2025 理論談話会 #15 6月18日

Evolutionary implementation of optimal city size distributions

Shota Fujishima

交通・都市・国土学研究室 / Behavior in Networks Lab.
M1 薬師神晴悟 / Seigo Yakushijin

概要

- 政府が人々の選好を知らず、直接的な人口統制も行わないという現実的な制約の中で、最適な都市規模の分布を達成する政策を設計するための手法を提案する。
- 市場均衡では都市の数が過少で規模が過大になる傾向がある 。また、従来のピグー税などの政策では、非効率な均衡状態に経済が陥ってしまう可能性がある 。
- **ファーストベスト政策**と**完全予見ダイナミクス**を組み合わせることを提案し、どの初期状態からでも長期的に社会的な最適な都市規模へと導かれることを示した。
  - **ファーストベスト政策**：観測可能な情報のみを用いて政府が毎期外部性を内部化する。
  - **完全予見ダイナミクス**：人々は目先の利益のみならず将来の利益も予測して行動すると仮定する。

新規性、有用性、信頼性

新規性

- 政府が人々の選好を知らずとも現在の価格と人口分布を観測できれば実行できる政策を設計した。
- 完全予見ダイナミクスにより局所最適解ではなく大域的社会最適への収束が可能なことを示した。
- 進化的遂行により直接的な人口統制なしに望ましい状態へ誘導するプロセスを理論化した。

有用性

- 直接的な人口統制や入手不可能な個人の選好を必要としないため現実的な政策への示唆が得られる。
- 古典的な定理が示す状態を個人の選好の情報がなくとも長期的に達成し得ることを示した。

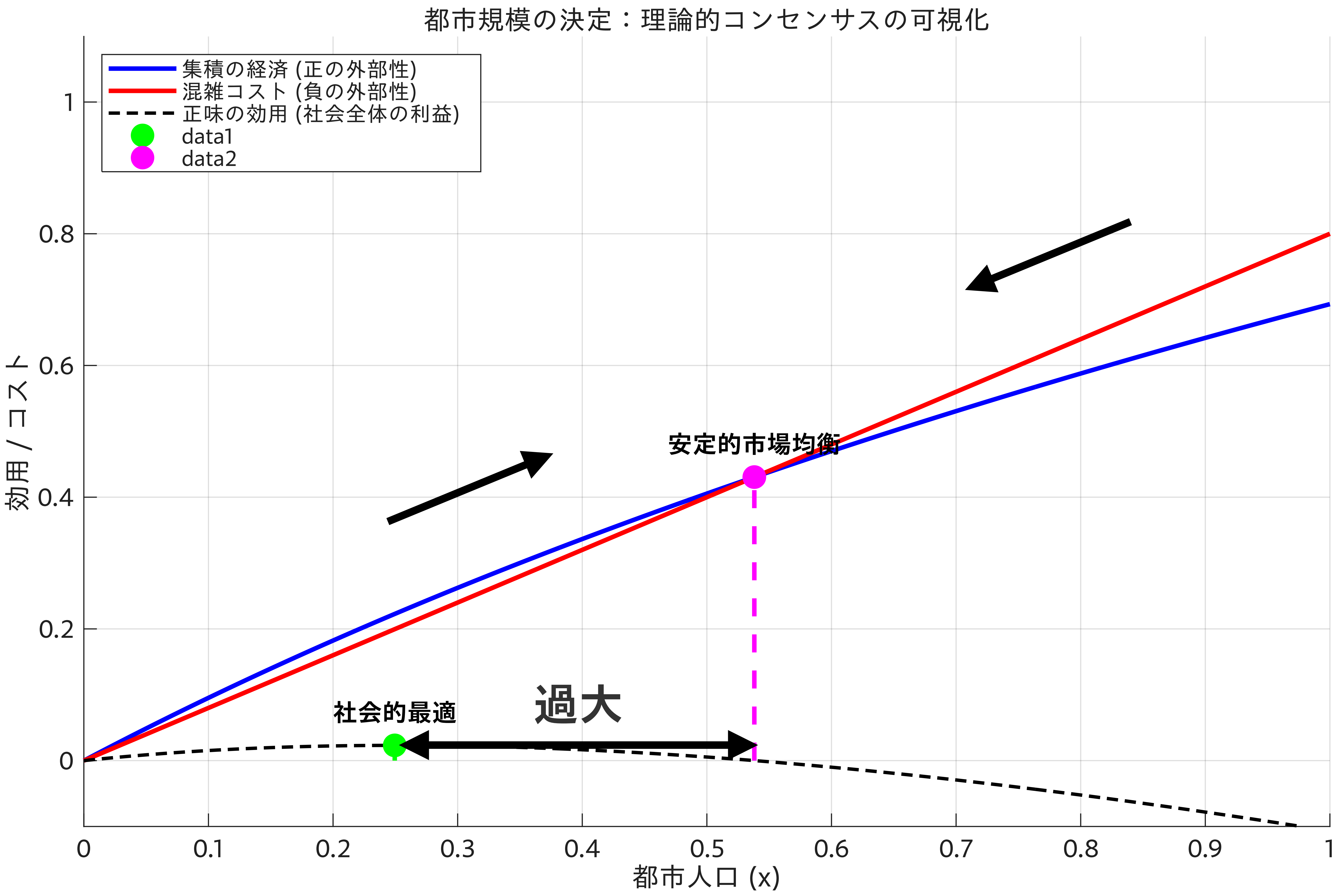
信頼性

- ポテンシャルゲームや完全予見ダイナミクスといった確立された理論の枠組みの上に構築している。

1. Introduction

1-1 研究の背景と問題意識

都市システムの理論では、**市場均衡と社会的最適状態における都市規模分布の比較**に関心がある。



住民

自らの便益を最大化しようとする。

→ 安定的市場均衡●へ

政府

社会的厚生を最大化●したい。

（集積の経済）-（混雑コスト）

安定的市場均衡●は**社会的最適**●

よりも右側にある。

→ 安定的市場均衡で**都市規模は過大**。

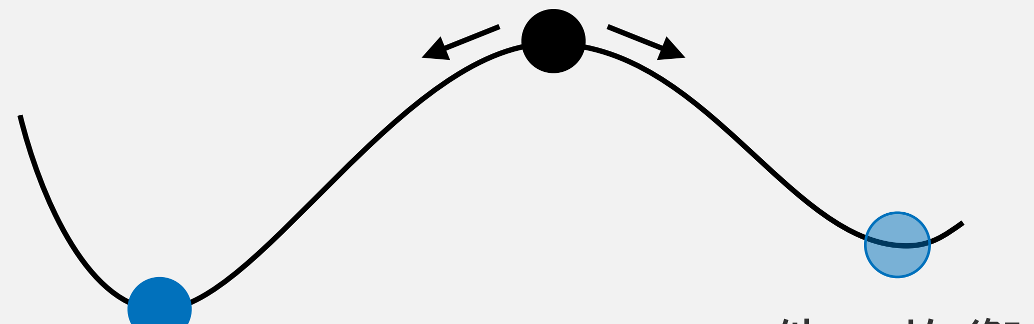
1-2 本研究が取り組む課題

市場均衡の非効率性は外部性により生じている。

→ 社会最適の実現には**外部性を内部化する**必要がある。…… **ピグー税？都市デベロッパの競争？**

ピグー税の課題 Kanemoto (1980), Hadar and Pines (2004)

1. **複数均衡**：最適でない他の均衡が生じる可能性もある。常に社会的最適を実現できるとは限らない。
2. **情報制約**：人々の選好の情報（**私的情報**）が必要である。

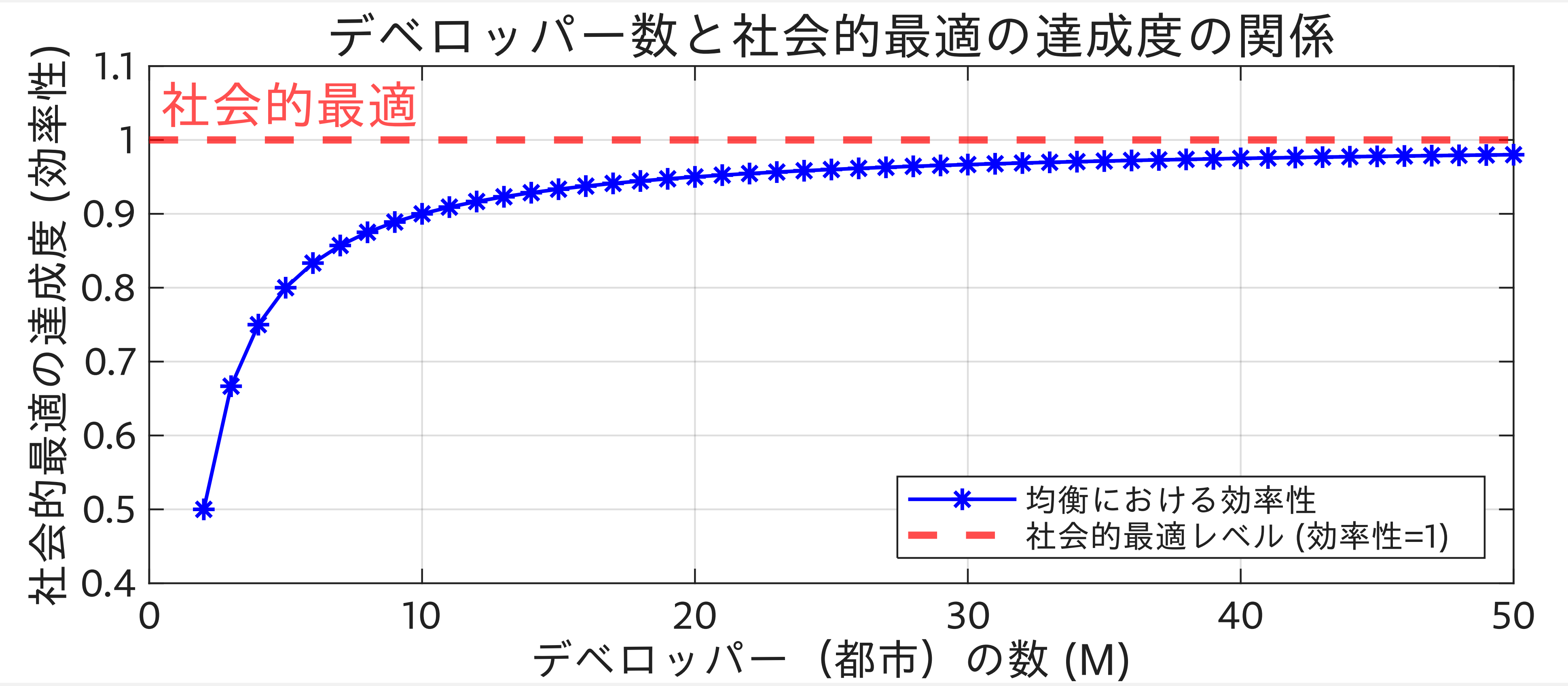


都市デベロッパの競争の課題 Helsley and Strange (1994)

- デベロッパが競争的に振る舞うには、デベロッパの数が十分に大きくないといけない。

$$c'(k^S) = n^S \frac{M-1}{M}$$

公共財の供給　**効率性の指標**



1-3 本研究のリサーチクエスチョン

Research Question

政府が

「人々の選好を知らず」 ← 人々の**効用関数**がわからなくても

「直接的な人口統制もせず」に、 ← 人々に移住を強要しなくても

経済を長期的に最適な都市規模分布へ導く ← 社会的最適でない均衡に陥ることがない

政策は設計できるか？

1-4 本研究の貢献

都市システムモデルを**ポピュレーションゲーム**として定式化し、**進化的遂行**の枠組みを都市経済モデルに適用し、2つの課題を同時に解決する政策を理論的に示した。

複数均衡・情報制約

- **ファーストベスト政策**：観測可能な情報のみを用いて政府が毎期外部性を内部化して是正する。
- **完全予見ダイナミクス**：人々は目先の利益のみならず将来の利益も予測して移住を決定する。

↓ これらを組み合わせることで……

経済はどの初期状態からでも長期的に帯域的に社会的最適な状態へと到達可能である。

2. The model

2-1 問題設定

総人口 ⋯ 測度1の連続体 $\sum_{p\in\mathcal{P}} m^p = 1$

選好によって $\bar{p}$ グループに分割

人口グループ $p=1$（質量 m^1）

人口グループ $p=2$（質量 m^2）

⋮

人口グループ $p=\bar{p}$（質量 $m^{\bar{p}}$）

$\mathcal{P} = \{1,\ldots,\bar{p}\}$

行動空間 $S = \{0, 1, 2, \ldots, K\}$

農村へ　**都市へ**

居住地選択

z_k^1　z_k^2　$z_k^{\bar{p}}$

人口状態

観測不可

居住地

農村 行動 0 （生産活動や通勤、住宅はない）

$x_0 = \sum_p z_0^p$ **集計状態** 観測可

都市 k 行動 k

総人口 $x_k + y_k = \sum_{p\in\mathcal{P}} z_k^p + \sum_{p\in\mathcal{P}} y_k^p$ **集計状態** 観測可

移動不可

CBD

生産関数 $f(x_k) = h(x_k)(x_k + y_k)$

賃金 $w_k = h(x_k)$

通勤コスト $T(x_k)$

地代 R_k **住宅の総供給** H_k

1世帯あたりの住宅・土地の広さ s_k^p

価値尺度財の消費量 c_k^p

他の都市（$1, 2, \ldots, k-1$）

※ 連続体の仮定⋯**ポピュレーションゲーム**

※ h, T は厳密な増加関数→**集積の経済、混雑外部性を表現**

2-1 問題設定｜続き

居住地

農村 最大効用 $\mathcal{U}_0^p(n) = v^p(A_r)$ ←rural の r

都市 k

総人口 $x_k + \underbrace{y_k}_{\text{移動不可}} = \sum_{p\in\mathcal{P}} z_k^p + \sum_{p\in\mathcal{P}} y_k^p$

家計の予算制約式 $\underbrace{c_k^p}_{\text{消費}} + \underbrace{T(x_k)}_{\text{通勤}} + \underbrace{R_k s_k^p}_{\text{家賃}} = \underbrace{w_k}_{\text{収入}}$

利得 $\underbrace{c_k^p}_{\text{消費}} + \underbrace{v_p(A_c)}_{\text{都市の快適さから得る効用}} + \underbrace{u^p(s_k^p)}_{\text{住宅の満足度}}$

u_p は C_1級かつ厳密凹関数

→ 限界効果の逓減を表現

居住地選択

z_k^1

z_k^2

$z_k^{\bar{p}}$

限界効用逓減の法則

$\underbrace{u^{p'}(s_k^p)}_{\text{限界効用}} = \underbrace{R_k}_{\text{地代}} \quad \forall p \in \mathcal{P}$

住宅市場の需要均衡条件

$\underbrace{\sum_{p\in\mathcal{P}} (z_k^p + y_k^p) s_k^p}_{\text{都市の住宅需要の和}} = \underbrace{H_k}_{\text{総供給}}$

→ 解 $s_k^{p^\star}$

CBD

生産関数 $f(x_k) = h(x_k)(x_k + y_k)$

賃金 $w_k = h(x_k)$

通勤コスト $T(x_k)$ 価値尺度財の消費量 c_k^p

地代 R_k 住宅の総供給 H_k

1世帯あたりの住宅・土地の広さ s_k^p

↓city の c

最大効用 $\mathcal{U}_k^p(z) = w_k - T(x_k) - R_k s_k^{p^\star} + v^p(A_c) + u^p(s_k^{p^\star})$

2-2 ポピュレーションゲーム

ポピュレーションゲーム $G = (\mathcal{U}, \theta)$

- $u^p(\cdot)$ は γ^p でパラメタライズされる。 … 具体的な関数の形（例：広い庭を好む）を表現する。
- $\theta = (v^p, \gamma^p)_{p \in \mathcal{P}}$ を**タイプ分布**と呼ぶ。 … 選好の種類を表す。
- 都市の快適さ効用を基準とした農村の相対的な快適さ効用を $v^p \equiv v^p(A_r) - v^p(A_c)$ とする。
- **政府は集計状態を観察できるが人口状態は観察できない。**
  - $h(\cdot)$ と $T(\cdot)$ は知っている。$x \in X$ と $\{R_k\}_{k \in S \setminus \{0\}}$ は観察できる。$\theta \in \Theta$ は知らない。

$G = (\mathcal{U}, \theta)$ **のナッシュ均衡** … ↓を満たす人口状態 $z^\star \in Z$

$$z_k^{p^\star} > 0 \Rightarrow k \in \arg\max_{j \in S} \mathcal{U}_j^p(z^\star) \text{ for all } k \in S \text{ and } p \in \mathcal{P}$$

どのタイプ p の人がどの都市 k に住んでいても、
その場所は彼らにとって最も高い利得を与える場所である。

2-2 ポピュレーションゲーム｜例

モデルを単純化して、ここまでのモデルの妥当性を示す。

- 様々な関数を線形に。
  - 集積の経済　$h(x_k) = \varepsilon(x_k + y_k)$
  - 混雑の外部性　$T(x_k) = t(x_k + y_k)$
  - 住宅の効用　$u(s_k) = s_k \Rightarrow R_k = u'(s_k) = 1$
- 住民は 1 タイプのみ。
- 移動できない住民はほとんどいない。$y_k \to 0$
- 農村より都市での生活を好む。

元々　$\mathcal{U}_k^p(z) = h(x_k) - T(x_k) + v^p(A_c) \underbrace{- R_k s_k^{p^\star} + u^p(s_k^{p^\star})}$

$u(s_k) = s_k$，$R_k = 1$ より打ち消される。

↓

単純化　$\mathcal{U}_k(z) = \underbrace{h(x_k) - T(x_k)} + v(A_c)$

$\psi(x_k)$ **とおく（純便益）**

2-2 ポピュレーションゲーム｜例

全ての家計が都市 $k^\star$ に立地していると仮定する（= **集積**）。

- **集積した都市 $k^\star$ の利得**　$\mathcal{U}_{k^\star}(z) = \psi(1) + v(A_c)$
- **空の都市 k の利得**　$\mathcal{U}_k(z) = \psi(p) + v(A_c)$
- **農村の利得**　$\mathcal{U}_0(z) = v(A_r)$

均衡条件　$\psi(1) + v(A_c) \geq \max\{\psi(0) + v(A_c), v(A_r)\} \;\Rightarrow\; \psi(1) \geq \max\{\psi(0), v\}$

$\psi(x_k) = (\varepsilon - t)(x_k + y_k)$

$y \approx 0$

➡

$\psi(1) \geq \max\{\psi(0), v\}$

$\psi(1) \approx \varepsilon - t$

$\psi(0) \approx 0$

$v < 0$

➡

$t \leq \varepsilon$

集積の経済が混雑外部性よりも大きければ集積がナッシュ均衡になる。

→ **集積**という典型的な事象を表現可能。

2-3 社会的最適

政府は**社会厚生関数** $\mathrm{SW}(z;\theta)$ が最大になる人口状態 $z^\star \in Z$ を実現したい。

$$
\mathrm{SW}(z;\theta) \equiv \max_{\{c_k^p\}} \sum_{p\in\mathcal{P}} \left\{ \overset{\text{農村の家計の利得}}{(z_0^p + y_0^p) v^p(A_r)} + \sum_{k\in S\setminus\{0\}} \overset{\text{都市の家計の利得}}{(z_k^p + y_k^p)\left(c_k^p + v_p(A_c) + u^p(s_k^{p^\star})\right)} \right\}
$$

$$
\text{s.t.} \quad \sum_{p\in\mathcal{P}} (z_k^p + y_k^p) c_k^p + (x_k + y_k) T(x_k) \le f(x_k) \quad \text{for } k \in S \setminus \{0\} \qquad \textbf{資源制約}
$$

$$
= \sum_{k\in S\setminus\{0\}} \underset{\textbf{生産}}{f(x_k)} - \underset{\textbf{通勤コスト}}{(x_k + y_k)T(x_k)} + \sum_{p\in\mathcal{P}} \sum_{k\in S\setminus\{0\}} \underset{\textbf{居住環境に由来する効用}}{(z_k^p + y_k^p)\left(u^p(s_k^{p^\star}) - v^p\right)} + C
$$

2-3 社会的最適

社会厚生関数 $\mathrm{SW}(z;\theta)$ の最大化を、制約条件 $z_k^p \geq 0$ と $\sum_{k\in S\setminus\{0\}} z_k^p \leq 1$ のもとで未定乗数法で解く。

人口は非負

各タイプの都市住人の合計はそのタイプの総人口を超えない

KKT条件

$$f'(x_k) - T(x_k) - (x_k + y_k)T'(x_k) + \sum_{p\in\mathcal{P}} (z_k^p + y_k^p) u^{q\prime}(s_k^{q^\star}) \frac{\partial s_k^{q^\star}}{\partial z_k^p} - v^p + u(s_k^{p^\star}) - \mu^p \leq 0$$

ラグランジュ乗数

$u^{q\prime}(s_k^q) = R_k$ と $\sum_{q\in\mathcal{P}} (z_k^q + y_k^q) s_k^q = H_k$ を用いると、

限界生産物　**混雑外部性の価値**

$$f'(x_k) - T(x_k) - (x_k + y_k)T'(x_k) - R_k s_k^{p^\star} - v^p + u(s_k^{p^\star}) - \mu^p \leq 0$$

参考　$\mathcal{U}_k^p(z) = w_k - T(x_k) - R_k s_k^{p^\star} + v^p(A_c) + u^p(s_k^{p^\star})$

労働者は賃金として限界生産物を受け取り、通勤時には混雑外部性の価値も負担しなければならない。

2-4 完全予見動学｜目的と背景

なぜ**完全予見動学**か？

- 大規模な経済において、家計がすぐにナッシュ戦略を取ることは困難。 … いつでも引っ越せるわけではない。
- 繰り返しゲームをプレイし、徐々に均衡戦略を学習していく状況を考え、その結果として得られる状態が長期的な均衡と解釈する。

2-4 完全予見動学｜立式

Matsui and Matsuyama (1995) を用いて、**将来を見越した期待（予見的期待）**を考慮した進化動学を導入する。ポピュレーションゲーム $G = (\mathcal{U}, \theta)$ を考え、家計は完全予見可能。

- **移住機会** $\lambda > 0$ のポアソン過程
  - **同じ都市に住む期間の平均** $1/\lambda$
- **割引率** $\rho > 0$
- **摩擦の度合い** $\delta \equiv \rho/\lambda$
  - **大**　現在をより重視 or 移住間隔がより長く。

将来期待利得の現在価値

$$V_k^p(t) = (\lambda + \rho) \int_0^\infty \int_t^{t+\nu} e^{-\rho(\xi - t)} \mathcal{U}_k^p(z(\xi))\, \mathrm{d}\xi\, \lambda e^{-\lambda\nu}\, \mathrm{d}\nu$$

$$= (\lambda + \rho) \int_t^\infty \underbrace{e^{-(\lambda+\rho)(\nu - t)}}_{\text{割引因子}} \underbrace{\mathcal{U}_k^p(z(\nu))}_{\text{将来の各時点での効用}}\, \mathrm{d}\nu$$

$e^{-\rho(\nu-t)}$ … せっかちさ

$e^{-\lambda(\nu-t)}$ … もうそこに住んでいないかも

最適反応の集合

$$\mathcal{B} = \left\{ \alpha \in Z \;:\; \alpha_k^p > 0 \Rightarrow k \in \arg\max_{j \in S} V_j^p(t) \right\}$$

人口移動動学 $\dot{z}(t) \in \lambda(\mathcal{B}(t) - z(t))$ … 予見的期待が入っている。

↑微分包含式
解軌道は1つに定まらない

2-4 完全予見動学｜最適反応動学との比較

将来期待利得の現在価値

$$
\begin{aligned}
V_k^p(t) &= (\lambda+\rho)\int_0^\infty \int_t^{t+\nu} e^{-\rho(\xi-t)}\mathcal{U}_k^p(z(\xi))\,\mathrm{d}\xi\,\lambda e^{-\lambda\nu}\,\mathrm{d}\nu \\
&= (\lambda+\rho)\int_t^\infty e^{-(\lambda+\rho)(\nu-t)}\mathcal{U}_k^p(z(\nu))\,\mathrm{d}\nu
\end{aligned}
$$

1. $\rho=\infty$, $\lambda=1$ とすると、$V_k^p(t) \propto \mathcal{U}_k^p(z(t))$
2. このとき、$\mathcal{B}(t)$ は現在の人口状態において、現在の効用 $\mathcal{U}_k^p(z(t))$ を最大化する行動の集合。… 最適反応戦略の集合

$$
\left.\begin{array}{ll}
\textbf{人口移動動学} & \dot{z}(t) \in \lambda(\mathcal{B}(t) - z(t)) \\
\textbf{最適反応動学} & \dot{x} = \lambda(b(x) - x)
\end{array}\right] \text{一致}
$$

→ 家計が将来を見越して行動することが最終的に辿り着く均衡の結果に影響を与える。

2-4 完全予見動学｜完全予見軌道

初期状態 $z^o \in Z$ を所与とし、ほとんどすべての $t \geq 0$ について $\dot{z}(t) = \lambda(\alpha(t) - z(t))$ が成り立つような $\alpha(t) \in \mathcal{B}(t)$ が存在するならば、$z(\cdot)$ を**解軌道**という。

- リプシッツ連続　　　… 急激に大きく変化しない。
- Z を離れることがない　… 人口がマイナスになったり総人口が変わったりしない。

→ $z^\star(\cdot)$ は**完全予見軌道**

Oyama et al. (2008)
$V_j^p(t)$ はそれぞれ連続なので、任意の初期状態 $z^o \in Z$ について完全予見軌道は存在する。

→ モデルが数学的に破綻せず、現実の経済現象を分析するための出発点として意味のある軌道を持つことを保証する。

z が微分包含式の平衡点になることと、z が G のナッシュ均衡になることは同値。

2-5 安定性分析

ポピュレーションゲーム G の均衡の、完全予見動学のもとでの安定性を分析する。

微分**包含**式 $\cdots$ 初期状態を固定しても解軌道が一意に定まるとは限らない。

→ **通常よりも弱い安定性の基準**を導入する。

基準 $A \subseteq Z$ について、

- **到達可能** $z \in Z$ を初期値とし、$A \subseteq Z$ に収束する完全予見軌道がある。
- **大域的に到達可能** $A \subseteq Z$ がすべての $z \in Z$ から到達可能である。
- **吸収的** $A \subseteq Z$ の近傍の任意の $z \in Z$ から始まるいかなる完全予見軌道も $A \subseteq Z$ に収束する。

この基準のもとで、G が**ポテンシャルゲーム**であることを用いて均衡の安定性を分析する。

2-5 安定性分析｜ポテンシャルゲームの導入

Z を少しだけ改変する。

$$\bar{Z} = \left\{ z \in \mathbb{R}_{+}^{\bar{p}(K+1)} : \forall p \in \mathcal{P}, m^p - \eta < \sum_{k \in S} z_k^p < m^p + \eta \right\}$$

$\eta > 0$ だけずらすことで開集合にして境界上で微分可能にする。

C_1 級関数 $W : \bar{Z} \to \mathbb{R}$ が存在して、

$$\frac{\partial W(z)}{\partial z_k^p} - \frac{\partial W(z)}{\partial z_\ell^q} = \mathcal{U}_k^p(z) - \mathcal{U}_\ell^q(z) \quad \text{for all } k, \ell \in S \text{ and } p, q \in \mathcal{P}$$

を満たすとき、G は**ポテンシャルゲーム**。W は**ポテンシャル関数**。

我々が考えているゲームはポテンシャルゲームなのか？→

2-5 安定性分析｜ポテンシャルゲーム

$$W(z) = \sum_{p\in\mathcal{P}} z_0^p v^p(A_r) + \sum_{k\in S\setminus\{0\}} \int_0^{x_k} (h(\nu) - T(\nu))\,\mathrm{d}\nu + \sum_{p\in\mathcal{P}} \sum_{k\in S\setminus\{0\}} (z_k^p + y_k^p) \left(u^p(s_k^{p^\star}) + v^p(A_c)\right)$$

がポテンシャル関数であるので、G はポテンシャルゲームである。実際、

$$\frac{\partial W(z)}{\partial z_0^p} = v^p(A_r) = \mathcal{U}_0^p(z)$$

$$\frac{\partial W(z)}{\partial z_k^p} = w_k - T(x_k) - R_k s_k^{p^\star} + v^p(A_c) + u_p(s_k^{p^\star}) = \mathcal{U}_k^p(z)$$

ポテンシャル関数を偏微分すると利得関数に一致する。

補題2

摩擦の度合いの閾値 $\bar{\delta} > 0$ が存在して、全ての $\delta \in (0, \bar{\delta}]$ について W の大域的最大解は**吸収的**かつ**大域的に到達可能**。

2-5 安定性分析｜ポテンシャルゲーム

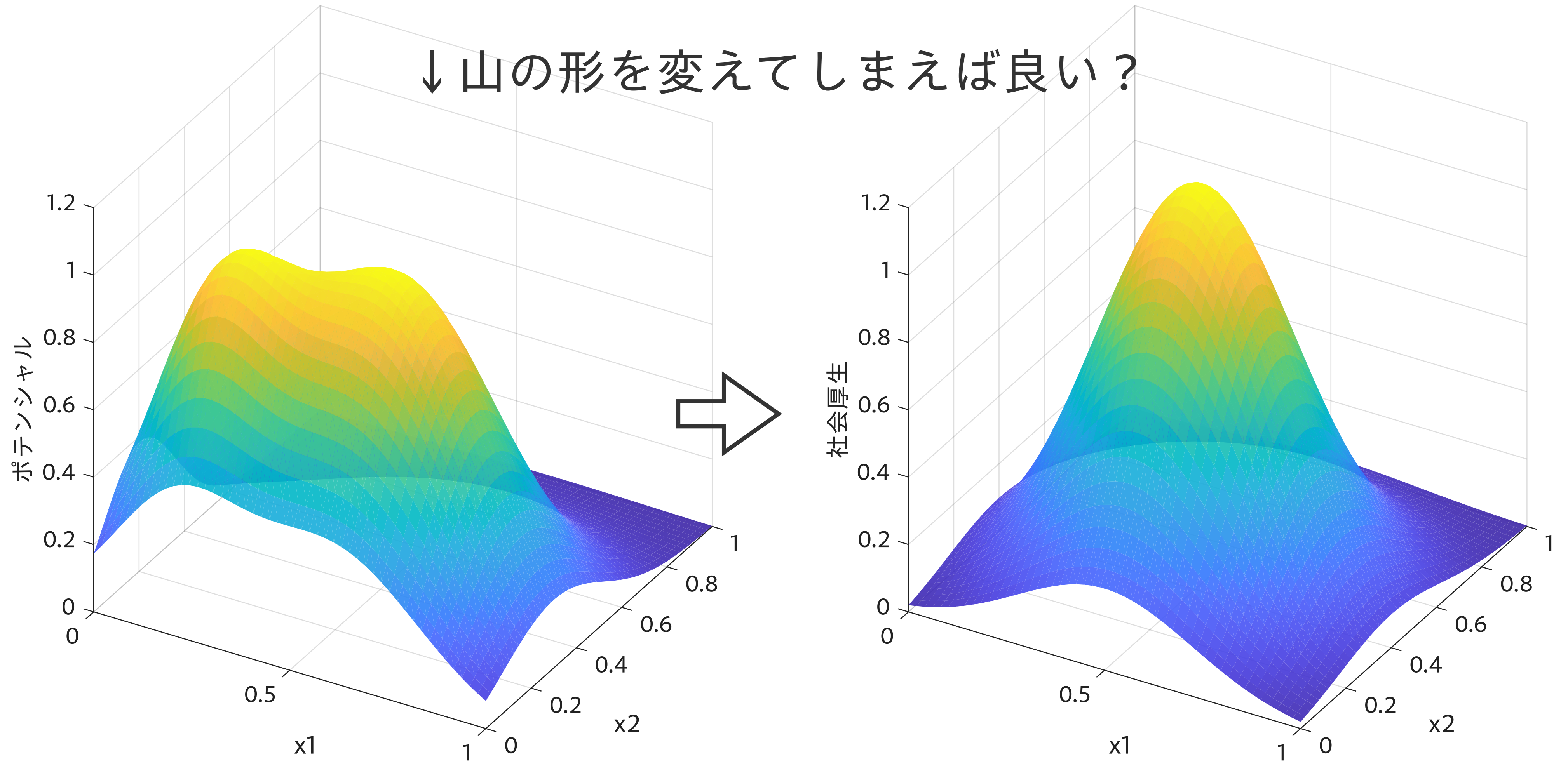
ポテンシャル関数の大域的最大解（市場均衡）は社会的最適でない。

補題2より、大域的最大解は近傍に初期値をとる完全予見軌道を全て**吸収**するので、**社会的最適の集合はゲーム G のもとでは大域的に到達可能ではない。**

社会的最適への収束を保証するために何らかの政策が必要。

政府は社会厚生関数がポテンシャル関数になるように

ゲームを変える必要があることを示唆している。



…「山」の形を変えて、政府が人々に登ってほしい「社会厚生の山」を彼らが自然と登りたくなる「ポテンシャルの山」に仕立てれば良いのでは？

3. Evolutionary implementation

3-1 ファーストベスト政策

$$w_k^\star = f'(x_k)$$
$$\tau_k^\star = (x_k + y_k)T'(x_k)$$
$$\Omega = \sum_{k\in S\setminus\{0\}} f(x_k) - w_k^\star(x_k + y_k) + \tau_k^\star(x_k + y_k) + R_k H_k$$

ある政策を導入した、ゲーム $G^\star(\mathcal{U}^\star, \theta)$ を考える。

$$\mathcal{U}_0^{p^\star}(z) = v^p(A_r) + \Omega,$$
$$\mathcal{U}_k^{p^\star}(z) = w_k^\star - T(x_k) - \tau_k^\star - R_k s_k^{p^\star} + v^p(A_c) + u^p(s_k^{p^\star}) + \Omega, \quad \text{for } k \in S \setminus \{0\}$$

ファーストベスト政策

- 企業に**限界生産物** $\{w_k^\star\}_{k\in S\setminus\{0\}}$ を賃金として支払うよう指示。 → 生産活動で赤字が生じる
- 通勤者に、**混雑税** $\{\tau_k^\star\}_{k\in S\setminus\{0\}}$ を課す。 → 混雑税と**地代**から収入を得る
- 不足分や余剰を一括交付金 or 税 Ω で調整する。

タイプ分布 $\theta \in \Theta$ を知らなくても実行可能

3-2 社会選択対応

社会選択対応 $\underset{\text{タイプ分布}}{\phi : \Theta} \rightrightarrows \underset{\text{人口状態}}{Z}$ を導入する。 … 人々の好みがこうである場合、社会的に望ましい人口分布はこうである、という対応関係。

定義1

$G^\star$ のもとで、全ての $\theta \in \Theta$ について $\phi(\theta)$ が**吸収的**かつ**大域的に到達可能**ならば、ファーストベスト政策は社会選択対応 ϕ を進化的に遂行する。

↑ファーストベスト政策が成功したとみなされる基準を定めている。

効率的社会選択対応 $\phi^\star(\theta) = \arg\max_{z \in Z} \mathrm{SW}(z;\theta)$ … それぞれのタイプについて社会厚生関数を最大化するような人口状態を割り当てる。

$G^\star$ は社会厚生関数 SW をポテンシャル関数にもつポテンシャルゲームなので、補題2より、

命題1

摩擦の度合いの閾値 $\bar{\delta} > 0$ が存在して、全ての $\delta \in (0, \bar{\delta}]$ について、ファーストベスト政策は効率的社会選択対応 $\phi^\star$ を進化的に遂行する。

3-3 効率的社会選択対応

命題1

摩擦の度合いの閾値 $\bar{\delta} > 0$ が存在して、全ての $\delta \in (0, \bar{\delta}]$ について、ファーストベスト政策は効率的社会選択対応 $\phi^\star$ を進化的に遂行する。

↓十分に予見的であれば

摩擦の度合い $\delta \equiv \rho/\lambda$ が十分に小さければ、ファーストベスト政策により

- 社会的最適の近くに初期回をとる任意の完全予見軌道は**社会的最適に吸収される。**

↓ 大域的に到達可能

- Z のどこに初期点を取ってもそこから**社会的最適に収束する完全予見軌道の存在が保証される。**

↓

政府が価格と人口分布で評価された外部性を毎期内部化すれば良い！

観測可

先読みすれば良いのはわかった。でも近視眼的ではダメなのか？→

3-4 近視眼的な進化動学

近視眼的な進化動学 $\dot{z} = g(z)$ ではファーストベスト政策を用いても長期的に最適都市規模分布が達成できるとは限らないことを示す。（完全予見動学の必要性を示す。）

ポテンシャル関数 W
ポテンシャルゲーム $G = (\mathcal{U}, \theta)$
タイプは1種類のみ $\mathcal{P} = \{1\}$

進化動学 g の条件

- LC：g はリプシッツ連続 … 人口動態の変化が連続的でジャンプしない。
- FI：Z は $\dot{z} = g(z)$ のもとで前方不変 … 解軌道が有効な範囲を逸脱しない。
- PC：$g(z) \neq 0 \Rightarrow g \cdot \mathcal{U} > 0$ → $g \cdot \mathcal{U} = \sum_{k \in S} g_k(z) \left(\mathcal{U}_k(z) - \frac{1}{K+1} \sum_{j \in S} \mathcal{U}_j(z) \right)$ … 平均より高い利得をもたらす場所の人口は増加する。
- NC：$g(z) = 0 \Rightarrow z$ は G のナッシュ均衡 … 人口動態が停止する状態はナッシュ均衡状態に一致。

これらを満たすとき、G **に許容される**という。

全ての $\theta \in \Theta$ について $G^\star$ に許容される任意の進化動学のもとで、任意の初期点 $z \in Z$ から $\phi(\theta)$ に収束するなら、ファーストベスト政策は ϕ を進化的に遂行する。

3-4 近視眼的な進化動学

補題3 Sandholm (2001)

- z が G のナッシュ均衡であることと、z が W の最大化の KKT 条件を満たすことは同値。
- G に許容される任意の進化動学の下では、Z のどこに初期点をとっても G のナッシュ均衡に収束する。
- もしナッシュ均衡が有限個ならば、W を局所的に最大にする全てのナッシュ均衡は G に許容される任意の進化動学の下で漸近的に安定になる。

- ポテンシャルゲームの均衡
- ↑のゲームに許容される進化動学の下でのそれらの均衡の安定性

→ **ポテンシャル関数を用いて分析可。**

3-4 近視眼的な進化動学｜例

- 様々な関数を線形に。
  - 集積の経済　$h(x_k) = \varepsilon(x_k + y_k)$
  - 混雑の外部性　$T(x_k) = t(x_k + y_k)$
  - 住宅の効用　$u(s_k) = s_k \Rightarrow R_k = u'(s_k) = 1$
- 住民は 1 タイプのみ。
- 移動できない住民はほとんどいない。$y_k \to 0$
- 農村より都市での生活を好む。

①完全集積　すべての住民が1つの都市 $k^\star$ に集中

$$\mathrm{d}W = \underbrace{(\psi(1) - v)}_{\text{人口の増加関数}}\,\mathrm{d}z_{k^\star} + \sum_{k \neq k^\star, 0} (\psi(0) - v)\,\mathrm{d}z_k$$

よって $t < \varepsilon$ ならば、人々は集まるほど得をする。

集積は G で許容される任意の進化動学の下で漸近的に安定。

②完全分散　住民が K 個の都市に均等に分散

$t > \varepsilon$ のとき、$\psi(x_k)$ は人口の減少関数。

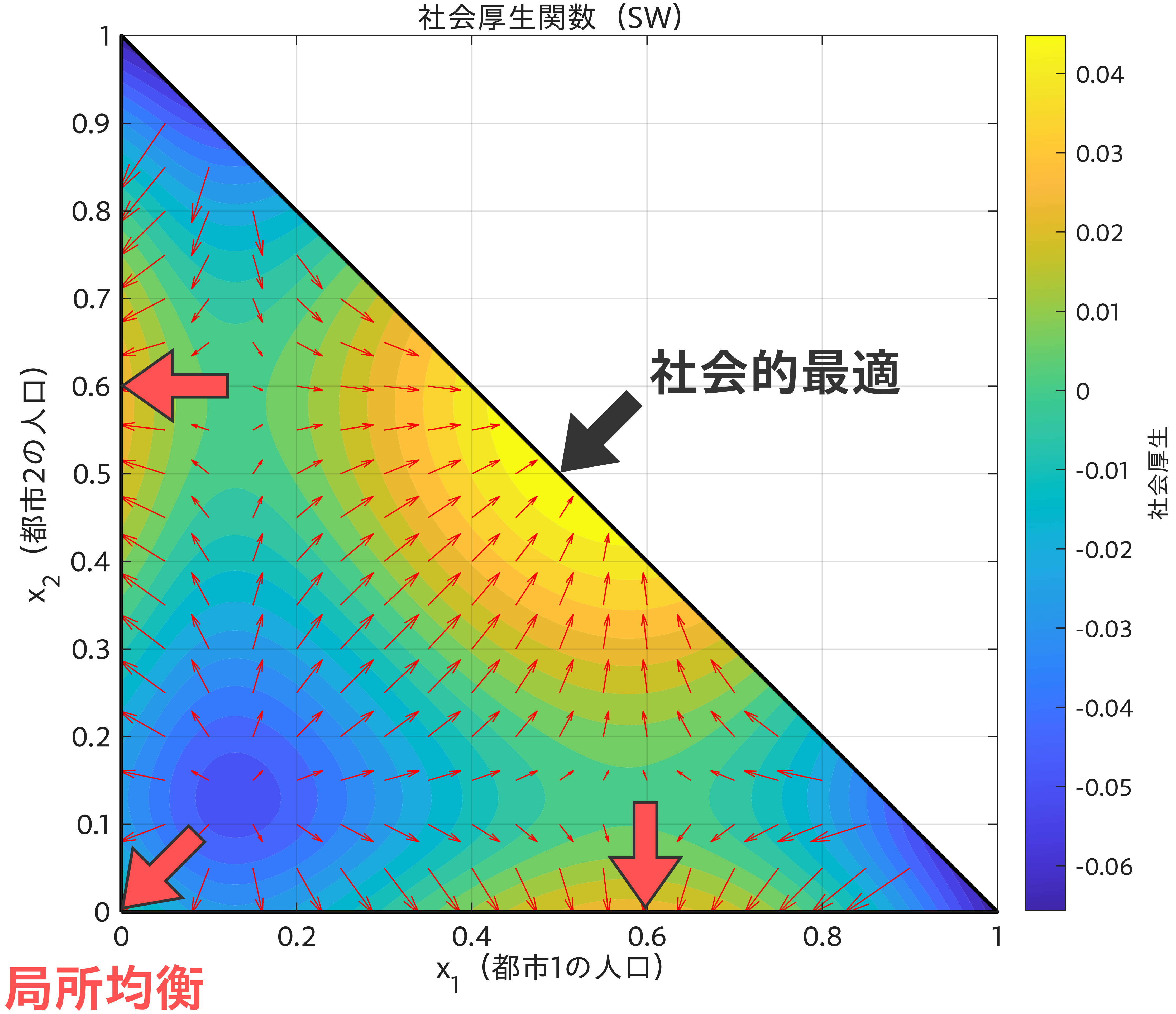
このとき W は Z において厳密凹関数。

$\varepsilon < t < \varepsilon - Kv$ のとき分散は一意に漸近的に安定となるが、$\varepsilon - (K/2)v < t$ のとき SW の最大化の KKT 条件が満たされない（**最適でない**）。

最適でない均衡も存在するということは、常に $\phi^\star(\theta)$ に収束するとは限らない。

3-4 近視眼的な進化動学｜例

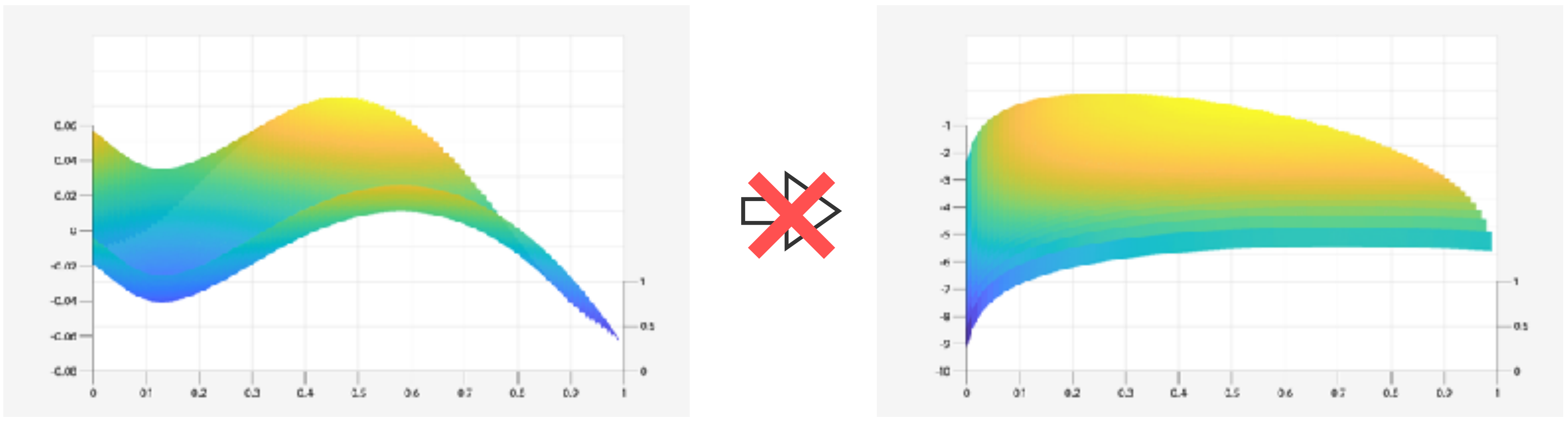
↓ファーストベスト政策では**ポテンシャル関数**と一致



局所均衡

最適でない均衡も漸近的に安定

→ **政府は進化的遂行を達成できない。**



社会厚生関数を厳密凹関数と仮定すれば良いが、

集積は現実的に重要な事象。

→ **集積が表現できないのはあまり良くないので、**

予見的に立地を調整する状況を考えた。

3-4 ヘンリー・ジョージの定理

もし都市数が最適になっているならば、各都市において限界生産物を賃金として支払ったことによる赤字は、混雑税と地代の収入の和と等しくなる。

→ 支出と収入で都市規模が最適かどうかわかる…はず。

しかし、**結局政府が人々の選好を知っている必要があるので直接使えない。**

全ての $k \in S$ について $y_k = y$, $H_k = H$

$\mathcal{P} = \{1\}$ $\quad R^\star = u'(H/(x^\star + y))$

$\tau_k^\star = (x_k + y_k)T'(x_k) \quad w_k^\star = f'(x_k)$

ただし、$x^\star$ は↓の解 … 定理が成り立つような都市規模

$$f(x^\star) - w^\star(x^\star + y) + \tau^\star(x^\star + y) + R^\star H = 0$$

観測不可

最適な都市数

観測不可

$$\begin{cases} 1/x^\star & \text{if } w^\star - T(x^\star) - \tau^\star - R^\star H/(x^\star + y) + u(H/(x^\star + y)) \geq v, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

観測不可な情報を使わずに長期的に定理が成り立つような最適な都市規模を達成できるのが提案内容の強み。

4. Conclusion

4 結論

- 直接的な人口統制や観測不可な情報を用いることなく、長期的に最適な都市規模分布を達成する政策を検討した。
  - 政府は現在の価格と人口分布で評価される外部性を毎期内部化すれば良い。
- 今回は都市間交易はなく、モノカルチャーという仮定だが、交易や複数産業を考えるとさまざまな安定均衡が生じる可能性があり、それに対する適用性は今後の研究課題である。

所感

- 図が少なく数式の展開も端折られていたので、様子がイメージできるような図の追加と数式の行間を補うことに注力した。
- ポテンシャルゲームやポピュレーションゲーム等の既存の確立した枠組みの上に、明快な理論を構築していて読んでいて割と気持ちが良かった。
  - ポテンシャルゲームを用いて（ポテンシャル関数を用いて）ゲームを分析できることに、ツールとしての強力さを感じた。
- 単純なモデルなので即座に現実に適用できるとは思わないが、発展の方向はさまざまありそう。
- 関連研究を調べていると日本人の研究者の名前が多く見られ、この分野における日本の研究グループの強さを感じた。
  - 例えば、Discrete-space agglomeration model with social interactions: Multiplicity, stability, and continuous limit of equilibria (Akamatsu et al., 2017) は離散空間における均衡の唯一性を分析。

参考文献

- **Fujishima, S. (2013). Evolutionary implementation of optimal city size distributions. Regional Science and Urban Economics, 43(2), 404–410. doi:10.1016/j.regsciurbeco.2012.10.002**
- Abdel-Rahman, H. M., & Anas, A. (2004). Chapter 52 - Theories of Systems of Cities. In J. V. Henderson & J.-F. Thisse (Eds.), Cities and Geography (pp. 2293–2339). doi:10.1016/S1574-0080(04)80009-9
- Helsley, R. W., & Strange, W. C. (1994). City formation with commitment. Regional Science and Urban Economics, 24(3), 373–390. doi:10.1016/0166-0462(93)02042-2
- Sandholm, W. H. (2001). Potential Games with Continuous Player Sets. Journal of Economic Theory, 97(1), 81–108. doi:10.1006/jeth.2000.2696
- 佐藤泰裕. (2023). 都市・地域経済学への招待状. 新版, 有斐閣,（有斐閣ストゥディア）.

令和７年　夏越の大祓・茅の輪くぐり

院試合格・修士修了 etc… を願って、今年も根津神社に茅の輪くぐりに行きましょう！

- **神事**　6 月 30 日午後 5 時社前庭上（参列ご自由）
- **茅の輪**　18 日設置予定（雨天順延）
- **形代**　授与所にて頒布中