、

$$\tau_a^* = \underbrace{x_a^{so}}_{\text{システム最適配分での リンクaの交通量}} t_a'(x_a^{so})$$

で計算される額の課金。

表 2.1　交通量配分の主要記号

記号	意味	単位（例）
x_a	リンク a の交通量	台/時
$t_a(x_a)$	リンク a の旅行時間（リンクパフォーマンス関数）	分
t_{a0}	リンク a の自由流旅行時間（$x_a = 0$ のとき）	分
C_a	リンク a の交通容量（キャパシティ）	台/時
f_k^{rs}	OD ペア rs の経路 k の交通量	台/時
q_{rs}	OD ペア rs の OD 交通量（需要）	台/時
c_k^{rs}	OD ペア rs の経路 k の旅行時間	分
u_{rs}	OD ペア rs の均衡最小旅行時間	分
$\delta_{a,k}^{rs}$	リンク a が経路 k^{rs} に含まれるなら 1，含まれないなら 0	—

記号	意味	単位（例）
$Z_{SO}(\boldsymbol{x})$	SO の目的関数（ネットワーク全体の総旅行時間）	台・分
PMC_a	私的限界費用 $= t_a(x_a)$（ドライバー自身の旅行時間）	分
SMC_a	社会的限界費用 $= t_a(x_a) + x_a\, t_a'(x_a)$	分
MEC_a	限界外部費用 $= x_a\, t_a'(x_a) = \mathrm{SMC}_a - \mathrm{PMC}_a$	分
τ_a^*	最適混雑課金額（ピグー税；$\tau_a^* = x_a^{SO}\, t_a'(x_a^{SO})$）	分
$D(x_a)$	需要曲線（交通量 x_a 台目の移動への支払意思額）	分
$W(x_a)$	社会的余剰（総便益 − 総社会的費用）	台・分
ΔW	死荷重損失（UE 配分による社会的余剰の損失）	台・分

テキストP48頁より

リンクパフォーマンス関数(6頁)で計算すると、

$$t_a(x) = t_{a0}\left\{1+\alpha\left(\frac{x_a}{C_a}\right)^{\beta}\right\}$$

$$t_a'(x) = t_{a0}\,\alpha\beta\,\frac{x_a^{\beta-1}}{C_a}$$

$$\tau_a^* = x_a^{so}\cdot t_{a0}\,\alpha\beta\,\frac{(x_a^{so})^{\beta-1}}{C_a^{\beta}} = t_{a0}\,\alpha\beta\Bigg(\underbrace{\frac{x_a^{so}}{C_a}}_{\text{最適な交通量 / 交通容量}}\Bigg)^{\beta}$$

交通容量に対して交通量が
多い道ほど高額に。

⑨混雑課金

ミクロ経済学の<u>余剰分析</u>で混雑課金を再評価

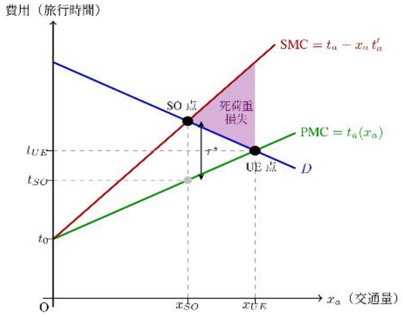


図 2.9 余剰分析：UE と SO の比較．横軸は交通量 x_a，縦軸は費用（旅行時間・支払意思額）．D は需要曲線（支払意思額），PMC は私的限界費用（旅行時間 $t_a(x_a)$），SMC は社会的限界費用 $\frac{d(x_a t_a)}{dx_a}$．SO 点（x_{SO}）では D = SMC；UE 点（x_{UE}）では D = PMC．紫の三角形（死荷重損失）は UE 配分によって生じる社会的余剰の損失を表す．τ^* は最適混雑課金額（外部コスト）．

テキスト52頁より

表 2.1 交通量配分の主要記号

記号	意味	単位（例）
x_a	リンク a の交通量	台/時
$t_a(x_a)$	リンク a の旅行時間（リンクパフォーマンス関数）	分
t_{a0}	リンク a の自由流旅行時間（$x_a = 0$ のとき）	分
C_a	リンク a の交通容量（キャパシティ）	台/時
f_k^{rs}	OD ペア rs の経路 k の交通量	台/時
q_{rs}	OD ペア rs の OD 交通量（需要）	台/時
c_k^{rs}	OD ペア rs の経路 k の旅行時間	分
u_{rs}	OD ペア rs の均衡最小旅行時間	分
$\delta_{a,k}^{rs}$	リンク a が経路 k^{rs} に含まれるなら 1，含まれないなら 0	—

記号	意味	単位（例）
$Z_{SO}(\boldsymbol{x})$	SO の目的関数（ネットワーク全体の総旅行時間）	台・分
PMC_a	私的限界費用 $= t_a(x_a)$（ドライバー自身の旅行時間）	分
SMC_a	社会的限界費用 $= t_a(x_a) + x_a\, t'_a(x_a)$	分
MEC_a	限界外部費用 $= x_a\, t'_a(x_a) = \mathrm{SMC}_a - \mathrm{PMC}_a$	分
τ_a^*	最適混雑課金額（ピグー税；$\tau_a^* = x_a^{SO}\, t'_a(x_a^{SO})$）	分
$D(x_a)$	需要曲線（交通量 x_a 台目の移動への支払意思額）	分
$W(x_a)$	社会的余剰（総便益 − 総社会的費用）	台・分
ΔW	死荷重損失（UE 配分による社会的余剰の損失）	台・分

テキスト48頁より

需要曲線Dと社会的限界費用曲線SMCで囲まれた部分が「社会的余剰」

※SO点より左では増加・右では減少

なので、SO点でに交通量を持ってくるのがいちばんハッピー

ただし、利用者均衡配分では私的限界費用曲線PMCに従って行動するので、均衡点はUE点（SO点よりも右）
図の網掛け部分に相当する「死荷重損失」のぶん不幸になっている

→混雑課金で、この「死荷重損失」をなくす