交通量配分

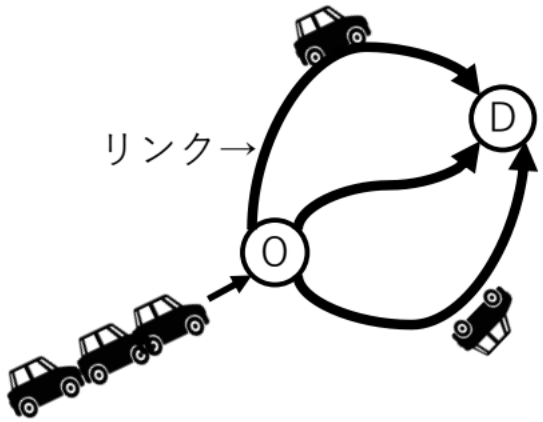
スタートアップゼミ #1

2025/4/9 小川，門坂

交通量配分とは

交通量配分問題 (Traffic Assignment Problem)とは,
交通ネットワークを対象に，**需要OD交通量**と**配分原則**を所与として,
ネットワークの**各リンクを流れる交通量**を予測する問題

交通ネットワーク：交通網のグラフによるネットワーク表現
需要OD交通量：各ODペア間の交通量
OD：Origin (出発地)-Destination (到着地)のペア
配分原則：利用者の行動原理の仮定



E.g.)四段階推定法

発生・集中交通量の予測
↓
分布交通量の予測
↓
分担交通量の予測
↓
配分交通量の予測

マッピング

非混雑型モデル

All-Or-Nothing配分

確率的配分
・Dial Algorithm
・吸収マルコフ過程配分

内生性

混雑型モデル

需要固定型利用者均衡配分 UE/FD
・Frank-Wolf法

確率的利用者均衡配分 SUE
・逐次平均法

動学化

動的交通配分

動的利用者均衡配分 DUE
・Reinforcement learning
・Day-to-day dynamics

交通シミュレーション

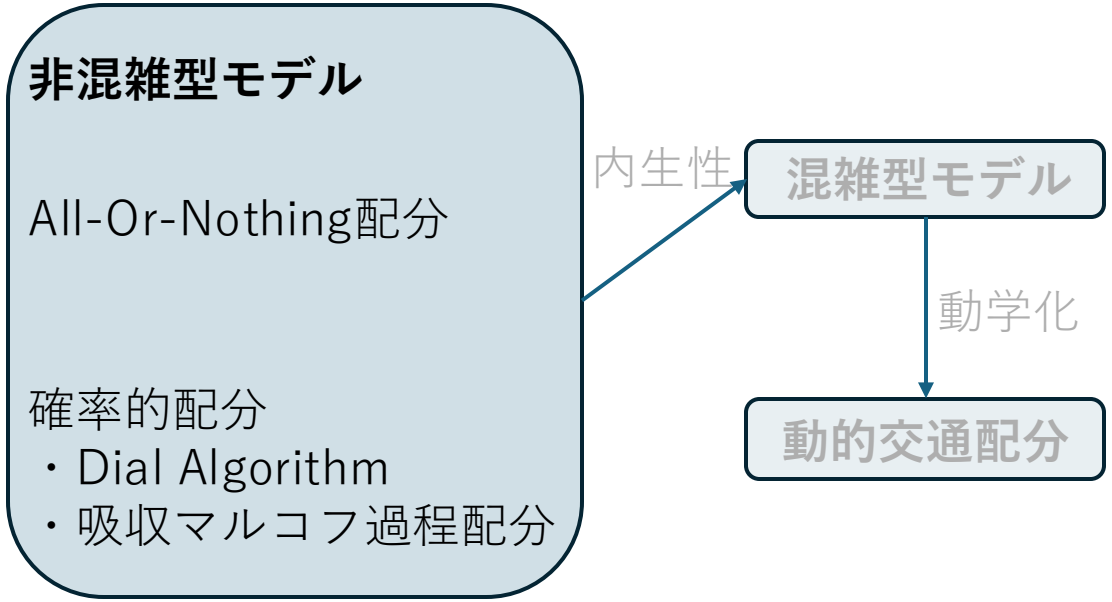
目次

1. 非混雑型配分
    1. 交通ネットワークの記述
    2. All-Or-Nothing配分
    3. 吸収マルコフ過程配分
    4. Dial Algorithm
2. 利用者均衡配分 (UE/FD)
    1. Wardropの第一原則
    2. Frank-Wolf法
    3. Braess's Paradox
3. 確率的利用者均衡配分 (SUE/FD)
    1. 不確実性の表現
    2. 逐次平均法 (MSA)
4. 動的交通配分 (DTA)
    1. Day-to-dayフレームワーク
    2. 交通シミュレーション

目標

1. 均衡配分とは何かを理解する
2. 各配分原理の基本的な考え方を理解する
3. 各配分原理に対応する基本的なアルゴリズムを知る

非混雑型


非混雑型モデル
All-Or-Nothing配分
確率的配分
・Dial Algorithm
・吸収マルコフ過程配分
内生性
混雑型モデル
動学化
動的交通配分

ネットワークの記述

交通ネットワークのグラフ表現

・ネットワーク：ノードとリンクの集合

ノード集合：$N = \{1,2,3,4\}$

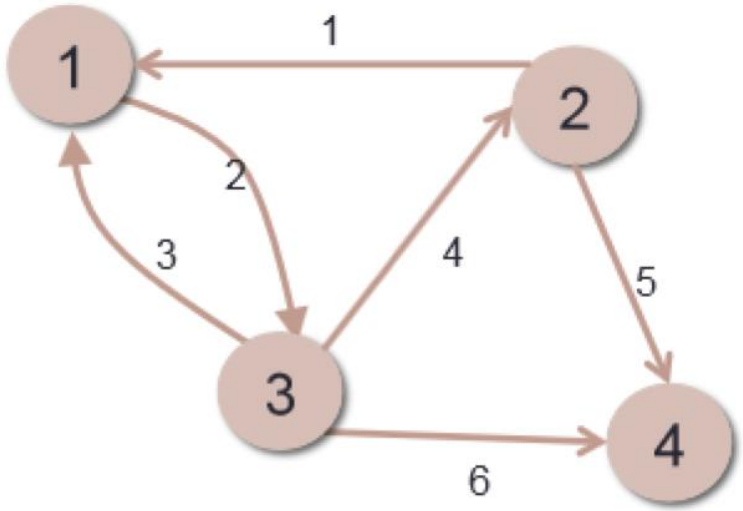
リンク集合：$A = \{1,2,3,4,5,6\}$

・始点/終点セントロイド：フローが発生/集中するノード

・パス：OD間を結ぶ経路

一般に各ODペアに対して複数のパスが存在

一般にそれぞれのパスは同じリンクを共有する



All-Or-Nothing配分

All-Or-Nothing配分：全ての利用者が最短経路を通ると仮定

・Flow-independentな配分（非混雑型）

・「**最短経路探索→最小費用経路に全需要を配分**」を全ての起点に対して実行

記号
・起点セントロイド：$o_n \in O$
・ノードiからjへの交通量：x_{ij}

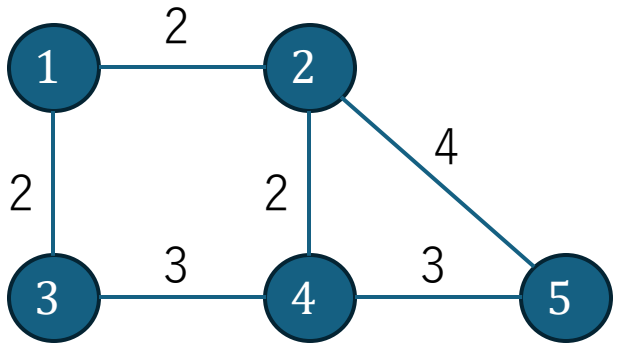
Step1 $n \leftarrow 0,\ x_{ij} \leftarrow 0$

Step2 o_nから他のすべてのノードに対して最短経路探索を行い，先行ポインタF_iと最短経路コスト$C_{min}[o_n \rightarrow i]$を求める.

Step3 o_nを起点とする全てのODについて，F_iを用いて最短経路を辿ると同時にOD交通量をリンクに割り当てる.

Step4 Step2, 3を全ての起点セントロイドについて繰り返す.

All-Or-Nothing配分の例



値はリンクコスト

OD	1	2	3	4	5
1	0	4	5	2	3
2	2	0	3	3	1
3	3	5	0	1	2
4	3	4	5	0	1
5	2	2	3	3	0

OD表

Step2. 最短経路探索

・Dijkstra法：計算量$O\big((V+E)\log V\big)$

・Warshall-Floyd法（辺が密な場合）：計算量$O(V^3)$ 全対間探索

先行ポインタF_i

・o_nからノードiまでの最短経路でiの一つ前に通るノードを表す.

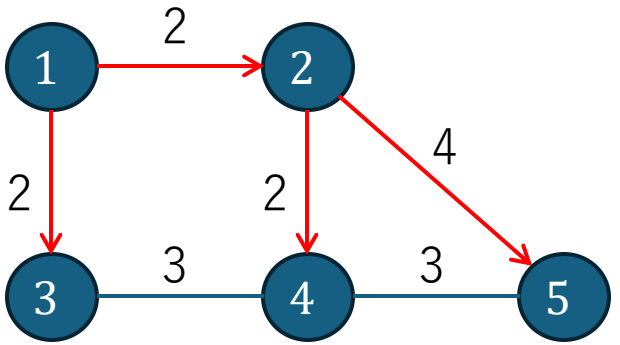
$o_n = 1$の場合

F_i

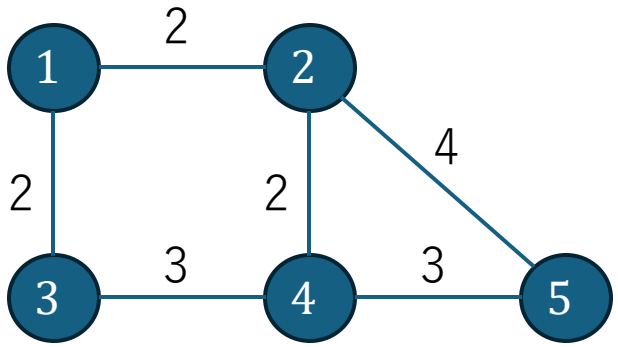
1	2	3	4	5
null	1			

C_{min}

1	2	3	4	5
0	2			



All-Or-Nothing配分の例



値はリンクコスト

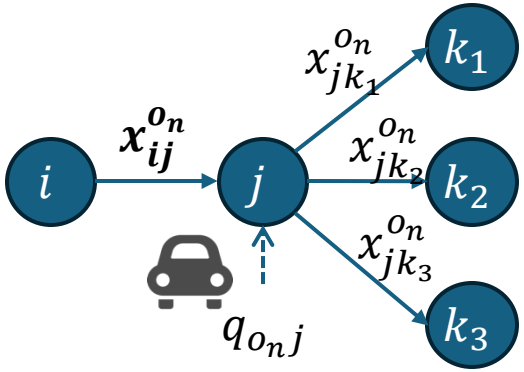
OD	1	2	3	4	5
1	0	4	5	2	3
2	2	0	3	3	1
3	3	5	0	1	2
4	3	4	5	0	1
5	2	2	3	3	0

OD表

Step3. 交通量更新

o_nから遠い方から，

$$x_{ij} \leftarrow x_{ij} + \left(q_{o_n j} + \sum_k x_{jk}^{o_n} \right)$$



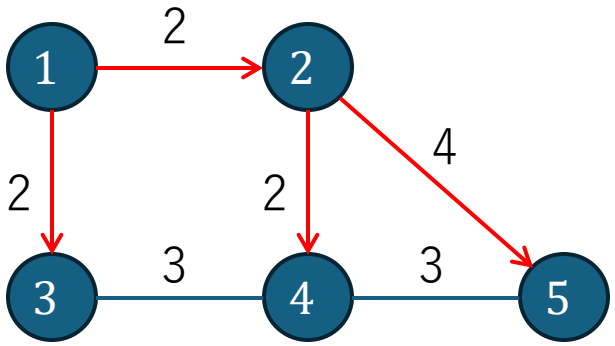
$o_n = 1$の場合

F_i

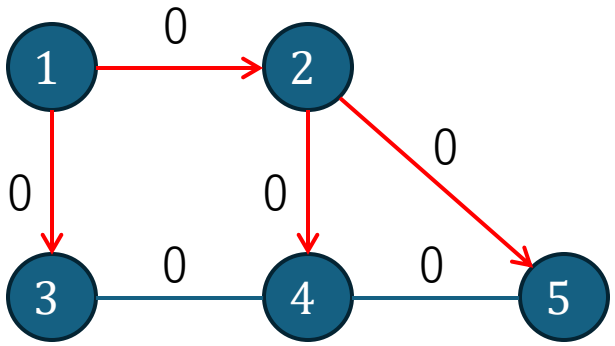
1	2	3	4	5
null	1	1	2	2

C_{min}

1	2	3	4	5
0	2	2	4	6

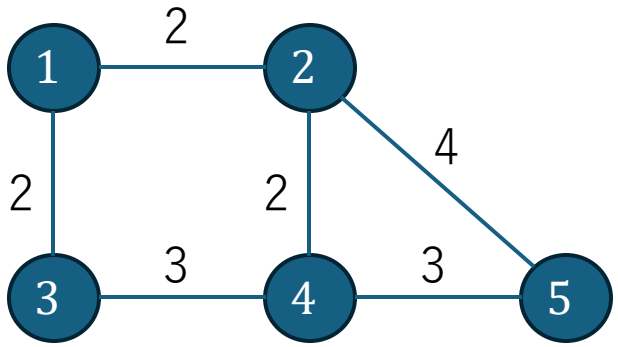


数字はリンクコスト



数字は交通量x_{ij}

All-Or-Nothing配分の例



値はリンクコスト

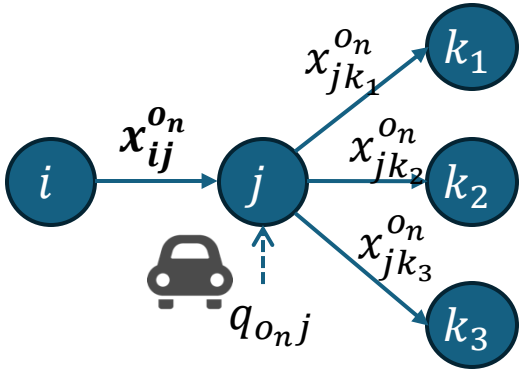
OD	1	2	3	4	5
1	0	4	5	2	3
2	2	0	3	3	1
3	3	5	0	1	2
4	3	4	5	0	1
5	2	2	3	3	0

OD表

Step3. 交通量更新

o_nから遠い方から，

$$x_{ij} \leftarrow x_{ij} + \left(q_{o_n j} + \sum_k x_{jk}^{o_n} \right)$$



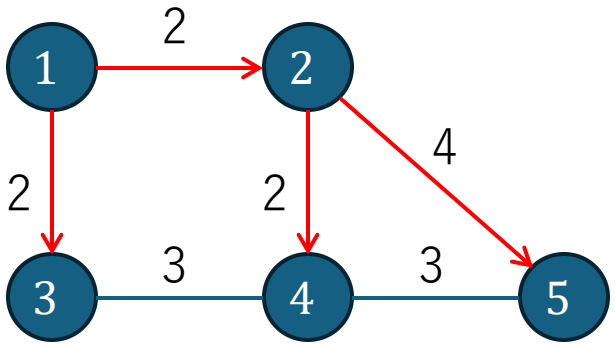
$o_n = 1$の場合

F_i

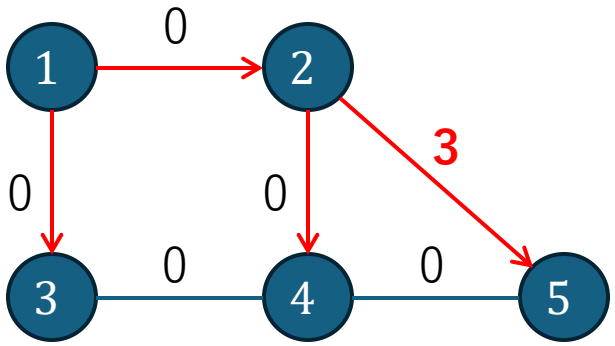
1	2	3	4	5
null	1	1	2	2

C_{min}

1	2	3	4	5
0	2	2	4	**6**

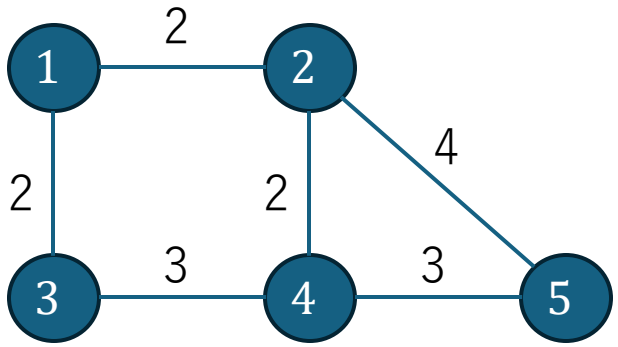


数字はリンクコスト



数字は交通量x_{ij}

All-Or-Nothing配分の例



値はリンクコスト

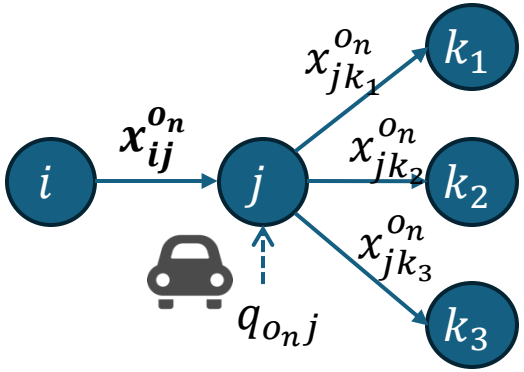
OD	1	2	3	4	5
1	0	4	5	2	3
2	2	0	3	3	1
3	3	5	0	1	2
4	3	4	5	0	1
5	2	2	3	3	0

OD表

Step3. 交通量更新

o_nから遠い方から，

$$x_{ij} \leftarrow x_{ij} + \left(q_{o_n j} + \sum_k x_{jk}^{o_n} \right)$$



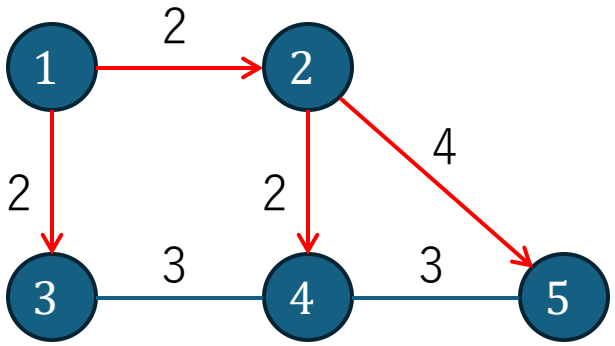
$o_n = 1$の場合

F_i

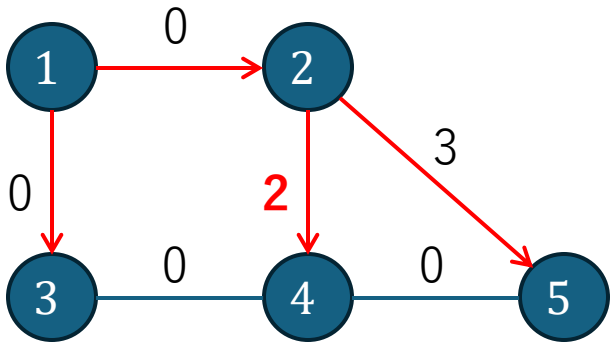
1	2	3	4	5
null	1	1	2	2

C_{min}

1	2	3	4	5
0	2	2	**4**	6

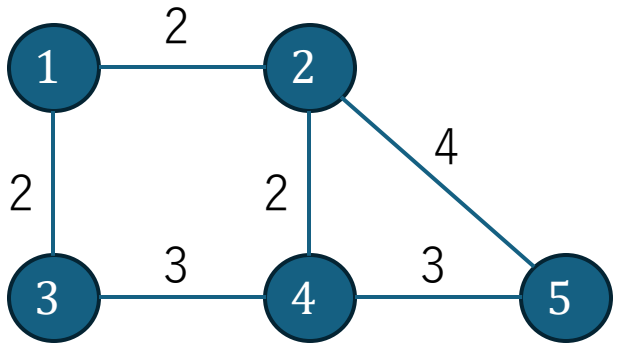


数字はリンクコスト



数字は交通量x_{ij}

All-Or-Nothing配分の例



値はリンクコスト

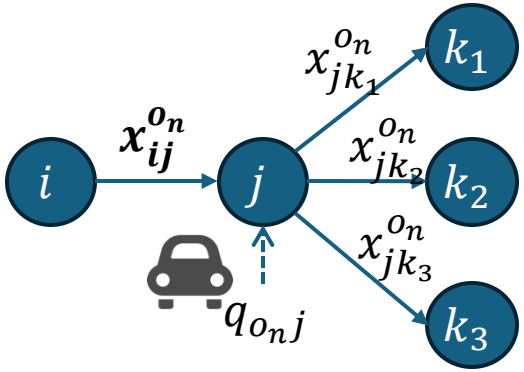
OD	1	2	3	4	5
1	0	4	5	2	3
2	2	0	3	3	1
3	3	5	0	1	2
4	3	4	5	0	1
5	2	2	3	3	0

OD表

Step3. 交通量更新

o_nから遠い方から，

$$x_{ij} \leftarrow x_{ij} + \left(q_{o_n j} + \sum_k x_{jk}^{o_n} \right)$$



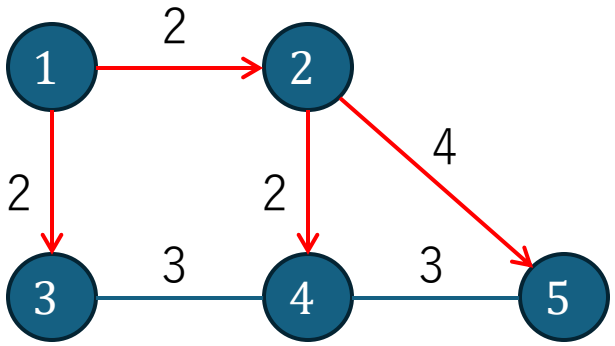
$o_n = 1$の場合

F_i

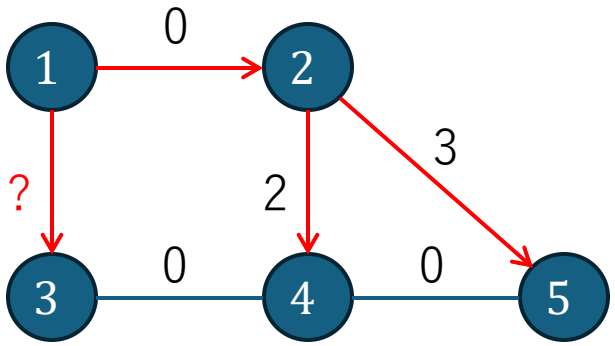
1	2	3	4	5
null	1	1	2	2

C_{min}

1	2	3	4	5
0	2	**2**	4	6

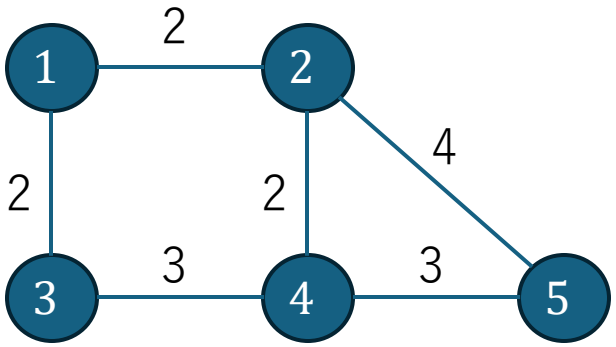


数字はリンクコスト



数字は交通量x_{ij}

All-Or-Nothing配分の例



値はリンクコスト

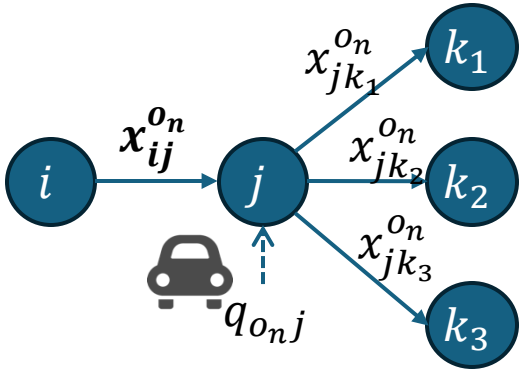
OD	1	2	3	4	5
1	0	4	5	2	3
2	2	0	3	3	1
3	3	5	0	1	2
4	3	4	5	0	1
5	2	2	3	3	0

OD表

Step3. 交通量更新

o_nから遠い方から，

$$x_{ij} \leftarrow x_{ij} + \left(q_{o_n j} + \sum_k x_{jk}^{o_n} \right)$$



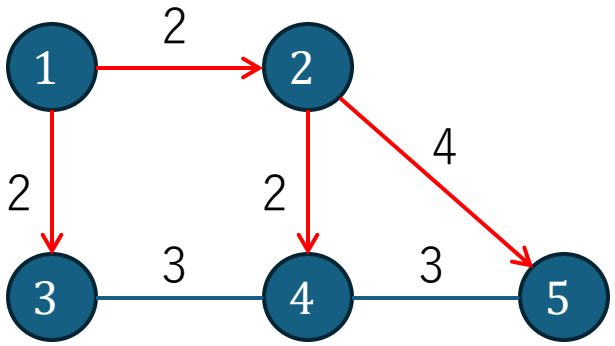
$o_n = 1$の場合

F_i

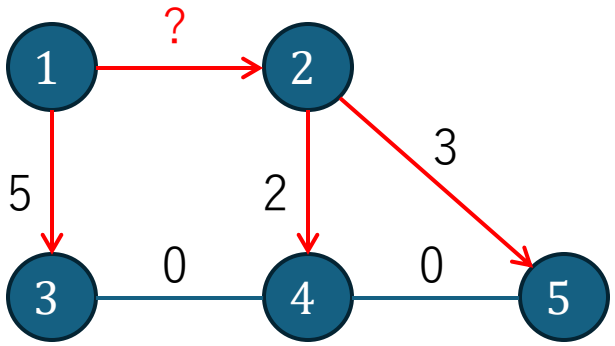
1	2	3	4	5
null	1	1	2	2

C_{min}

1	2	3	4	5
0	**2**	2	4	6

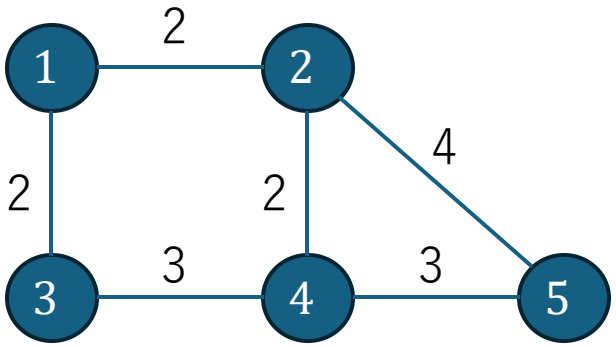


数字はリンクコスト



数字は交通量x_{ij}

All-Or-Nothing配分の例



値はリンクコスト

OD	1	2	3	4	5
1	0	4	5	2	3
2	2	0	3	3	1
3	3	5	0	1	2
4	3	4	5	0	1
5	2	2	3	3	0

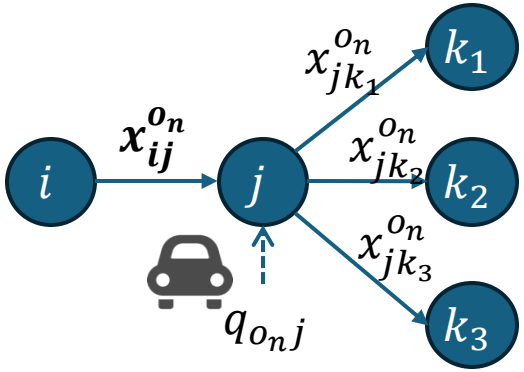
OD表

以上を全ての起点について繰り返し，
足し合わせる．

Step3. 交通量更新

o_nから遠い方から，

$$x_{ij} \leftarrow x_{ij} + \left(q_{o_n j} + \sum_k x_{jk}^{o_n} \right)$$



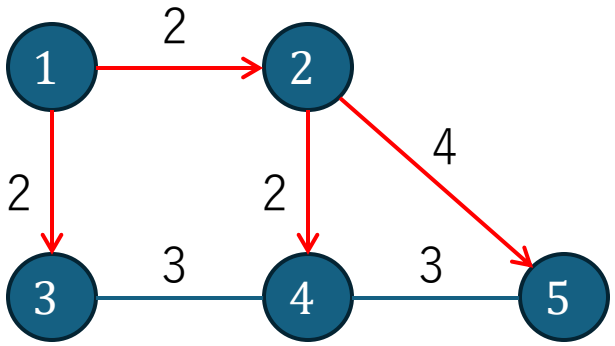
$o_n = 1$の場合

F_i

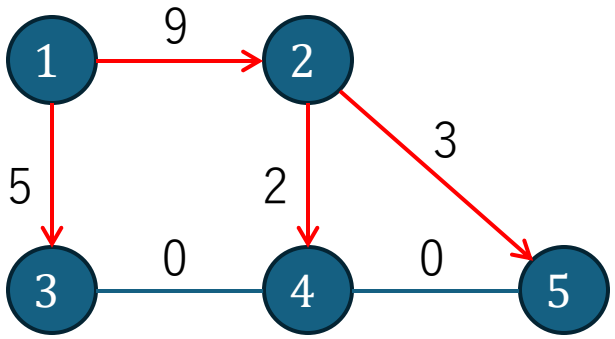
1	2	3	4	5
null	1	1	2	2

C_{min}

1	2	3	4	5
0	**2**	2	4	6



数字はリンクコスト



数字は交通量x_{ij}

ロジット配分（非混雑型）

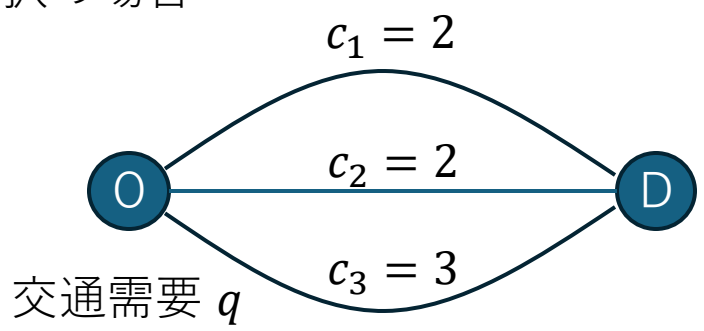
All-or-nothing配分：全利用者が完全な情報を持ち最短経路を選択．しかし，これはやや強い仮定．

→ロジット配分：利用者の確率的な選択を仮定．ただし，目的地に近づく方向しか考えない．

・Flow-independentな配分（非混雑型）

・「**最短経路探索→費用の小さい経路により多くの交通需要を割り当てる**」を全ての起点に対して実行

パス選択の場合



ロジット選択

・パラメータ θ：選択の確かさを表す．

$\theta = 0$：ランダム選択

$\theta = \infty$：最短経路選択

選択確率

$$P_1 = \frac{\exp(-2\theta)}{\exp(-2\theta) + \exp(-2\theta) + \exp(-3\theta)}$$

$$P_1 = \frac{\exp(-2\theta)}{\exp(-2\theta) + \exp(-2\theta) + \exp(-3\theta)}$$

$$P_1 = \frac{\exp(-3\theta)}{\exp(-2\theta) + \exp(-2\theta) + \exp(-3\theta)}$$

→ 交通量 (qP_1, qP_2, qP_3)

ネットワーク上での配分計算→Dialのアルゴリズム

ロジット配分（非混雑型）

Dialのアルゴリズム

記号
・起点セントロイド：$o_n \in O$
・ノードiからjへの交通量：x_{ij}
・ノードiからjへの移動コスト：t_{ij}
・選択の確実さパラメータ：θ
・**リンク尤度（リンク選択確率**に比例）：$L[i \to j]$
・**リンクウェイト**（交通量を割り当てる重み）：$W[i \to \mathrm{j}]$

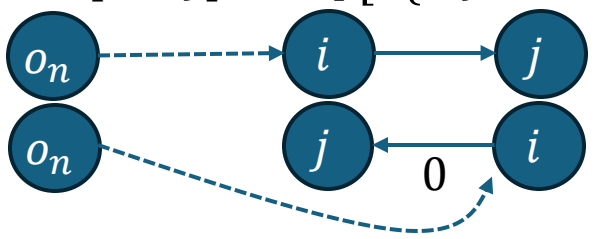
Step1 最短経路探索

o_nから他のすべてのノードに対して最短経路探索を行い，o_nからの最短経路コスト$c(i)$を求める．

Step2 リンク尤度を計算

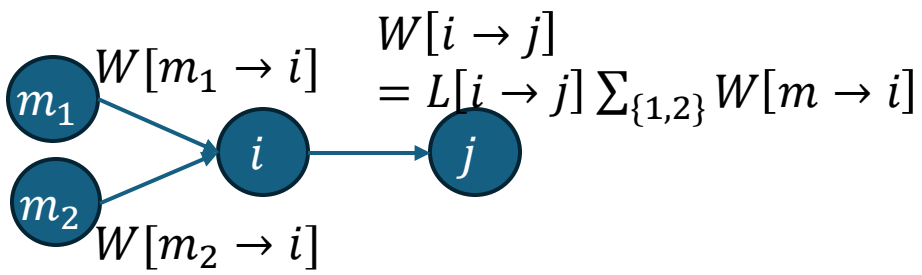
$$L[i \to j] = \begin{cases} \exp\left[\theta\left\{c(j) - c(i) - t_{ij}\right\}\right]; c(i) < c(j) \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad ; otherwise \end{cases}$$

$$L[i \to j] = \exp\left[\theta\left\{c(j) - c(i) - t_{ij}\right\}\right]$$



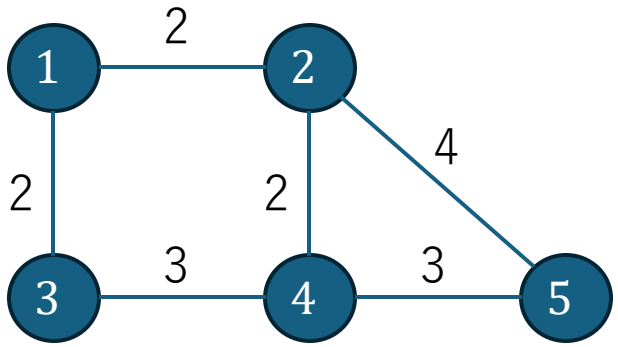
Step3 前進処理：起点o_nから順にリンクウェイトを計算．

$$W[i \to j] = \begin{cases} L[i \to j] & ; i = o_n \\ L[i \to j] \sum_m W[m \to i]; otherwise \end{cases}$$



Step4 後退処理：起点o_nから遠い順に，OD交通量を$W[i \to j]$に比例してリンクに割り当てる．→後述

ロジット配分（非混雑型）の例



値はリンクコスト

OD	1	2	3	4	5
1	0	4	5	2	3
2	2	0	3	3	1
3	3	5	0	1	2
4	3	4	5	0	1
5	2	2	3	3	0

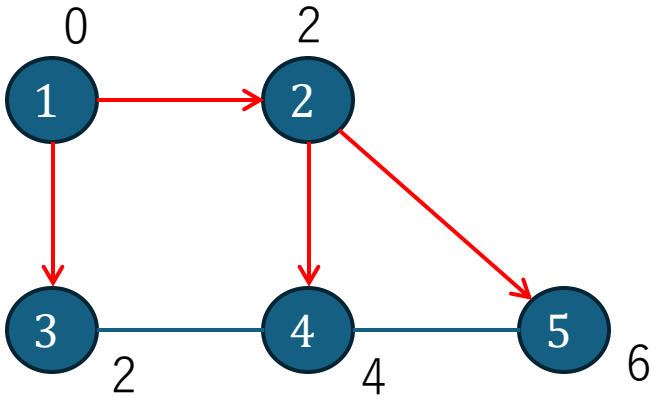
OD表

Step2. リンク尤度の計算

$$L[i \to j] = \begin{cases} \exp\left[\theta\{c(j) - c(i) - t_{ij}\}\right]; c(i) < c(j) \\ 0 \qquad\qquad ; otherwise \end{cases}$$

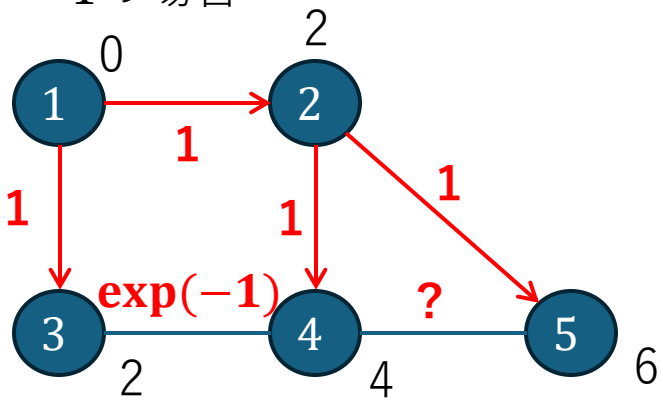
$o_n = 1$の場合

$c(i)$	1	2	3	4	5
	0	2	2	4	6



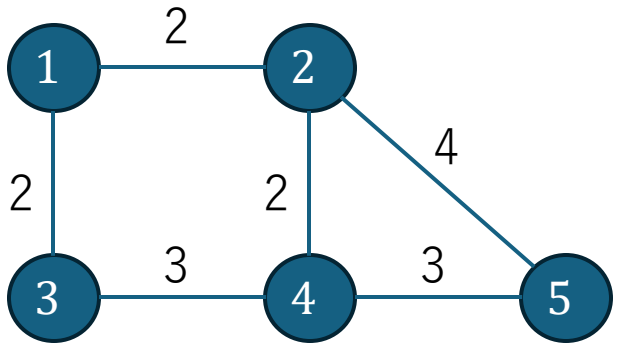
数字は最短経路コスト$c(i)$

$\theta = 1$の場合



赤字はリンク尤度

ロジット配分（非混雑型）の例



値はリンクコスト

OD	1	2	3	4	5
1	0	4	5	2	3
2	2	0	3	3	1
3	3	5	0	1	2
4	3	4	5	0	1
5	2	2	3	3	0

OD表

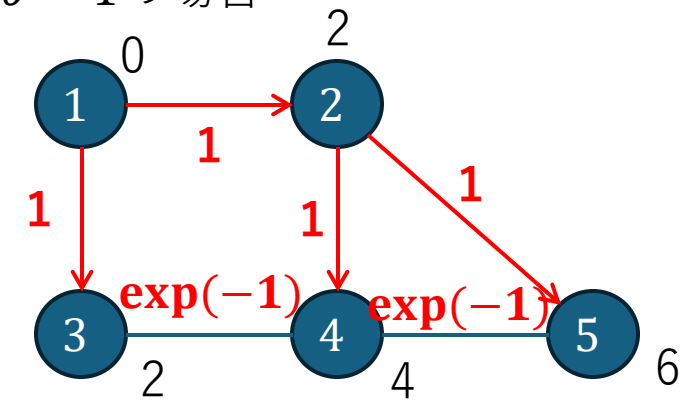
Step3. 前進処理：リンクウェイトの計算

$$W[i \to j] = \begin{cases} L[i \to j] & ; i = o_n \\ L[i \to j] \sum_m W[m \to i]; otherwise \end{cases}$$

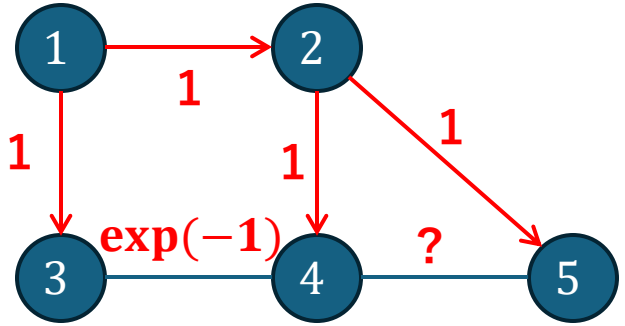
$o_n = 1$の場合

$c(i)$	1	2	3	4	5
	0	2	2	4	6

$\theta = 1$の場合

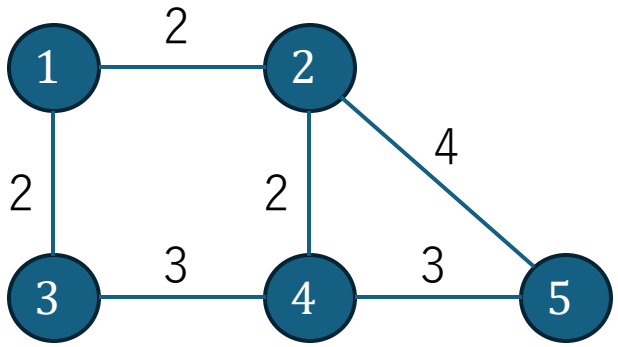


最短経路コストとリンク尤度



リンクウェイト

ロジット配分（非混雑型）の例



値はリンクコスト

OD	1	2	3	4	5
1	0	4	5	2	3
2	2	0	3	3	1
3	3	5	0	1	2
4	3	4	5	0	1
5	2	2	3	3	0

OD表

Step4. 後退処理

o_nから遠い方から，

$$x_{ij} \leftarrow x_{ij} + \left(q_{o_n j} + \sum_k x_{jk}^{o_n} \right) \frac{W[i \to j]}{\sum_{i'} W[i' \to j]}$$

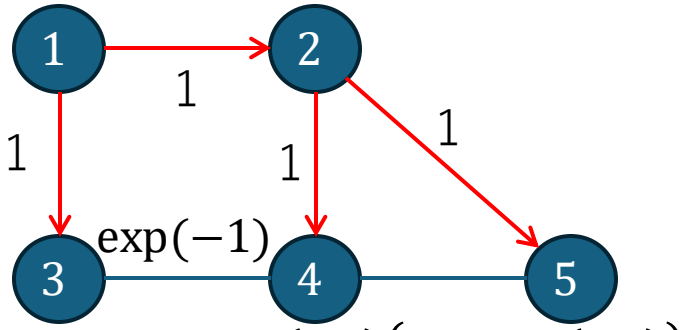
注）All-or-nothing配分では，

o_nから遠い方から，

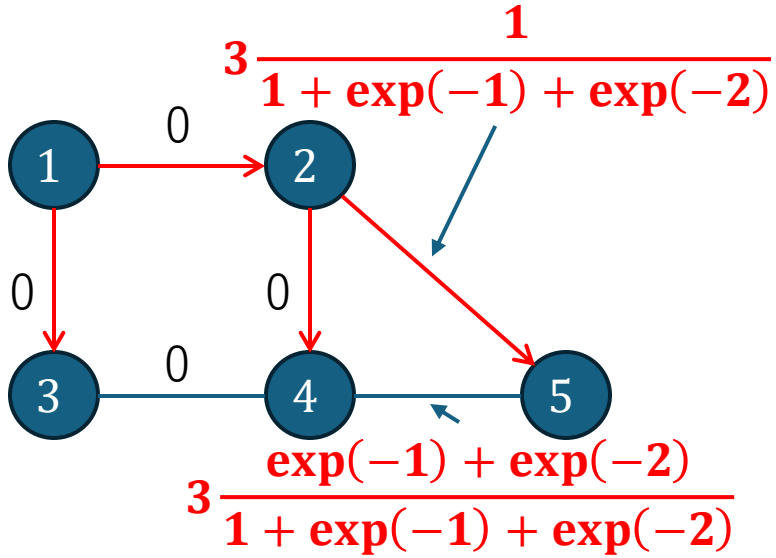
$$x_{ij} \leftarrow x_{ij} + \left(q_{o_n j} + \sum_k x_{jk}^{o_n} \right)$$

$o_n = 1$の場合

$c(i)$	1	2	3	4	5
	0	2	2	4	**6**

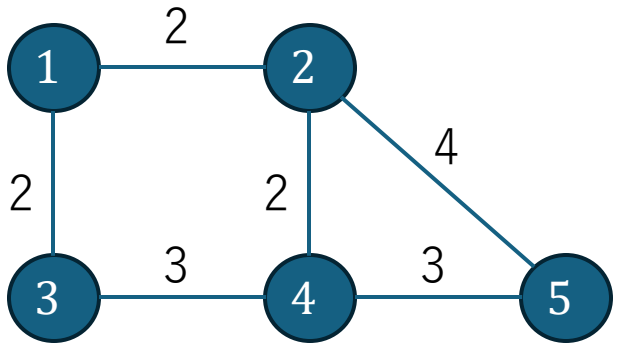


リンクウェイト



数字は交通量x_{ij}

ロジット配分（非混雑型）の例



値はリンクコスト

OD	1	2	3	4	5
1	0	4	5	2	3
2	2	0	3	3	1
3	3	5	0	1	2
4	3	4	5	0	1
5	2	2	3	3	0

OD表

Step4. 後退処理

o_nから遠い方から，

$$x_{ij} \leftarrow x_{ij} + \left(q_{o_n j} + \sum_k x_{jk}^{o_n} \right) \frac{W[i \to j]}{\sum_{i'} W[i' \to j]}$$

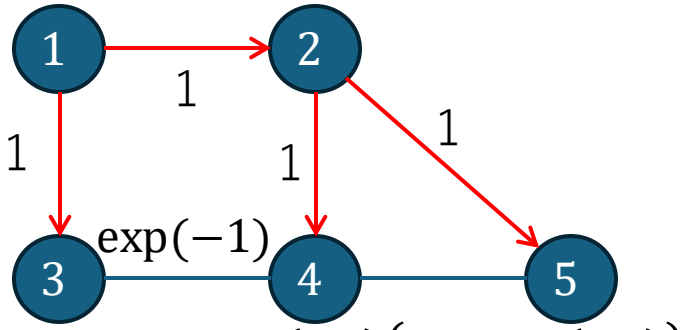
注）All-or-nothing配分では，

o_nから遠い方から，

$$x_{ij} \leftarrow x_{ij} + \left(q_{o_n j} + \sum_k x_{jk}^{o_n} \right)$$

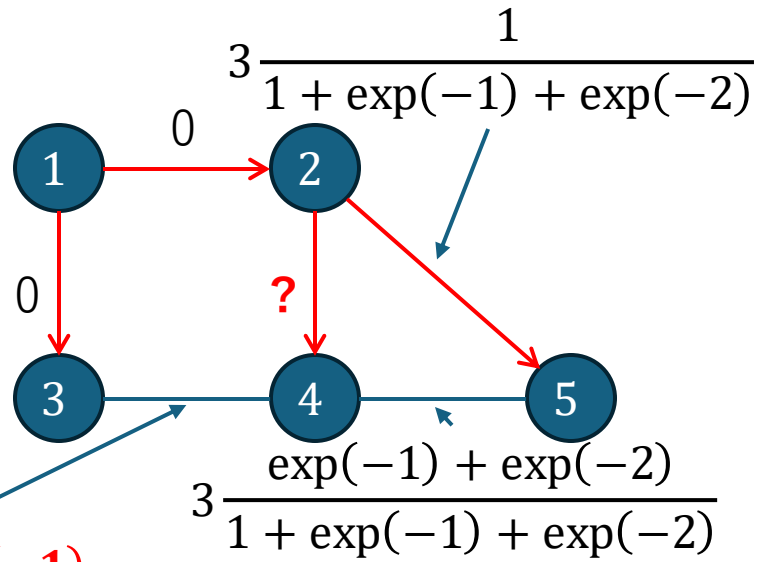
$o_n = 1$の場合

$c(i)$	1	2	3	4	5
	0	2	2	**4**	6



$\exp(-1)(1+\exp(-1))$

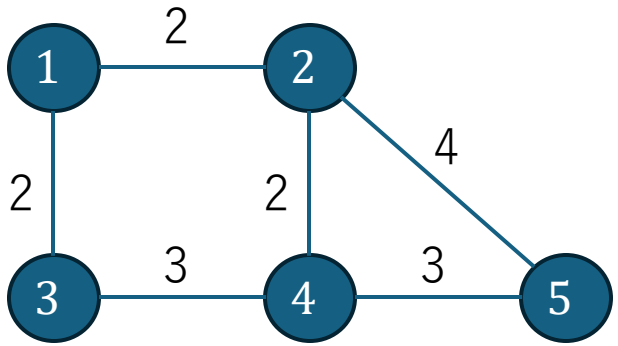
リンクウェイト



数字は交通量x_{ij}

$$\left(2 + 3\frac{\exp(-1)+\exp(-2)}{1+\exp(-1)+\exp(-2)}\right)\frac{\exp(-1)}{1+\exp(-1)}$$

ロジット配分（非混雑型）の例



値はリンクコスト

OD	1	2	3	4	5
1	0	4	5	2	3
2	2	0	3	3	1
3	3	5	0	1	2
4	3	4	5	0	1
5	2	2	3	3	0

OD表

以下，これを繰り返す．

Step4. 後退処理

o_nから遠い方から，

$$x_{ij} \leftarrow x_{ij} + \left(q_{o_n j} + \sum_k x_{jk}^{o_n} \right) \frac{W[i \to j]}{\sum_{i'} W[i' \to j]}$$

注）All-or-nothing配分では，

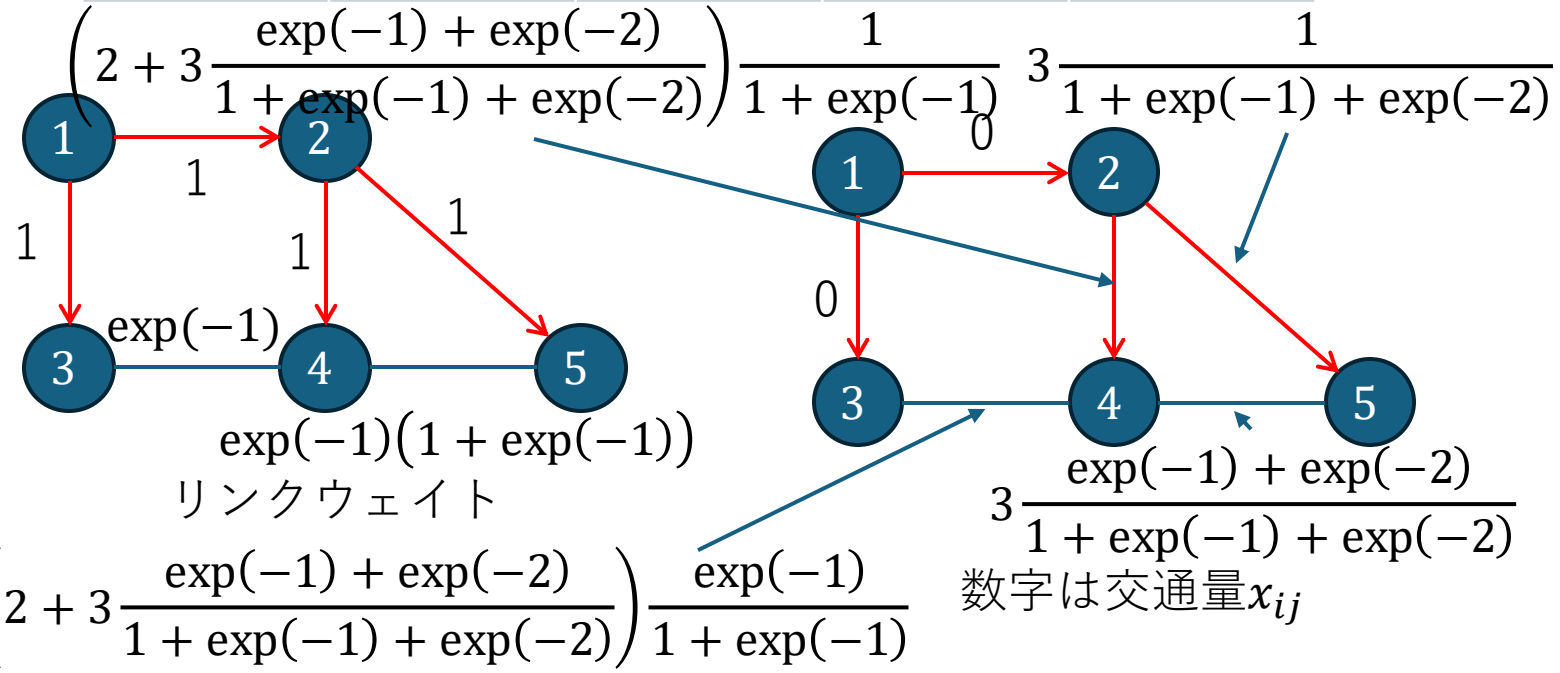
o_nから遠い方から，

$$x_{ij} \leftarrow x_{ij} + \left(q_{o_n j} + \sum_k x_{jk}^{o_n} \right)$$

$o_n = 1$の場合

$c(i)$

1	2	3	4	5
0	2	2	4	6

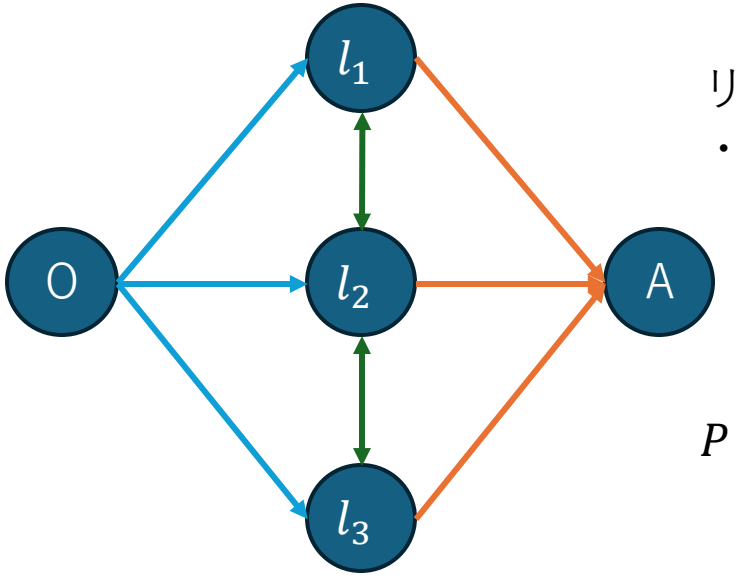


吸収Markov過程配分 (佐々木，1965)

吸収Markov過程に基づく交通量配分：経路列挙不要，周回を考慮可能な交通量配分

・マルコフ過程：次の時点の状態が現時点の状態にのみ応じて決定される確率過程.

・吸収マルコフ過程：吸収状態があるマルコフ過程



注）ここではノードではなく，リンクにインデックスを振っている.

リンク遷移確率

・P_{ij}：リンクiからリンクjへの遷移確率

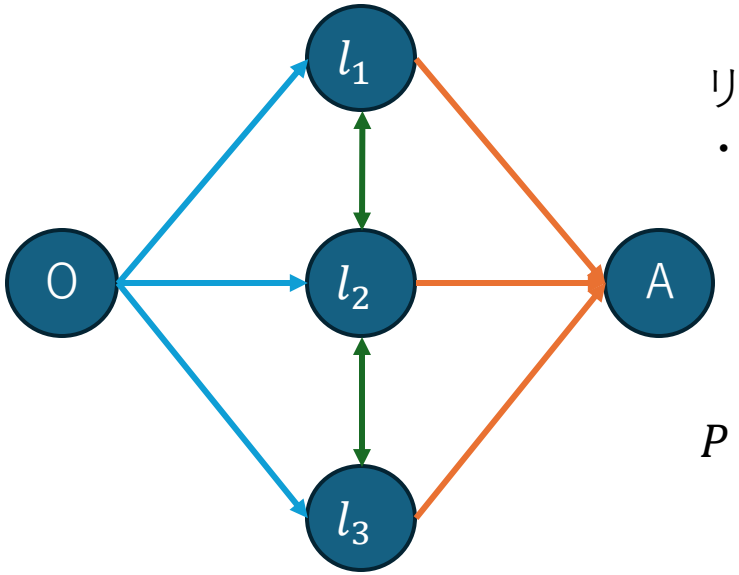
$$P = \begin{array}{c} \\ \text{A} \\ \text{O} \\ \text{Links} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{A} & \text{O} \end{array} \\ \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_1 \\ R & 0 & Q_2 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} \text{A} & \text{O} \quad \text{Links} \end{array} \end{array} Q$$

リンク$1, 2, 3$の時刻tでの交通量推移

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.4 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$$

t	l_1	l_2	l_3	計
1	1	2	3	6
2	1	2	2	5
3	**?**	**?**	**?**	**?**

吸収Markov過程配分 (佐々木，1965)



注）ここではノードではなく，リンクにインデックスを振っている．

吸収Markov過程に基づく交通量配分：経路列挙不要な交通量配分

・マルコフ過程：次の時点の状態が現時点の状態にのみ応じて決定される確率過程．

・吸収マルコフ過程：吸収状態があるマルコフ過程

リンク遷移確率

・P_{ij}：リンクiからリンクjへの遷移確率

$$P = \begin{array}{c} \\ \text{A} \\ \text{O} \\ \text{Links} \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{A} & \text{O} & & \text{Links} \end{array} \\ \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & Q_1 & \\ R & 0 & Q_2 & \end{bmatrix} \\ Q \end{array}$$

ただし，同じリンクを何回も通るなど，過大な交通量を予測する可能性もある．

リンク$1,2,3$の時刻tでの交通量

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.4 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$$

t	l_1	l_2	l_3	計
1	1	2	3	6
2	1	2	2	5
3	0.9	1.7	1.5	4.1

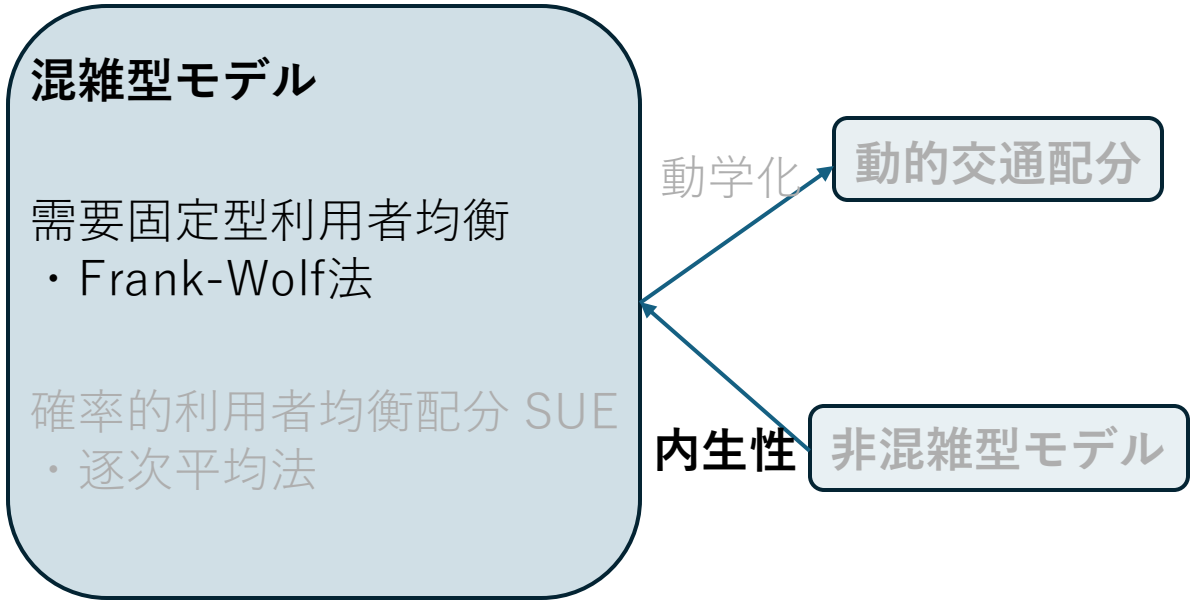
oも含めて無限回繰り返すと，

$$I + Q + Q^2 + \cdots = (I - Q)^{-1}$$

oからu台出発したとすると，

- 累積交通量 $uQ_1(1 - Q_2)^{-1}$
- 発生交通量 uQ_1
- 集中交通量 $uQ_1(1 - Q_2)^{-1} \odot R^T$

利用者均衡配分


混雑型モデル
需要固定型利用者均衡
・Frank-Wolf法
確率的利用者均衡配分 SUE
・逐次平均法
動学化
動的交通配分
内生性
非混雑型モデル

Wardropの第一原則

通常は，混雑した道を避けるというように利用者間に相互作用が存在.
・混雑：**内生変数**（外から与えられるのではなく，配分計算の結果求められる）
→内生変数と配分交通量が整合するような**均衡状態**を仮定

Wardropの第一原則

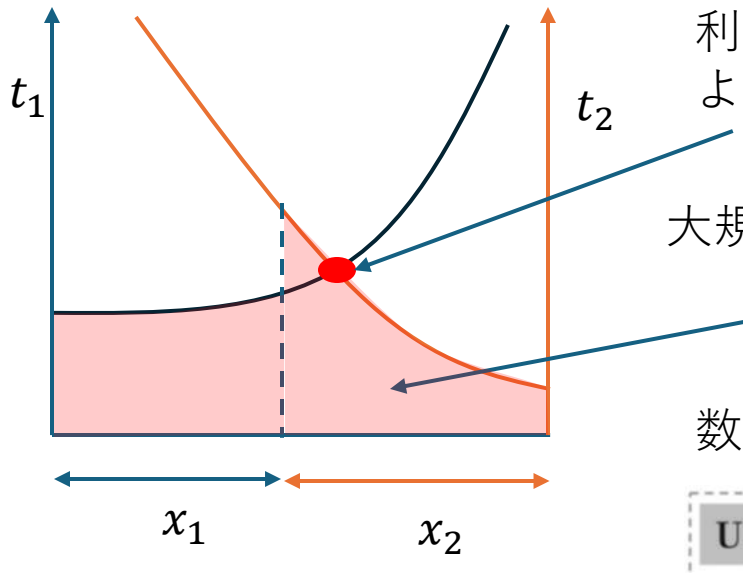
仮定：
1. 全ての利用者は常に旅行時間を最小とするように行動する.
2. 利用者は常に利用可能な経路についての完全な情報を得ている.

利用者が自己の経路選択を最適化した結果到達する均衡状態が,

Wardropの第一原則
利用される経路の旅行時間は皆等しく，利用されない経路の旅行時間よりも小さいか，せいぜい等しい.

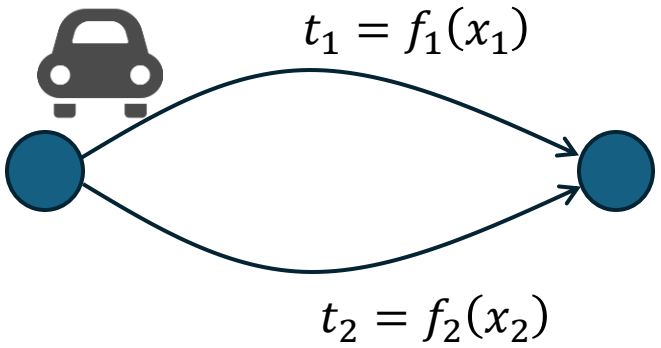
均衡状態においては，もはやどの利用者も経路を変更することによって自己の旅行時間をそれ以上短縮することはできない.
=**利用者均衡配分**（UE: User Equilibrium assignment）

Wardropの第一原則の数理的基礎づけ



Wardropの第一原則
利用される経路の旅行時間は皆等しく，利用されない経路の旅行時間よりも小さいか，せいぜい等しい．

大規模ネットワークで計算するため，**等価問題に変換**（**Beckmann et al., 1956**）
この面積を最小化するxを求める：
一台ずつ，その時点での最短経路に割り付けるイメージ



数理的には，

UE/FD-Primal

$$\min Z(\boldsymbol{x}) = \sum_{a \in A} \int_0^{x_a} t_a(w)dw$$

s.t.

$$\sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs} - q_{rs} = 0 \qquad \forall rs \in \Omega$$

$$x_a = \sum_{rs \in \Omega} \sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs} \qquad \forall a \in A$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \qquad \forall k \in K_{rs}, \forall rs \in \Omega$$

$$x_a \geq 0 \qquad \forall a \in A$$

$t_a(x_a)$: リンクaの旅行時間
x_a: リンクaの交通量
f_k^{rs}: ODペアrs間のパスkの流量
q_{rs}: ODペアrs間の分布交通量
$\delta_{a,k}^{rs}$: ODペアrs間のパスkがリンクaを含むか否か（True=1, False=0）

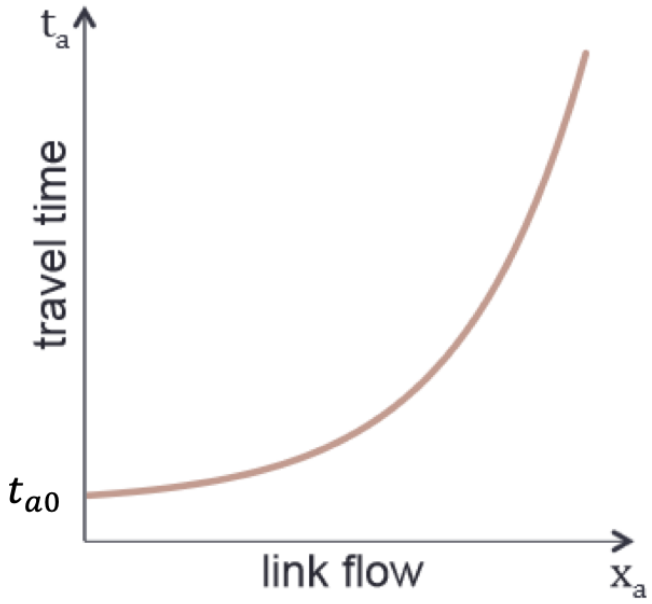
・十分性：UE/FD-PrimalのKKT条件がWardropの第一原則
・解の一意性：リンクパフォーマンス関数$t = f(x)$が単調増加なら目的関数が狭義凸関数
詳しくは過去の資料を参照

リンクパフォーマンス関数

BPR関数：リンク流量と旅行時間の関係式

$$t_a(x_a) = t_{a0}\left\{1 + \alpha\left(\frac{x_a}{c_a}\right)^{\beta}\right\}$$

t_a：リンクaの旅行時間
t_{a0}：リンクaの自由旅行時間（交通量0のとき）
x_a：リンクaの流量
c_a：リンクaの交通容量
α, β：パラメータ（日本だと$\alpha = 2.62, \beta = 5$）



BPR関数の特徴
・自身のリンク交通量のみの関数
・単調増加で，$\forall x_a \geq 0$で定義されている

補足１．リンク間に相互干渉がある場合，すなわち，リンクパフォーマンス関数が他のリンクの交通量にも依存する場合，2.1の最適化問題への置換ができず，変分不等式問題(VI)として解かれる．（参考：青本5.4節）
補足２．交通量x_aの全ての領域で定義され，かつ，単調増加関数である，ということはFrank-Wolf法でとける．

Frank-Wolf法

Frank-Wolf法のアルゴリズム

Step1. 初期実行可能解の設定

交通量0における**all-or-nothing配分**により，初期実行可能解となるリンク交通量$\left\{x_a^{(n=1)}\right\}$を与える．

Step2. リンクコストの更新

$\left\{x_a^{(n)}\right\}$に対する所要時間$\left\{t_a(x_a^{(n)})\right\}$を計算

Step3. 降下方向ベクトルの探索

All-or-nothing配分により全交通量をリンクに負荷．$\left\{y_a^{(n)}\right\}$を求める．

Step4. ステップサイズ$\alpha^{(n)}$の探索，交通量の更新

交通量の更新：$x_a^{(n+1)} = x_a^{(n)} + \alpha^{(n)}\left(y_a^{(n)} - x_a^{(n)}\right)$　$\left\{x_a^{(n)}\right\}$のうちの$\alpha^{(n)}$をStep3の最短経路に割り付け直す

$$\alpha^{(n)} = \min_{0 \le \alpha^{(n)} \le 1} \sum_a \int_0^{x_a^{(n+1)}} t_a(w)dw$$

→ 一変数関数の最小化(積分はあらかじめ計算) → **黄金比分割法**など

Step5. 収束判定

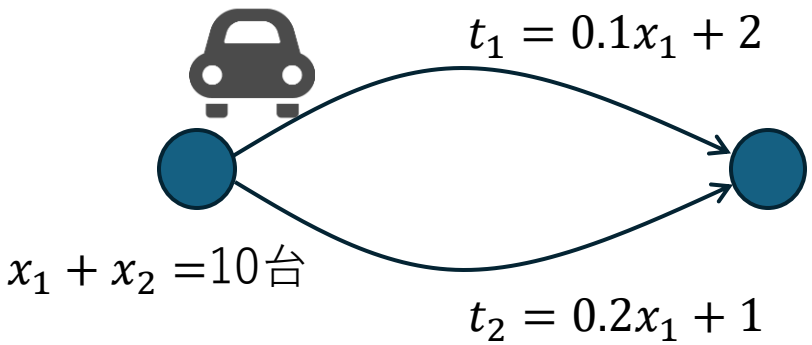
収束していれば，計算終了．そうでなければ，$n \leftarrow n+1$としてstep2へ．

収束判定の基準は，総旅行時間変化，交通量変化，反復回数など．

・リンクコストが交通量で変化するため，繰り返し計算により均衡解に収束させる．
・Step4の定義より，　目的関数は必ず減少していく．

色々な配分原理

Wardropの第二原理
道路網上の総旅行時間が最小となる.
=**システム最適化配分(SO: System Optimal assignment)**
・外部性が存在しないとき，UE=SO
・そうでない時は，中央集権的な管理によって達成できる.
→混雑課金など



UE

$$0.1x_1 + 2 = 0.2x_2 + 1$$
$$x_1 + x_2 = 10$$

解くと,

$$(x_1, x_2) = (3.3, 6.7)$$
$$t_1 = t_2 = 2.3$$

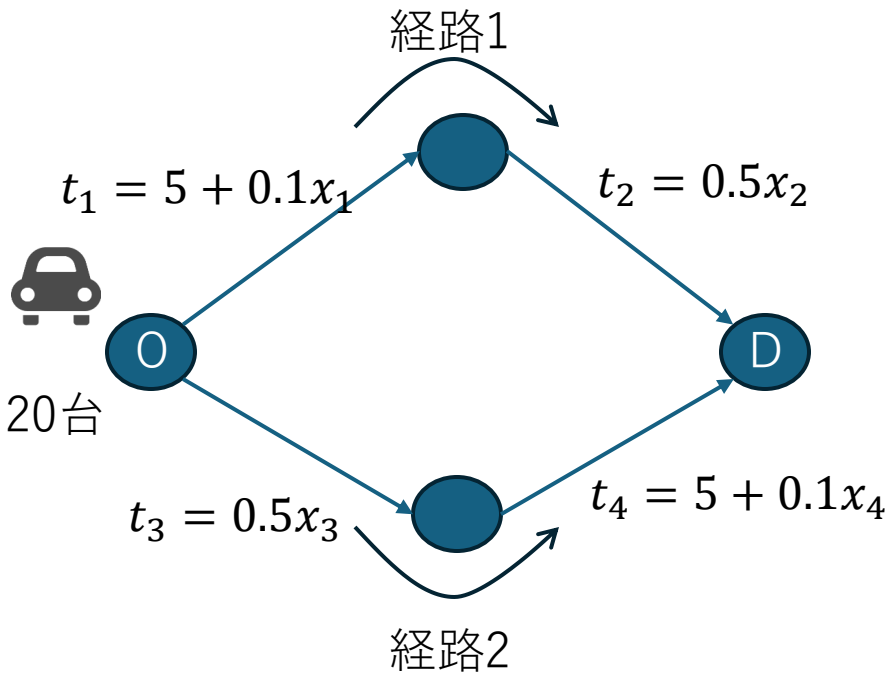
SO

$$\min(0.1x_1 + 2)x_1 + (0.2x_2 + 1)x_2$$
$$s.t. x_1 + x_2 = 10$$

解くと,

$$(x_1, x_2) = (5, 5)$$
$$t_1 = 2.5, t_2 = 2$$

Braessのパラドクス



Wardropの第一原則に従い配分

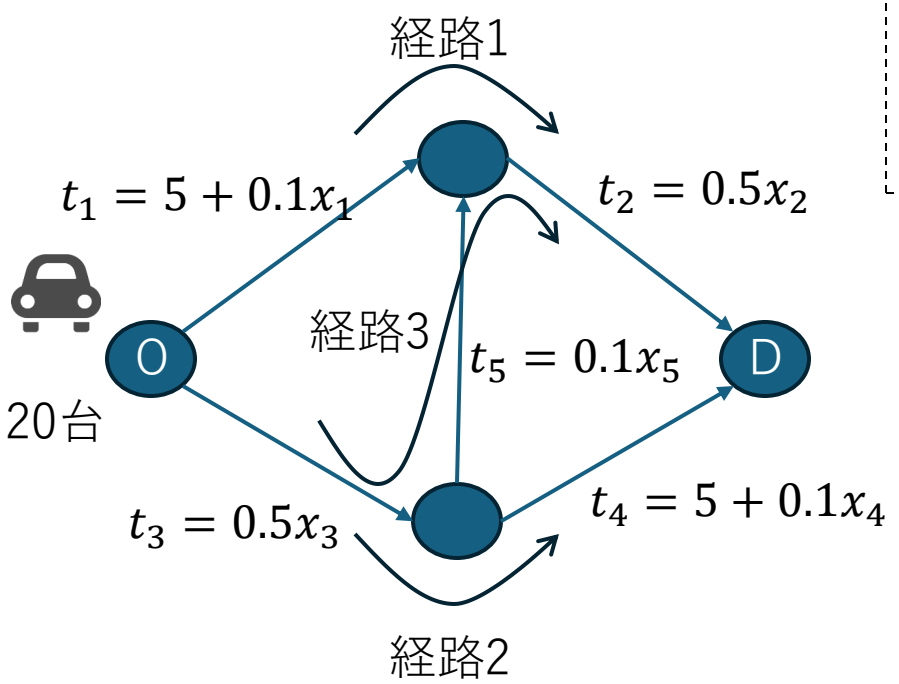
・２つの経路は対称なので,

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 10$$

・このとき，旅行時間は,

$$t_1 + t_2 = t_3 + t_4 = (5 + 0.1 \times 10) + (0.5 \times 10) = 11$$

Braessのパラドクス



Wardropの第一原則に従い配分

・２つの経路は対称なので,

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 10$$

・このとき，旅行時間は,

$$t_1 + t_2 = t_3 + t_4 = (5 + 0.1 \times 10) + (0.5 \times 10) = 11$$

いま，新道路を建設することを考える.

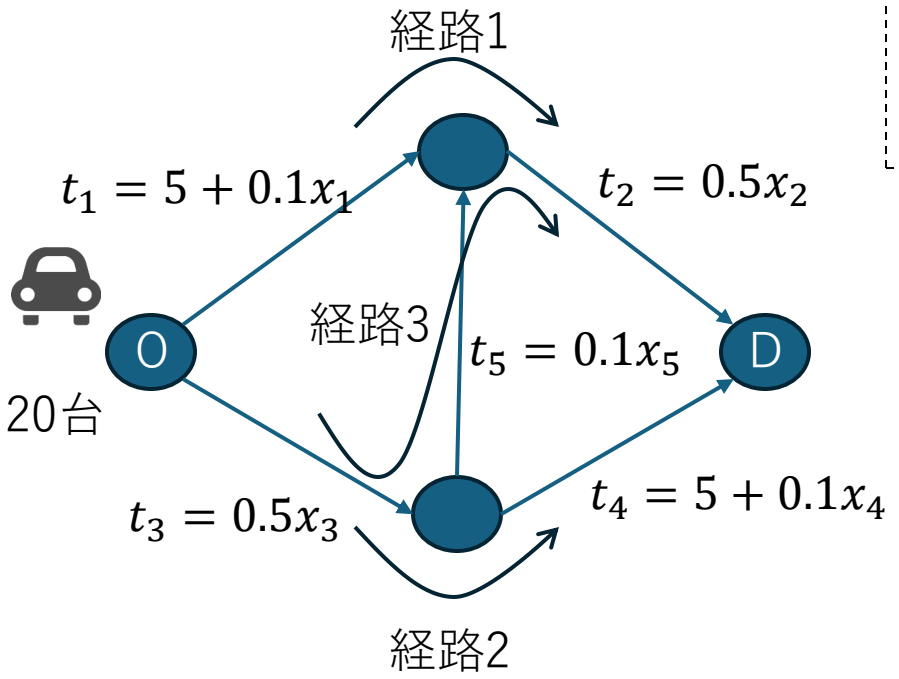
・上の配分では，経路3の旅行時間は他の経路より短い.

$$0.5 \times 10 + 0.1 \times 0 + 0.5 \times 10 = 10$$

→既存の交通量の一部が経路3に流入する.

→Wardropの第一原則と流量保存則に従い，$x_1, x_2, \cdots, x_5$の連立方程式を立てて解く.

Braessのパラドクス



Wardropの第一原則に従い配分

・２つの経路は対称なので,

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 10$$

・このとき，旅行時間は,

$$t_1 + t_2 = t_3 + t_4 = (5 + 0.1 \times 10) + (0.5 \times 10) = 11$$

いま，新道路を建設することを考える.

・上の配分では，経路3の旅行時間は他の経路より短い.

$$0.5 \times 10 + 0.1 \times 0 + 0.5 \times 10 = 10$$

→既存の交通量の一部が経路3に流入する.

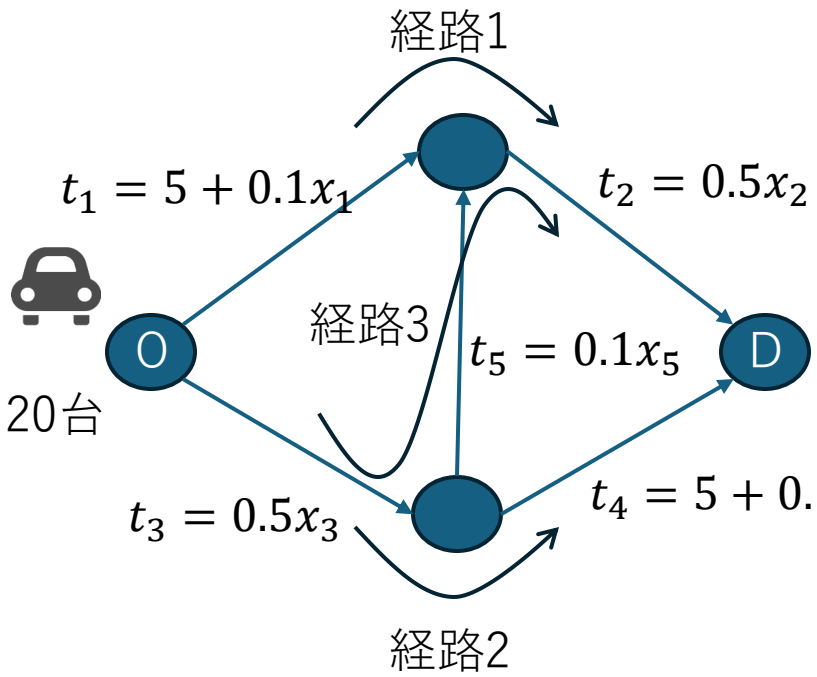
→Wardropの第一原則と流量保存則に従い，$x_1, x_2, \cdots, x_5$の連立方程式を立てて解く.

Wardropの第一原則：$(5 + 0.1x_1) + 0.5x_2 = 0.5x_3 + 5 + 0.1x_4 = 0.5x_2 + 0.5x_3 + 0.1x_5$

流量保存：$x_1 + x_3 = x_2 + x_4 = 20, x_3 = x_4 + x_5$

解くと，$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (8.75, 11.25, 11.25, 8.75, 2.5)$，旅行時間は**11.5←悪化**

Braessのパラドクス



Wardropの第一原則に従い配分

・２つの経路は対称なので,

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 10$$

・このとき，旅行時間は,

$$t_1 + t_2 = t_3 + t_4 = (5 + 0.1 \times 10) + (0.5 \times 10) = 11$$

道路建設後

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (8.75, 11.25, 11.25, 8.75, 2.5)$$

経路1,2から経路3に1.25台ずつ移動している.

仮に，元の状態から微小な交通量が経路1から経路3に移ったとすると,

$$t_1 + t_2 = \{5 + 0.1 \times (10 - \Delta)\} + (0.5 \times 10) = 11 - 0.1\Delta$$

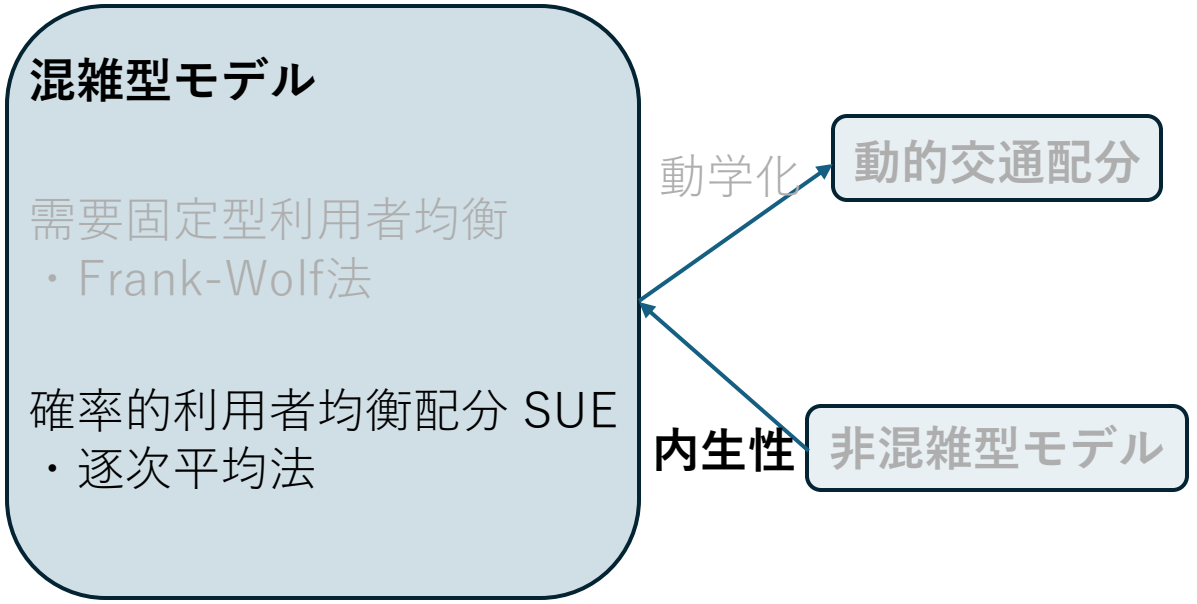
$$t_3 + t_4 = \{0.5 \times (10 + \Delta)\} + (5 + 0.1 \times 10) = 11 + 0.5\Delta$$

$$t_3 + t_5 + t_2 = \{0.5 \times (10 + \Delta)\} + (0.1\Delta) + (0.5 \times 10) = 10 + 0.6\Delta$$

→移った車の分の旅行時間は$(1 - 0.7\Delta)\Delta$減少，全体は$(3 + 0.7\Delta)\Delta$増加

・その差分は経路1,2の旅行時間の増加に起因.

・しかし，経路1,2の旅行時間の増加は経路3に移る選択で考慮されていない．**→外部性**



確率的利用者均衡配分 (SUE)

選択者の不完全さの表現

Wardropの第一原則の仮定

1. 全ての利用者は常に旅行時間を最小とするように行動する.
→気まぐれや個人の嗜好が影響するかも

2. 利用者は常に利用可能な経路についての完全な情報を得ている.
→利用者が完全な情報を得ているとは限らないし，データそのものに観測誤差が含まれているかも

ランダム効用理論による確率的な経路選択に基づく配分モデルが必要である.
→ロジットモデル，プロビットモデル

ロジットモデル：誤差項にガンベル分布を仮定
・〇選択確率が閉形式でかける（積分を含まない）ので，解析的に扱いやすい
・×I.I.A特性
プロビットモデル：誤差項に正規分布を仮定
・〇選択肢間相関を考慮可能
・×選択確率に積分を含むので，モンテカルロ法などの計算手法が必要.

逐次平均法 (MSA)

逐次平均法 (Method of Successive Averages)のアルゴリズム

Step1. 初期実行可能解の設定

交通量0における**確率的配分**（Dialアルゴリズムなど）により，初期実行可能解となるリンク交通量$\left\{x_a^{(n=1)}\right\}$を与える.

Step2. リンクコストの更新

$\left\{x_a^{(n)}\right\}$に対する所要時間$\left\{t_a(x_a^{(n)})\right\}$を計算

Step3. 降下方向ベクトルの探索

確率的配分により全交通量をリンクに負荷. $\left\{y_a^{(n)}\right\}$を求める.

Step4. 交通量の更新

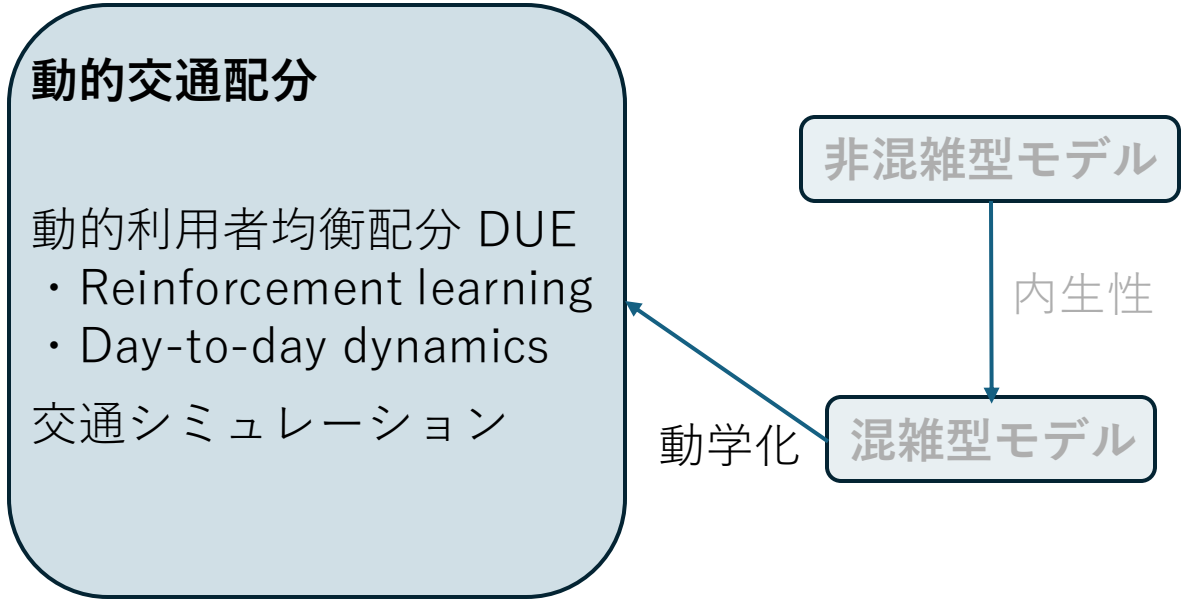
交通量の更新： $x_a^{(n+1)} = x_a^{(n)} + \frac{1}{n}\left(y_a^{(n)} - x_a^{(n)}\right)$

注）Frank-Wolf法： $\alpha^{(n)} = \min_{0\leq\alpha^{(n)}\leq 1} \sum_a \int_0^{x_a^{(n+1)}} t_a(w)dw$ MSAでは，誤差を含んだ費用が必ずしも交通量のみで書けるとは限らないため，ステップサイズを固定する.

Step5. 収束判定

・一般の確率的配分を扱えるSUEの解法
・収束が遅いなどの問題はある→SPSA，Simplicial Decompositionなど

動的交通配分 (DTA)


動的交通配分
動的利用者均衡配分 DUE
・Reinforcement learning
・Day-to-day dynamics
交通シミュレーション
非混雑型モデル
内生性
混雑型モデル
動学化

交通状態の時間発展

静的な経路選択モデルでは，均衡状態での各経路の配分交通量のみを求める．

・均衡状態に至るまでの**過程**は扱わない．

・Nash均衡では，利用者は他の利用者の行動が既知であるとして，自分にとって利得の高い戦略を取る（**合理性**）．

→動的な交通配分モデル

・過去の経験によって戦略を選択し(**限定合理性**)，それがうまくいったかによって次の戦略を選択する．

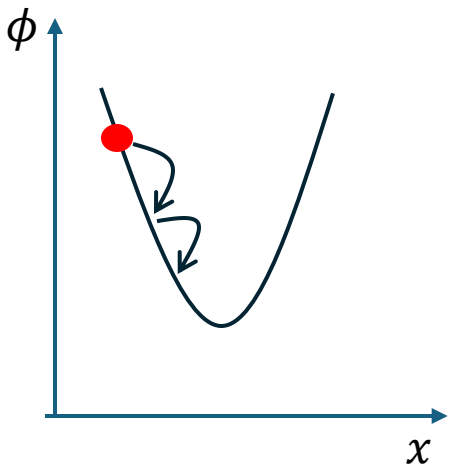
→**Day-to-day（日ごと）の配分調整過程**

・均衡に至るまでの経路や安定性を解析→必ずしも均衡状態に至るとは限らない．

ポテンシャルゲーム

ポテンシャルゲーム
・ポテンシャル関数ϕが存在するようなゲーム

ポテンシャル関数
・ポテンシャル関数は全リンクの配分量を入力にとるグローバルな関数
・**利用者一人だけが行動を変えた時の損失の変化=ポテンシャル関数ϕの変化**

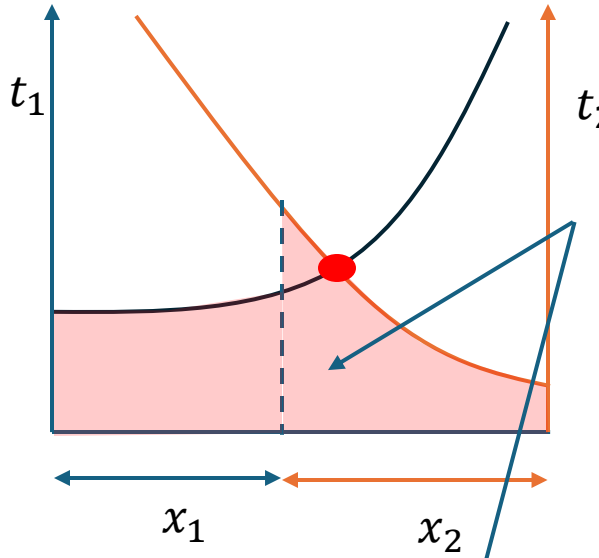


→ポテンシャルが最小
→誰か一人が行動を変えるとポテンシャルが上昇
→その一人の損失も上昇
よって，利用者は行動を変えるインセンティブを持たない．=**Nash均衡**

ポテンシャルゲームの嬉しさ：
多数の利用者の間の均衡を**関数ϕの最小化問題**として扱うことができる．
→行動の変化の性質をϕを使って解析することが可能

ポテンシャルゲームとしての均衡配分

均衡配分における目的関数



$$\sum_a \int_0^{x_a} t_a(w)dw$$

UE/FD-Primal

$$\min Z(\boldsymbol{x}) = \sum_{a\in A} \int_0^{x_a} t_a(w)dw$$

s.t.

$$\sum_{k\in K_{rs}} f_k^{rs} - q_{rs} = 0 \qquad \forall rs \in \Omega$$

$$x_a = \sum_{rs\in\Omega}\sum_{k\in K_{rs}} f_k^{rs}\delta_{a,k}^{rs} \qquad \forall a \in A$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \qquad \forall k \in K_{rs}, \forall rs \in \Omega$$

$$x_a \geq 0 \qquad \forall a \in A$$

$t_a(x_a)$: リンクaの旅行時間
x_a: リンクaの交通量
f_k^{rs}: ODペアrs間のパスkの流量
q_{rs}: ODペアrs間の分布交通量
$\delta_{a,k}^{rs}$: ODペアrs間のパスkがリンクaを含むか否か（True=1, False=0）

進化動学

1. 利用者が一人ずつ順番に経路を変更する機会が与えられる.
2. 選ばれた利用者は現時点で最もコストが小さい経路に変更する.

2経路の選択，左図のような状況では，
Case1. 選ばれた利用者が経路1を利用していた→変更なし
Case2. 選ばれた利用者が経路2を利用していた→経路1に変更

→選ばれた利用者のコストの変化は，

Case1：0，Case2： $t_1(x_1+1)-t_2(x_2)$

$\boldsymbol{\phi(x)} = \sum_a \sum_{w=0}^{x_a} \boldsymbol{t_a(w)}$とすると，
ϕの変化は，

Case1：0，Case2： $t_1(x_1+1)-t_2(x_2)$

—致

よって，**ϕは均衡配分におけるポテンシャル.**
・均衡配分はϕ最小の配分を静的に求めている.
・上の動学も最終的にはϕを最小化させるため，均衡配分の状態に収束することがわかる.

より一般的なポテンシャルゲーム

進化動学$V(x)$ (Sandholm, 2001)

交通量xについて，$\dot{x} = V(x)$

ただし，

・時間発展の解が一意に定まる→ Vはリプシッツ連続(Picard-Lindelöf theorem)

・交通量は一定→ $\sum_k V_k(x) = 0$

・交通量の変化率とポテンシャル関数は負の相関→ $V(x) \cdot \phi(x) < 0$

・ Nash均衡で配分は変化しない→ $V(x) = 0$のときxはNash均衡

例えば，Smithダイナミクス(Smith, 1984)

$$V_k(x) = -x_k \sum_{l \neq k} \max(c_k(x) - c_l(x), 0) + \sum_{l \neq k} x_l \max(c_l(x) - c_k(x), 0)$$

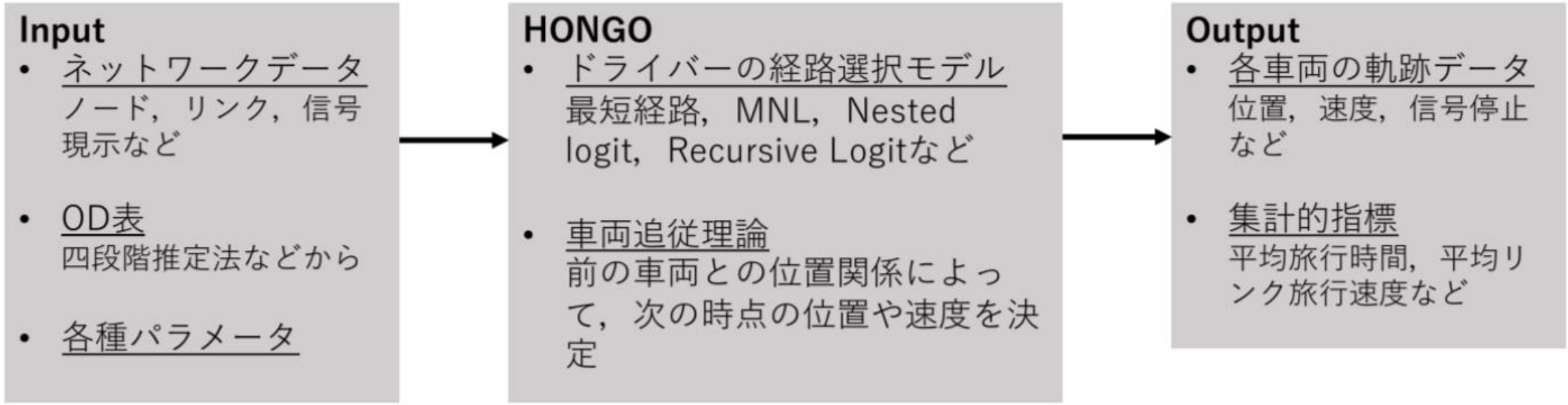
コストが小さい経路lにkから流入　コストが大きい経路lからkに流入

このとき，以下が成立.

1. Vの任意の解軌道はポテンシャルゲームのNash均衡の連結部分集合に収束する.
2. ポテンシャル関数 ϕ が狭義凸関数の時，　ϕ を最小化する点はポテンシャルゲームの唯一のNash均衡である.

交通シミュレーション

車両（エージェント）をプログラム上で発生させ，各エージェントの行動ルールをモデル化し，それらの行動の集積として交通現象を再現する．
E.g.) MATSim, SUMO, HONGO etc.

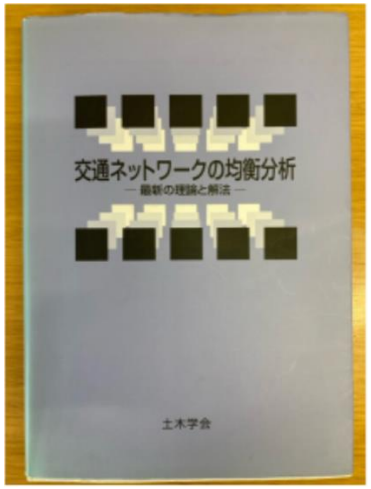


非集計な行動の表現→詳細は行動モデルの回で

まとめ

- 非混雑型モデル
  - All-or-nothing配分
  - ロジット配分→Dialのアルゴリズム
  - 吸収マルコフ過程配分→行列計算
- 混雑型モデル
  - Wardropの第一原則：利用者間のNash均衡
  - 利用者均衡配分→Frank-Wolf法
  - Braessのパラドクスによる総旅行時間の悪化
  - 確率的利用者均衡配分→逐次平均法
- 動的交通配分
  - ポテンシャルゲーム：動学の収束点やその性質が解析可能
  - 交通シミュレーション

教科書・参考文献



・土木学会. (1998). 交通ネットワークの均衡分析-最新の理論と解法
通称”青本”. 図書館や研究室の本棚にあります.
羽藤研wikiや福田研の過去のゼミ資料も参考になります.

・Sheffi, Y. (1985). Urban transportation networks (Vol. 6). Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
著者が無料公開 https://sheffi.mit.edu/book/urban-transportation-networks
2013年度Sheffiゼミ https://bin.t.u-tokyo.ac.jp/sheffi2013/

・R. B. Dial,A. (1971). probabilistic multipath traffic assignment model which obviates path enumeration. Transportation Research, 5(2), 83-111. https://doi.org/10.1016/0041-1647(71)90012-8.
・佐佐木綱. (1965). 吸収マルコフ過程による交通量配分理論. 土木学会論文集, 1965(121), 28-32. https://doi.org/10.2208/jscej1949.1965.121_28
・Frank, M., & Wolfe, P. (1956). An algorithm for quadratic programming. Naval research logistics quarterly, 3(1-2), 95-110.
・Sandholm, W. H. (2001). Potential games with continuous player sets. Journal of Economic theory, 97(1), 81-108. https://doi.org/10.1006/jeth.2000.2696

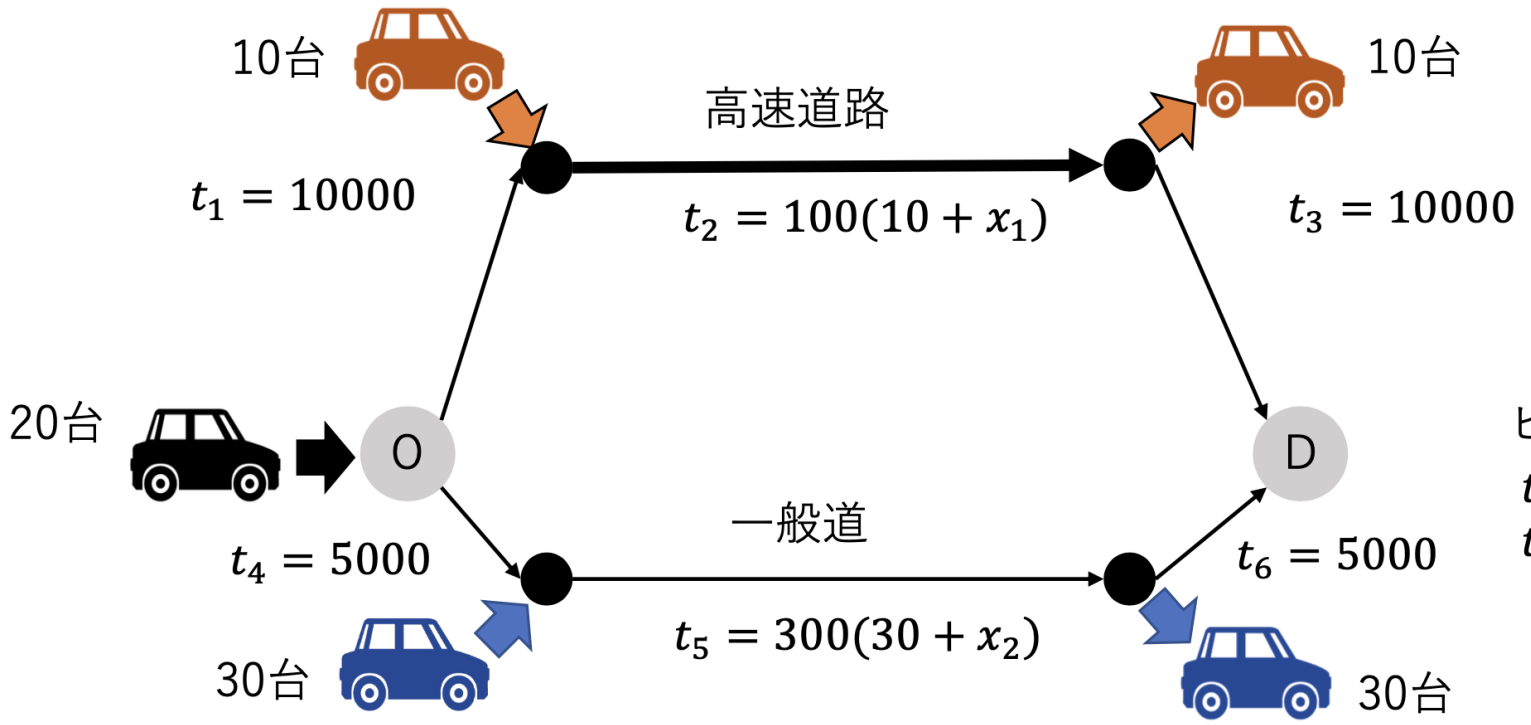
演習課題

必須課題3つ＋任意課題1つ以上

必須課題1：利用者均衡

（1）以下のネットワークにおいて，利用者均衡を求めるコードを書いてください

- Jupyter notebookにまとめたので，穴埋めをしながら回して確認してください
- Pythonの基礎動作も併記しているので，慣れていない人は使ってみてください



t: リンクコスト
x: 経路交通量

ヒント：総所要時間は，

$$t_1 \cdot x_1 + t_2 \cdot (10 + x_1) + t_3 \cdot x_1 + t_4 \cdot x_2 + t_5 \cdot (30 + x_2) + t_6 \cdot x_2$$

必須課題2：システム最適

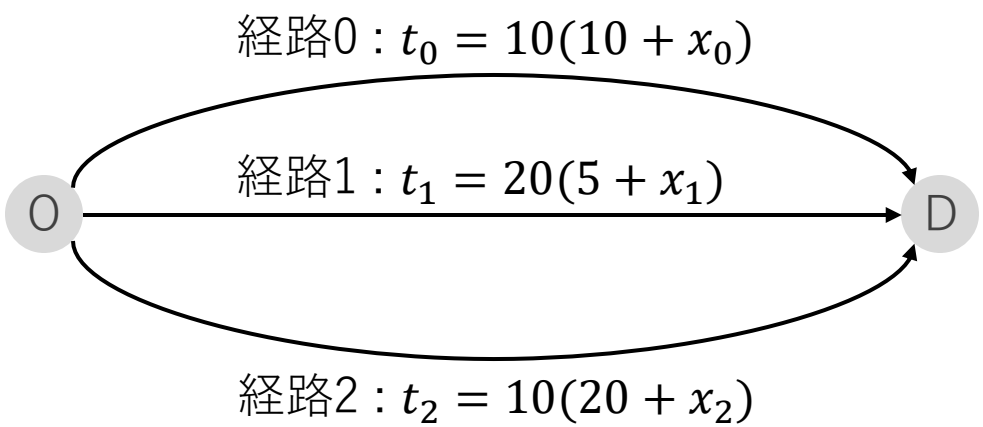
（2）（1）のネットワークにおいて，以下のことを考察してください

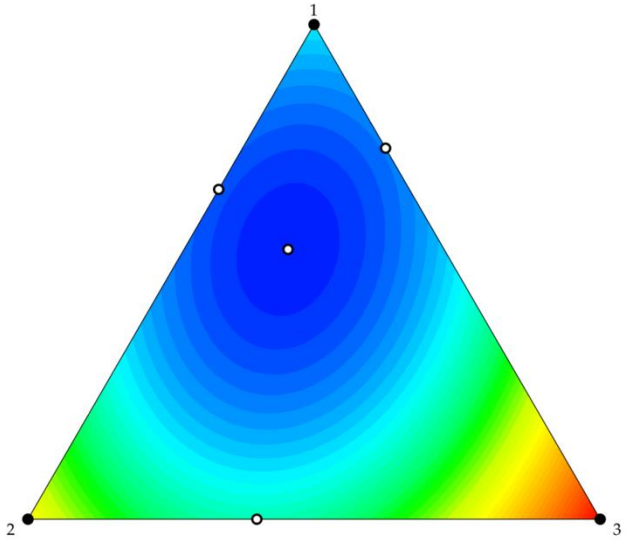
- リンク4とリンク6の所要時間を信号などの交通制御によって，$1500 \leq t_4, t_6 \leq 7500$の間で操作できるとします.
- 制御変数を$L = t_4 = t_6$とし，Lを変化させながら均衡配分を行い，Lと総所要時間（$\sum_a x_a t_a$）の関係を図示して考察してください．総所要時間を最小にするLはいくつでしょうか．（直感的には所要時間を最小値1500にするのが良さそう．．．）

必須課題3：動的配分とポテンシャルゲーム

（3）以下のネットワークにおいて，ポテンシャルゲームを実装してください．

- 各リンクに配分される交通量は離散量として扱い，自分で設定した初期状態から均衡点に達するまでの過程をp.40にある進化動学をもとに，三角図上で描画してください．
- ポテンシャル関数さえ穴埋めできれば，三角図は完成します．
- 様々な初期状態で試して図示することで，考察してください．





※3戦略のゲームは上図の三角図のように描かれることが多い（Sandholm, 2010）

任意課題1

必須課題で学んだことも参考に，実世界の都市と交通の問題を配分計算で考えてみましょう．
問題に適した簡単なネットワークを作り，均衡配分の計算をして，結果を考察してください．
静的な配分か動的な配分かは問いません．

視点

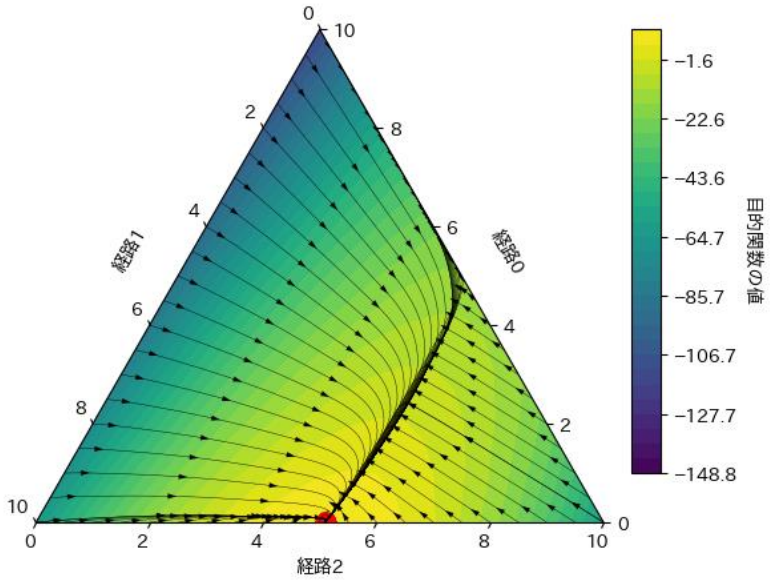
- リンクパフォーマンス関数の操作
- 実世界を想定したネットワーク設計
- 災害時の使われ方
- 進化プロトコルの変更（Sandholm (2010)の4章等参考に）による均衡点・収束速度の変化
- 利用者均衡(UE)とシステム最適(SO)

任意課題2

必須課題3の配分交通量を連続量に拡張し，それに準じた進化動学を実装してください.

（ヒント）

- 必須課題3のプロトコルは1人ずつ最適戦略に変えていくという進化動学でしたが，連続量においては勾配を求めることで均衡点に近づけることができます.
- ランダム要素がないため，必須課題3と違って矢印が一意に定まります.



※イメージ（須藤修論, 2025）

任意課題3

都市と交通にまつわる現象・人々の選択で，均衡に達しているものと，均衡状態にないものを
それぞれできるだけ多く挙げてください．

また，そのときの選択行動と，人々の間に働いている相互作用を書いてください．

（ヒント）

経路選択ゲームの序盤：均衡状態に達していない

経路選択ゲームの終盤：均衡状態に達した

（例）均衡

日々の車通勤の経路選択．選択行動：どの道路を通るか．相互作用：道路混雑

課題全般に関して

- 4/18(金)の回では1人5分程度で今回の課題の成果についてスライド形式で発表してください.
- 必須課題については，今週末に答えをドライブにあげておきます.

- 今回の課題はGoogle Colabでも動きます.
- ただ今後のためにも，自身のPCに環境を構築しておくことをお勧めします.
- ネットに方法はいろいろ転がっていますし，先輩方も教えてくれるのでわからない人は遠慮せず聞きましょう！
- 例えばhttps://zenn.dev/sion_pn/articles/d0f9e45716cabbとか参考に...