

2025/06/05

理論談話会# 10

Improving transportation network redundancy under uncertain disruptions via retrofitting critical components

Qu, K., Fan, X., Xu, X., Hanasusanto, G. A., & Chen, A. (2025). Improving transportation network redundancy under uncertain disruptions via retrofitting critical components. *Transportation Research Part B: Methodological*, 194, 103174.

M1 村山拓未

概要

- ネットワーク冗長性の損失を最小化する改修計画としてRedundancy-oriented network retrofit problem (RNRP) を定義
- ネットワーク冗長性損失関数を線形回帰で近似し、RNRP-SPモデルとRNRP-DROモデルを構築
- 実ネットワークでの数値実験によりモデルの有用性を実証

新規性・有用性・信頼性

新規性

- 「改修による冗長性向上」という新しい視点と旅行者の利益を代表するネットワーク冗長性の考え方
- 現実的な分布的に頑健な最適化（DRO）モデルの導入とDial計数法の近似解法の開発

有用性

- 実務的な意思決定支援ツールを提供
- 多様な情報状況への対応と計算効率の向上

信頼性

- 確立された数理最適化手法による理論的裏付けと既往研究の活用
- 実ネットワークでの数値実験による検証

1. Introduction

1.1.1 Transportation network redundancy

近年の世界規模の災害による交通ネットワークの脆弱性

災害の例：地震、ハリケーン、洪水、テロ攻撃

→交通のレジリエンスが注目される

“Rs” concept

- Robustness : 頑健性
 - Redundancy : 冗長性
 - Resourcefulness : 資源活用性
 - Rapidity : 迅速性
- Pre-disaster planning
- Post-disaster planning

本研究では**“Redundancy”**に着目！

1.1.1 Transportation network redundancy

交通ネットワークの冗長性とは？

→ 交通システムが代替的な移動オプションを提供し、追加の移動需要に対応する能力

災害時のネットワーク冗長性の利点（台湾花蓮地震の例）

- 悪影響を軽減するための代替移動選択肢を提供
- 復旧計画や再設計戦略を改善する

冗長性向上のためのアプローチ

1. 新しいインフラを建設 → 効果的だが土地や予算の制約あり
2. 既存の重要な構成要素を改修 → より容易、一方でまだ研究があまり進んでいない

1.1.2 Transportation network retrofit problem

ネットワーク改修問題（NRP）

潜在的な災害や混乱が発生した場合に備えて、ネットワーク全体の性能を最大限に高めるために、どの重要な構成要素を改修すべきかを決定する問題。離散ネットワーク設計問題（DNDP）の枠組み

既存のNRP研究の課題

1. 様々な目的（投資額、維持修繕コスト、ネットワークの接続性）が考慮されてきたが、**冗長性**については十分に調査されていない
2. 災害シナリオの**不確実性**
→ 確率的計画（SP）が用いられてきたが、災害の発生確率分布に関する事前情報が必要

1.2 Objectives and contributions

研究目的

不確実な災害下で交通ネットワークの冗長性を向上させるために戦略的な意思決定をするための数理モデルの開発。

主な貢献

1. 交通ネットワーク冗長性向上のための代替アプローチ（既存インフラの改修）
2. 数理モデルの確立
 - Redundancy-oriented network retrofit problem (RNRP) を「不確実な災害下で限られた予算内で冗長性の損失を最小化する改修計画を求める問題」として定義
 - 「確率的計画（SP）モデル」と「分布的に頑健な最適化（DRO）モデル」を提案
3. 提案モデルをカナダのウィニペグの実際の交通ネットワークに適用し、有効性を実証

2. Notations and preliminaries about transportation network redundancy

2.1 Notations and explanations

Notation	Explanation
Sets	
O	The set of origins
N	The set of nodes
$A, \bar{A}$	The set of all links and candidate links to be retrofitted, whose cardinality is $ A $ and $ \bar{A} $ respectively
$\mathcal{P}$	The ambiguity set of all the possible disruption scenario distributions $\mathbb{P}$
W	The set of origin–destination (O–D) pairs, whose cardinality is $ W $
D	The underlying true disruption distribution, $D = \{\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^k, \dots, \xi^K\}$ whose corresponding probabilities are $\{p_1, p_2, \dots, p_k, \dots, p_K\}$.
G_0	The pre-disaster network topology
Variables	
$\mathbf{z}$	The retrofit decision variables, $\mathbf{z} = \{z_1, \dots, z_i, \dots, z_{ \bar{A} }\}$, where $z_i = 1$ if candidate link i is retrofitted, and $z_i = 0$ otherwise
$\mathbf{s}$	The states of links, $\mathbf{s} = \{s_1, \dots, s_i, \dots, s_{ A }\}$, where $s_i = 1$ if link i is disrupted, and $s_i = 0$ otherwise
$\mathbf{c}$	The retrofit cost of the candidate links, $\mathbf{c} = \{c_1, \dots, c_{ \bar{A} }\}$
ξ^k	The k th disruption scenario. $\xi^k = \{\xi_1^k, \dots, \xi_i^k, \dots, \xi_{ \bar{A} }^k\}$, where $\xi_i^k = 1$ if the disastrous event hits candidate link i and $\xi_i^k = 0$ otherwise
$G(\xi^k, \mathbf{z})$	The network topology under disruption scenario ξ^k and retrofit decision $\mathbf{z}$
$n_w(G)$	The number of efficient routes connecting O–D pair w under G
$R(G)$	The network-level redundancy under G
$A_F(\xi^k, \mathbf{z})$	The set of failed links under ξ^k and $\mathbf{z}$
$L(\xi^k, \mathbf{z})$	The loss of network redundancy under ξ^k and $\mathbf{z}$
$\tilde{L}(\xi^k, \mathbf{z})$	The approximation of the loss of network redundancy under ξ^k and $\mathbf{z}$
Parameters	
$\mathbf{g}$	The parameters of the linear regression model, $\mathbf{g} = \{g_1, \dots, g_{ \bar{A} }\}$
K	The number of disruption scenarios in the underlying true distribution
$\hat{K}$	The number of disruption scenarios in the empirical distribution
H	The number of historical observations of the disastrous events
B	The available retrofit budget

2.2 Preliminaries about transportation network redundancy

- 交通ネットワークの冗長性を評価する上で、本研究では「経路の多様性」に着目（もう1つの尺度はネットワーク容量）
特定のODペア間に複数の代替経路が存在

利用可能な経路の種類（数え方）

- Simple routes : 経路の途中で同じノードとリンクを繰り返さない経路
- Distinct routes : ODを結ぶ他の全ての経路とその経路を構成するリンクが重複しない経路
- Efficient routes : 効率的な経路。

本研究では “**efficient routes**” を採用！

2.2 Preliminaries about transportation network redundancy

Definition 1 (Efficient Route)

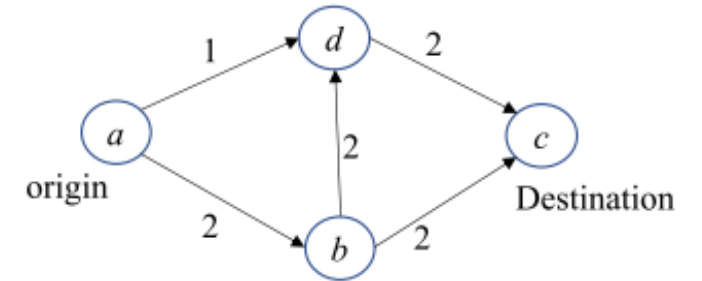
その経路を構成する全てのリンクが効率的なリンクである経路

↓
起点から遠ざかるようなリンク

例：右の図だとリンク(b, d)が効率的でないリンクなので、

経路: $a \rightarrow b \rightarrow d \rightarrow c$ は効率的な経路ではない

Network configuration



tail node ● — cost —> ● head node

Definition 2 (Network Redundancy)

$$R(G) = \sum_{w \in W} n_w(G)$$

$G = (N, A)$: ネットワークの構造

W : ODペアの集合

$n_w(G)$: 特定のODペア w における効率的な経路数

ネットワーク内のすべてのODペアに存在する効率的な経路の総数

例：右の図だと3つの経路のうち2つが効率的な経路なので、

ネットワークの冗長性は 2

2.2 Preliminaries about transportation network redundancy

Remark1 : Efficient routeを使う理由

1. 旅行者の行動の解釈が現実に近い（無駄な遠回りはない）
 - Simple routeよりも現実的、Distinct routeよりも多くの実際に使われうる経路をカバー
2. 計算が比較的容易
 - 複雑なネットワークでは Simple routes や Distinct routes を列挙して計算するのが大変

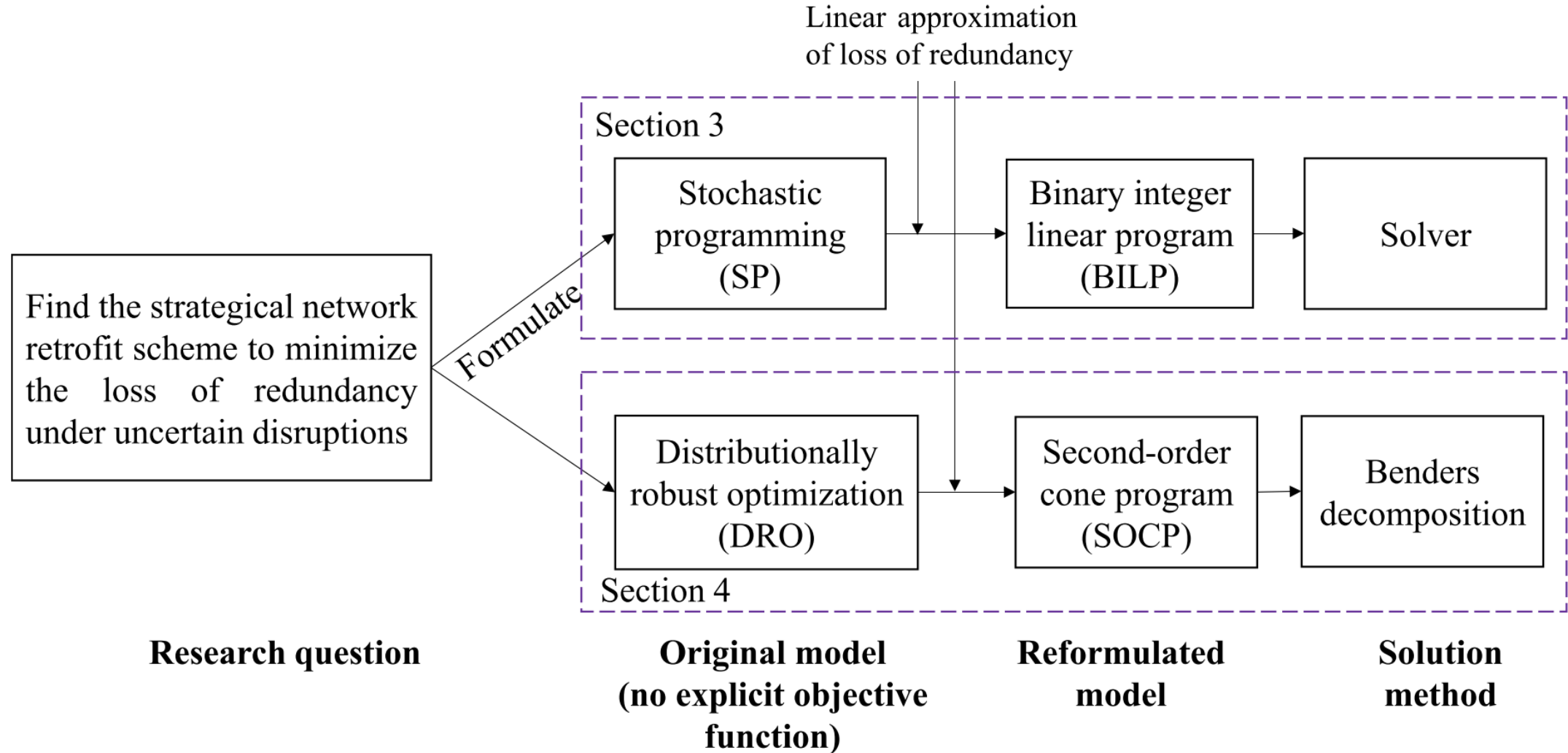
Remark2 : 効率的な経路数の計算方法

- Dial計数法 (Zhao et al., 2022) を用いる
 - 計算量は $O(|W| * |A|)$ (ODペア数 $\times$ リンク数)

Remark3 : 他の冗長性尺度への適用可能性

- ここでは効率的な経路を採用したが、提案手法は柔軟で他の尺度にも拡張して適用が可能

An overview of the methodology



3. Mathematical model 1 (RNRP-SP model)

3.1 Mathematical model 1 (RNRP-SP model)

目的

災害発生前にどのリンクを改修するかを戦略的に決定し、不確実な災害シナリオ全体を考慮した上で、予想されるネットワーク冗長性の損失を最小化

2段階確率的計画

- 第1段階（災害発生前）
 - どのリンクを改修するかを限られた予算内で決定
 - 起こりうる災害シナリオの集合と、それぞれのシナリオが発生する確率を知っていると仮定
- 第2段階（災害発生後）
 - どのリンクが機能し、どのリンクが損傷するかが決まり、災害後のネットワーク状態が確定
 - 災害後のネットワーク状態でどれだけ冗長性が失われたかが計算される

3.1 Mathematical model 1 (RNRP-SP model)

RNRP-SP model

$$F^{SP} = \min E_{\xi \in D} \{L(\xi, \mathbf{z})\}$$

$$\text{s.t. } \mathbf{z}^\top \mathbf{c} \leq B$$

$$\mathbf{z} \in \{0,1\}^{|\bar{A}|}$$

- 全ての可能な災害シナリオ ξ を考慮した上で、改修決定 $\mathbf{z}$ を行った場合のネットワーク冗長性の損失 $L(\xi, \mathbf{z})$ の期待値を最小化する問題
 - 災害シナリオが離散的で、それぞれの発生確率が p_k の時、期待値は $\sum_{k=1}^K p_k L(\xi^k, \mathbf{z})$
- $\mathbf{z}^\top \mathbf{c} \leq B$ は予算制約
 - $\mathbf{z}^\top \mathbf{c}$ (総改修費用) が総予算 B を超えてはいけない
- z_i は候補リンク集合 $\bar{A}$ の各リンク i を改修するかしないかを示すバイナリ変数

3.1 Mathematical model 1 (RNRP-SP model)

冗長性損失関数

$$L(\xi, \mathbf{z}) = \min \frac{R(G_0) - R(G(\xi, \mathbf{z}))}{R(G_0)} \quad \text{災害前と災害後のネットワーク冗長性の相対的な差}$$

$$\text{s. t. } s \in \{0, 1\}^{|A|}, A_F \in A, G \in (N, A) \quad \text{リンクの状態は0(使用可能), 1(損傷)のバイナリ}$$

$$R(G(\xi, \mathbf{z})) = \sum_{w \in W} n_w(G(\xi, \mathbf{z})) \quad \text{ネットワーク冗長性は効率的な経路の総和として計算}$$

$$s(\xi, \mathbf{z})_i = \xi_i(1 - z_i), \forall i \in A \quad \text{災害後のリンクの状態は被災および改修の有無で決まる}$$

$$A_F(\xi, \mathbf{z}) = \{i : s(\xi, \mathbf{z})_i = 1\} \quad \text{損傷したリンクの集合} (s_i = 1 \text{なら含まれる})$$

$$G(\xi, \mathbf{z}) = G_0 \setminus A_F(\xi, \mathbf{z}) \quad \text{災害後のネットワークトポロジは元のトポロジから損傷したリンクを除いたもの}$$

3.1 Mathematical model 1 (RNRP-SP model)

Remark 4 : 候補リンクの選定について

- 候補リンクを選定は事前の処理によって行うことで、計算効果や改修効率の向上に繋がる
 - 重要度分析、脆弱性分析、専門家の知識等

Remark 5 : Dial 計数法について

- 一連の逐次的な操作を行うDial計数法は明確な定式化がないので、モデル全体の定式化や解法アルゴリズムの開発において課題

3.2 Solution method for the RNRP-SP model

直接的な解法の限界

- 直感的にはタブサーチのようなメタヒューリスティック手法でRNRP-SPモデルを解くが、計算負荷が非常に大きくなる可能性
 - 候補リンクの数、ネットワークの規模、予算額等が関係
 - タブサーチでは目的関数を何度も評価する必要があり、その度に計算量の多いDial計数法を実行



- 候補リンクの状態とネットワーク冗長性損失の関係を近似することでDial計数法の繰り返し実行を回避する
- さまざまな機械学習モデル（ランダムフォレスト、NN）が利用できるが、ここでは**多変量線形回帰モデル**を使用
 - 事前調査で線形回帰モデルが機械学習モデルと同等かそれ以上の性能を示した
 - 線形モデルは単純で明示的な関数として表現でき、元の複雑な問題をBILPに変換可能
二値整数計画

3.2 Solution method for the RNRP-SP model

ネットワーク冗長性損失の線形近似

$$\tilde{L}(s) = \sum_{i=1}^{|\bar{A}|} g_i s_i + g_0$$

g_i : 候補リンクの状態 s の係数
 g_0 : 切片項

- ネットワーク冗長性の損失は、候補リンクの状態に関するアフィン関数として近似
- Dial計数法を適当な回数実行して生成された $\{L(s), s\}$ データセットを用いて、パラメータを最小二乗法で校正
 - 一度パラメータ g が校正されれば、Dial計数法を再実行せず任意の災害シナリオと改修決定に対して適用可能

さらに改修決定変数 z_i を近似式に組み込むため、 $s_i = \xi_i(1 - z_i)$ を代入

$$\tilde{L}(\xi^k, z) = \sum_{i=1}^{|\bar{A}|} g_i \xi_i^k (1 - z_i) + g_0$$

3.2 Solution method for the RNRP-SP model

Approximate RNRP-SP

$$\begin{aligned}\tilde{F}^{SP} = \min \quad & E_{\xi \in D} \{L(\xi, \mathbf{z})\} = \sum_{k=1}^K p_k \tilde{L}(\xi^k, \mathbf{z}) \\ \text{s. t.} \quad & \mathbf{z} \in \{0,1\}^{|\bar{A}|}, \\ & \tilde{L}(\xi^k, \mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{|\bar{A}|} g_i \xi_i^k (1 - z_i) + g_0 \quad \forall k \in [K], \\ & \mathbf{z}^\top \mathbf{c} \leq B\end{aligned}$$

この問題は決定変数が $|\bar{A}|$ 個のBILP（二値整数線形計画）で、目的関数がK個のアフィン関数の和
→ 元の目的関数よりも計算がはるかに楽

3.2 Solution method for the RNRP-SP model

命題1

近似RNRP-SPモデルは、0-1ナップザック問題と等価である

証明

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}^{SP} &= \min \sum_{k=1}^K p_k \tilde{L}(\xi^k, \mathbf{z}) \\
 &= \min \sum_{k=1}^K p_k \left(\sum_{i=1}^{|\bar{A}|} g_i \xi_i^k (1 - z_i) + g_0 \right) \\
 &= \min \left(\underbrace{\sum_{k=1}^K p_k \sum_{i=1}^{|\bar{A}|} g_i \xi_i^k}_{\text{定数項 (最適化に無関係)}} + \underbrace{\sum_{k=1}^K p_k g_0 - \sum_{k=1}^K p_k \sum_{i=1}^{|\bar{A}|} g_i \xi_i^k z_i}_{\text{実質的な目的関数}} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}^{SP} &= \max \sum_{i=1}^{|\bar{A}|} \left(\sum_{k=1}^K p_k g_i \xi_i^k \right) z_i \\
 \text{s.t. } &\mathbf{z} \in \{0,1\}^{|\bar{A}|} \\
 &\mathbf{z}^\top \mathbf{c} \leq B.
 \end{aligned}$$

ここで $v_i = \sum_{k=1}^K p_k g_i \xi_i^k$ とおくと、 v_i は候補リンク i を改修することによって得られる価値を示す

3.2 Solution method for the RNRP-SP model

近似RNRP-SPモデルの書き換え

$$\begin{aligned}\tilde{F}^{SP} &= \max \sum_{i=1}^{|\bar{A}|} v_i z_i \\ \text{s.t. } \quad & \mathbf{z} \in \{0,1\}^{|\bar{A}|} \\ & \mathbf{z}^\top \mathbf{c} \leq B.\end{aligned}$$

- v_i はリンク i を改修した時の防げる損失期待値（アイテムの価値）
- $\mathbf{c}$ はリンクの改修費用（アイテムを選んだ時の重さ）
- $\mathbf{z}$ はリンクを改修するかしない（アイテムをナップザックに入れるか入れないか）
- B は総予算（ナップザックの容量）

3.2 Solution method for the RNRP-SP model

Remark 7 : 提案手法の計算上の利点

- 線形回帰によってRNRP-SPモデルをBILPに近似するため、既製ソルバーや多項式アルゴリズムで容易に解ける
- パラメータ g が一度校正されれば、異なる予算 B の下での改修計画を再校正なしで求めることが可能

→ 管理者は計算しやすい方法で、様々な予算に応じた情報に基づく投資判断を下すことが可能

4. Mathematical model 2 (RNRP-DRO model)

4.1 The RNRP-DRO model and the approximate model

SPモデルは災害の発生確率分布を正確に知っているという仮定に基づく

→しかし、現実にはそのような完全な情報を得ることは困難

RNRP-DRO (Distributionally Robust Optimization) モデル

- 過去の途絶発生を記述する H 個のサンプルからなる履歴データセットが利用可能
- 曖昧集合 $\mathcal{P}$ (あり得る確率分布の集合) をデータから構築
- 曖昧集合 $\mathcal{P}$ の中で最悪ケースの確率分布が実現した場合でも、できるだけ良い結果が得られるようなロバストな改修決定を行う

4.1 The RNRD-DRO model and the approximate model

RNRD-DRO

$$\begin{aligned} F^{DRO} = \min \quad & \max_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}} E_{\mathbb{P}}\{L(\xi, \mathbf{z})\} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{z} \in \{0,1\}^{|\bar{A}|}, \\ & \mathbf{z}^\top \mathbf{c} \leq B. \end{aligned}$$

曖昧集合 $\mathcal{P}$ 中の最悪ケース $\mathbb{P}$ における冗長性損失を最小化する改修計画を見つける

近似RNRD-DROモデル

$$\begin{aligned} \tilde{F}^{DRO} = \min \quad & \max_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}} E_{\mathbb{P}}\{\tilde{L}(\xi, \mathbf{z})\} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{z} \in \{0,1\}^{|\bar{A}|}, \\ & \tilde{L}(\xi, \mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{|\bar{A}|} g_i(\xi_i(1 - z_i)) + g_0 \\ & \mathbf{z}^\top \mathbf{c} \leq B. \end{aligned}$$

冗長性損失関数 $L(\xi, \mathbf{z})$ が明示的でないため、線形近似関数 $\tilde{L}(\xi, \mathbf{z})$ を用いてRNRD-DROモデルを近似

4.2 Construction of the ambiguity set and model reformulation

DROモデルでは災害の正確な確率分布がわからない

→ 過去の災害データから得られる経験分布から特定の距離にある分布に限定し**曖昧集合**を定義

ϕ -ダイバージェンス

$$I_\phi(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{p}}) := \sum_{k=1}^K \hat{p}_k \phi\left(\frac{p_k}{\hat{p}_k}\right)$$

- p_k : 曖昧集合内の任意の確率分布におけるシナリオ k の確率
- $\hat{p}_k$: 経験分布におけるシナリオ k の確率
- $\phi(t)$: $t \geq 0$ で定義される凸関数で、 $\phi(1) = 0$ を満たす

曖昧集合 $\mathcal{P}$ の定義

$$\mathcal{P} := \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}_+^K : \mathbf{e}^\top \mathbf{p} = 1, I_\phi(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{p}}) \leq \gamma \right\}$$

全ての確率は非負でその和は1

経験分布からの ϕ -ダイバージェンスが γ 以下である
 γ は頑健性パラメータ (曖昧集合の大きさを決定)

4.2 Construction of the ambiguity set and model reformulation

定理1：有限標本保証

頑健性パラメータ γ を $\gamma = \frac{\phi''(1)}{2H} \chi_{K-1,1-\rho}^2$ と設定すると、

$Prob(\tilde{F}_H^{DRO} \geq E_{\xi \in D}\{\tilde{L}(\xi, z)\}) \geq 1 - p$ となる

DROモデルの目的値 $\tilde{F}_H^{DRO}$ が未知の真の分布下での期待損失 $E_{\xi \in D}\{\tilde{L}(\xi, z)\}$ に対して、少なくとも $1 - p$ の信頼度で上側信頼限界を与えることを近似的に保証する

※ H は履歴データのサンプル数、 $\chi_{K-1,1-\rho}^2$ は自由度 $K - 1$ のカイ二乗分布の $1 - \rho$ パーセント点

これにより、DROモデルが、サンプルデータが限られていても統計的な信頼性を持って性能を保証される（アウトオブサンプル性能の保証）

4.2 Construction of the ambiguity set and model reformulation

本研究では ϕ -ダイバージェンスとして χ^2 距離 ($\phi(t) = \frac{(t-1)^2}{t}$) を採用

曖昧集合は以下のように定義される

$$\mathcal{P} := \left\{ p \in \mathbb{R}_+^K : e^\top p = 1, \sum_{k=1}^K (p_k - \hat{p}_k)^2 / p_k \leq \gamma \right\}$$

χ^2 距離を用いる利点

- 頑健性パラメータ γ を理論的に決定したり、交差検証で調整可能
- モデルを扱いやすい二次錐計画 (SOCP) 問題に再定式化できる
- 経験分布で確率が0なシナリオに対しても、 $p_k > 0$ となることを許容する
→ 過去に観測されなかった未知のシナリオに対する頑健性が向上
 - 修正 χ^2 距離やKL距離では、 $\hat{p}_k = 0$ ならば $p_k = 0$ となる場合があり、サンプル数が少ないと真の分布を捉えられない可能性あり

4.2 Construction of the ambiguity set and model reformulation

モデルの保守性は頑健性パラメータ γ の値によって決まる

γ が極端なケース

- $\gamma = 0$ の場合
 - 曖昧集合は経験分布 p_k のみとなり、DROモデルは標本平均近似（SAA）モデルと等価
- $\gamma = \infty$ の場合
 - 曖昧集合は確率単体 $\mathcal{P} := \{p \in \mathbb{R}_+^K : e^\top p = 1\}$ に単純化され、過去のデータに依らず、考えうる全ての分布を考慮する

DROモデルはこれら2つの極端なケースの間と考えられる

4.2 Construction of the ambiguity set and model reformulation

ここで元の最適化問題の再定式化を行う

$$\tilde{F}^{DRO} = \min \max_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}} E_{\mathbb{P}} \{ \tilde{L}(\xi, \mathbf{z}) \}$$

まず内側の最大化問題についてSOCPに変形
二次錐計画

最悪ケースの期待損失を求める最大化問題

$$\max \sum_{k=1}^K p_k \tilde{L}(\xi^k, \mathbf{z})$$

$$\text{s.t. } \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}_+^K, \mathbf{e}^\top \mathbf{p} = 1, \mathbf{e}^\top \mathbf{q} \leq \gamma$$

$$\sqrt{(p_k - \hat{p}_k)^2 + \frac{1}{4} p_k^2 + q_k^2} \leq \frac{1}{2} p_k + q_k \quad \forall k \in [K].$$

二次錐制約

- 改修決定 $\mathbf{z}$ が固定された条件でどの確率分布 $\mathbf{p}$ の組み合わせが期待損失を最大化するか探索する二次錐計画（SOCP）問題
- 変数は p_k （各シナリオの確率）と q_k （二次錐計画問題に変形するための補助変数）

4.2 Construction of the ambiguity set and model reformulation

命題2

$\max_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}} E_{\mathbb{P}} \{\tilde{L}(\xi, \mathbf{z})\}$ の最適値は、その双対問題である以下のSOCP問題を解くことでも得られる

双対SOCPモデル

$$\min \quad \gamma\omega - \eta - 2\hat{\mathbf{p}}^\top \mathbf{r} + 2\omega$$

$$\text{s. t.} \quad \omega \in \mathbb{R}_+, \eta \in \mathbb{R}, \mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^K$$

$$\sqrt{(\alpha_k + \eta)^2 + 4\gamma_k^2} \leq 2\omega - \alpha_k - \eta \quad \forall k \in [K]$$

$$\alpha_k + \eta \leq \omega \quad \forall k \in [K]$$

$$\tilde{L}(\xi^k, \mathbf{z}) \leq \alpha_k \quad \forall k \in [K].$$

- ω と η はそれぞれ元の制約 $\mathbf{e}^\top \mathbf{p} = 1$ と $\mathbf{e}^\top \mathbf{q} \leq \gamma$ の双対変数
- $\mathbf{r}$ と $\boldsymbol{\alpha}$ はモデル変形のために導入された変数
cf. Hanasusanto and Kuhn (2013) のLemma A.1

内部の最大化問題が最小化問題に置き換わる

4.2 Construction of the ambiguity set and model reformulation

Approximate RNRP-DRO

$$\tilde{F}_H^{\text{DRO}} = \min \quad \gamma\omega - \eta - 2\hat{\mathbf{p}}^\top \mathbf{r} + 2\omega$$

$$\text{s.t.} \quad \omega \in \mathbb{R}_+, \eta \in \mathbb{R}, \mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^K, \mathbf{z} \in \{0,1\}^{|\bar{A}|}$$

$$\sqrt{(\alpha_k + \eta)^2 + 4\gamma_k^2} \leq 2\omega - \alpha_k - \eta \quad \forall k \in [K]$$

$$\alpha_k + \eta \leq \omega \quad \forall k \in [K]$$

$$\sum_{i=1}^{|\bar{A}|} g_i(\xi_i^k(1 - z_i)) + g_0 \leq \alpha_k \quad \forall k \in [K].$$

$$\mathbf{z}^\top \mathbf{c} \leq B.$$

先ほどの双対最小化問題と外部の最小化問題（ $\mathbf{z}$ の最適化）を組み合わせる



近似RNRP-DROモデル全体を1つの最適化問題として定式化



混合整数二次錐計画（Mixed-Binary SOCP）問題

- GurobiやMOSEK等の既製ソルバーで解ける
- 災害シナリオ数 $K = O(2^{|\bar{A}|})$ に比例して変数と制約の数が増加するため、大規模ネットワークでは計算が困難

4.3 Solution algorithm for the approximate RNRP-DRO model

Benders分解法

複雑な最適化問題を、より扱いやすい小さな問題に分割して効率的に解く

大まかに2つの問題に分ける

1. 主問題 (Master problem)

- どのリンクを改修するか z を担当
- 最初は単純化された形、反復を繰り返す中で徐々に賢くなる

2. 副問題 (Subproblem)

- 主問題での仮改修決定がなされた時に、残りの連続変数や二次錐制約を評価
- 改修計画が最適でなければ、Bendersカットというヒントを主問題にフィードバック

4.3 Solution algorithm for the approximate RNRP-DRO model

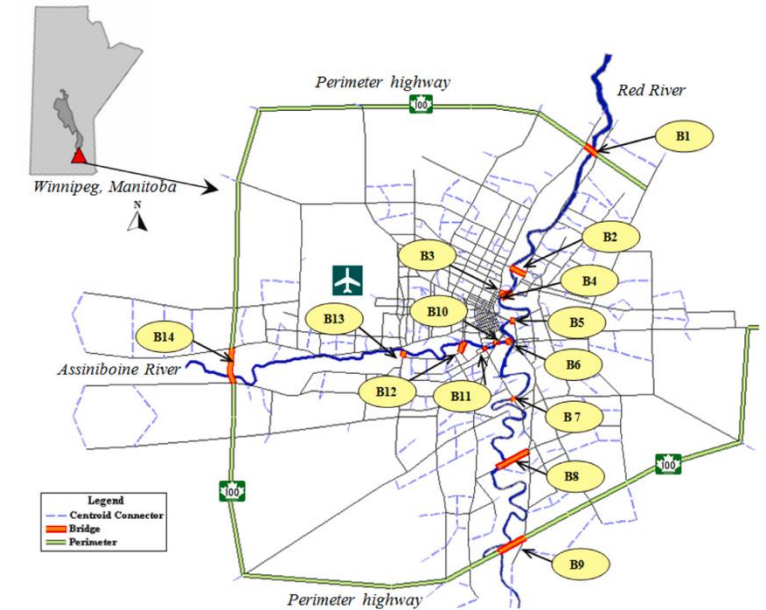
Benders分解法のアプローチ

1. 解の上限UBを非常に大きな値に設定、Bendersカットは最初空集合
2. Bendersカットを考慮して主問題を解くことで、改修計画候補 $\mathbf{z}$ と損失の期待値（下限LB）が得られる
3. 主問題で得られた改修計画 $\mathbf{z}$ を使って副問題を解き、真の期待損失 $Q(\mathbf{z})$ を得る。 $Q(\mathbf{z})$ が今までのUBより良ければ、UBを更新し現在の改修計画 $\mathbf{z}$ をこれまでの最良計画 $\mathbf{z}^*$ として記憶。（この過程で新しいBendersカットの情報も得られる）
4. UBとLBの差が設定した小さな許容誤差 ϵ 以下であれば計算を終了し、 $\mathbf{z}^*$ が最終的な解となる
5. 終了しなければ、Bendersカットの情報を主問題に追加し、これらのステップを繰り返す

5. Numerical experiments

実験の概要

- 対象ネットワーク：カナダのウィニペグ（洪水に対して脆弱）
 - ノード数：1,067（内145個が出発地と目的地）
 - リンク数：2,535
 - ODペア数：4,345
- 改修対象：市内を流れる2つの川にかかる14の主要な橋
 - 各橋の改修費用は一律で1
- 実験設定：災害シナリオに関する情報の利用可能性が異なる2つのケースを想定し、RNRP-SPモデルとRNRP-DROモデルの性能を評価
 - 災害シナリオは仮説に基づくが、現実的には経験的な脆弱性曲線などから決定できる
- 使用環境：Python 3.8とMatlab R2018aを使用



5.1.1 The experiment setting (RNRP-SP model)

RNRP-SPモデル

- 意思決定者が事前に正確に把握している8つの離散的な災害シナリオが存在することを想定
- 比較対象として用いられるタブサーチ手法はYücel et al.(2018)によるもの

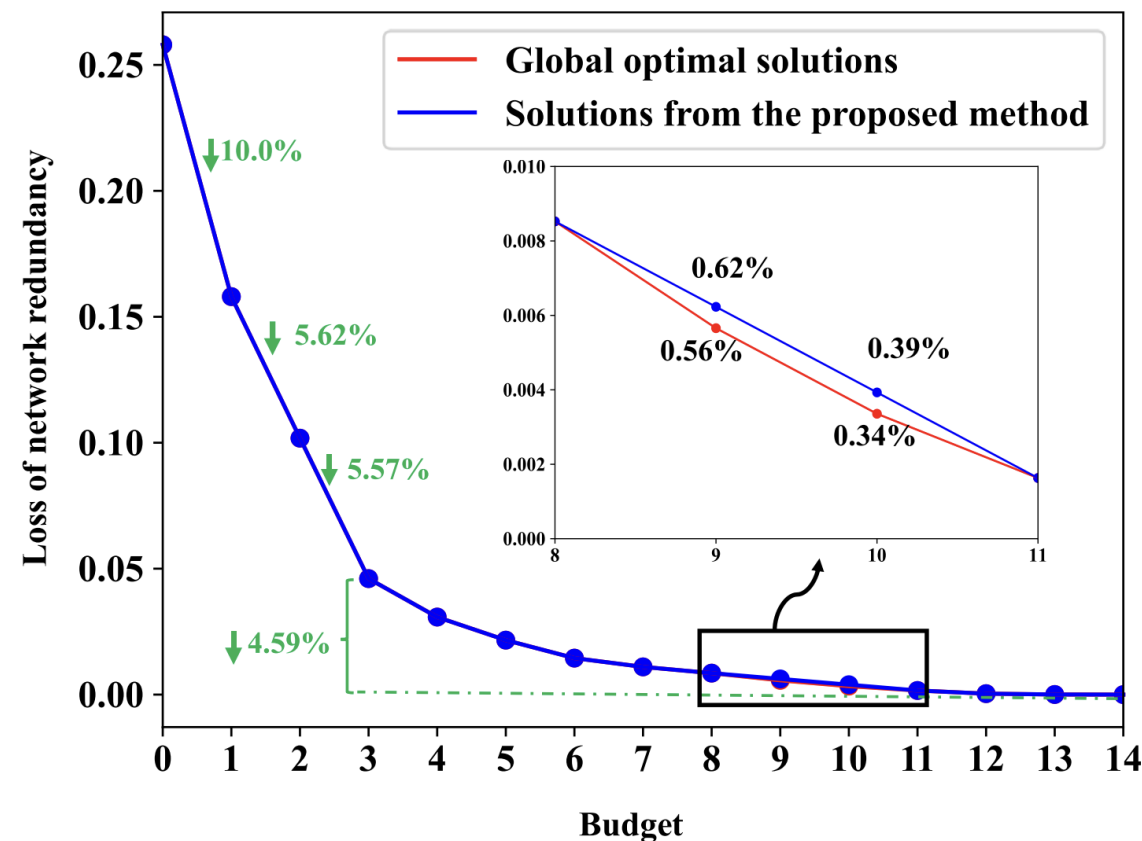
Disruption scenarios and probabilities

Bridges\Scenarios	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8
B1	0	0	0	1	1	1	1	0
B2	0	1	0	0	1	1	1	0
B3	0	1	0	0	1	1	1	0
B4	0	1	1	1	1	1	1	0
B5	0	1	0	1	1	1	1	0
B6	0	1	1	1	1	1	1	0
B7	0	1	0	0	1	0	0	0
B8	0	1	0	0	1	1	1	0
B9	0	0	0	0	1	0	1	0
B10	0	1	0	0	1	0	1	0
B11	1	1	1	1	1	1	1	0
B12	1	1	1	1	1	1	1	0
B13	0	1	0	0	1	1	1	0
B14	1	1	1	1	1	1	1	0
Probability (%)	7.6	9.3	5	8.8	3.3	4	2	60

5.1.2 The performance of the developed retrofit schemes

異なる予算下でのネットワーク冗長性改善効果

- 災害発生前の平常時のネットワーク冗長性は655,136
- 改修を何も行わず災害が発生した場合、冗長性は488,191となり平常時から25.8%の損失
- 予算1単位投資し橋を改修することで損失を10%減らすことができる
- 予算を増やしていけば損失は徐々に減少するが、その効果は逓減する
→ 3単位以下の投資が費用対効果が高い



5.1.2 The performance of the developed retrofit schemes

RNRP-SPモデルとより単純なヒューリスティック解法との比較

冗長性ランキングに基づくアプローチ

- 候補となる橋を通過する効率的な経路数が多い橋から順に予算内で改修する

比較結果

- ほとんどの予算レベルで両者が選ぶ改修計画は異なる
- RNRP-SPモデルの方が損失期待値を2.1%から最大87.9%小さく抑えることができた

→各橋が被災する確率および複数の橋が同時被災するケースを考慮していないため

様子見アプローチ

- 特定の災害シナリオが確実に起こるならどこを改修するのが最適かどうかを各シナリオについて解く

比較結果

- 予算が5単位の場合で比較
- 考慮するシナリオごとに改修計画が異なる
- しかし各様子見アプローチによる計画の期待損失はRNRP-SPモデルの2.16%を上回る

→最も発生確率が高いシナリオに合わせた改修を行うと、全体の期待損失は悪化する可能性

5.1.3 The performance of the developed approximation algorithm

近似線形冗長性損失関数の性能

検証手順

- 14個の橋の全故障パターン（16,384通り）を列挙し、それぞれの正確な冗長性損失を計算しデータセットを作成
- この中から一部のサンプルを選び線形回帰モデルのパラメータを決定
- 残りのデータサンプルを使用し、校正された近似モデルの予測精度をMSEと決定係数を用いて評価
- 具体的には校正に用いるデータサンプル数を10から12,000まで22段階で変化させ、それぞれのサンプル数で10回ずつテストを行いMSEと決定係数の平均値を取得（次ページの図を参照）

5.1.3 The performance of the developed approximation algorithm

検証結果

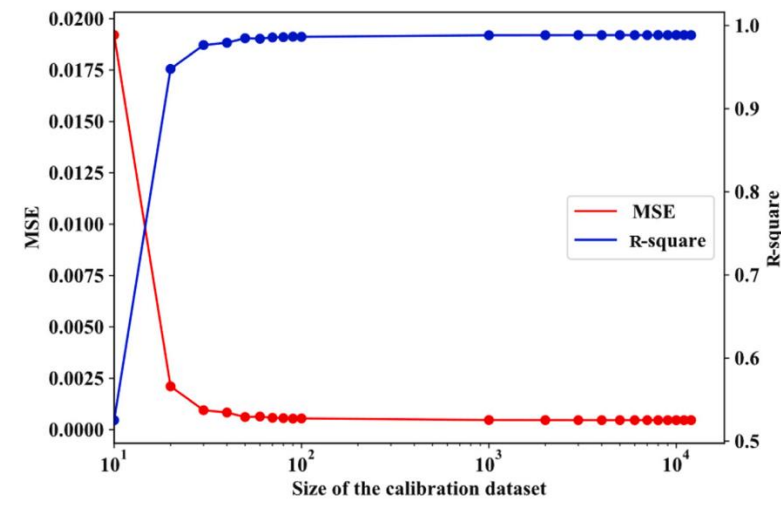
- 少ないサンプル数（全体の0.6%の100サンプル）で学習させた場合でも高い精度で冗長性損失を近似できた
- 較正データ数を増やしてもある程度以上で精度の向上は緩やかになる

他のネットワーク（Sioux-Falls, Anaheim, Barcelona, Chicago-sketch）でも検証

→ いずれも100サンプルの学習データで決定係数が0.9を超える高い精度が確認

→ 手法の一般性・適用可能性が示唆

異なるサイズの較正データセットでの線形回帰モデルの性能



異なるネットワークにおける線形回帰モデルの性能（100サンプル）

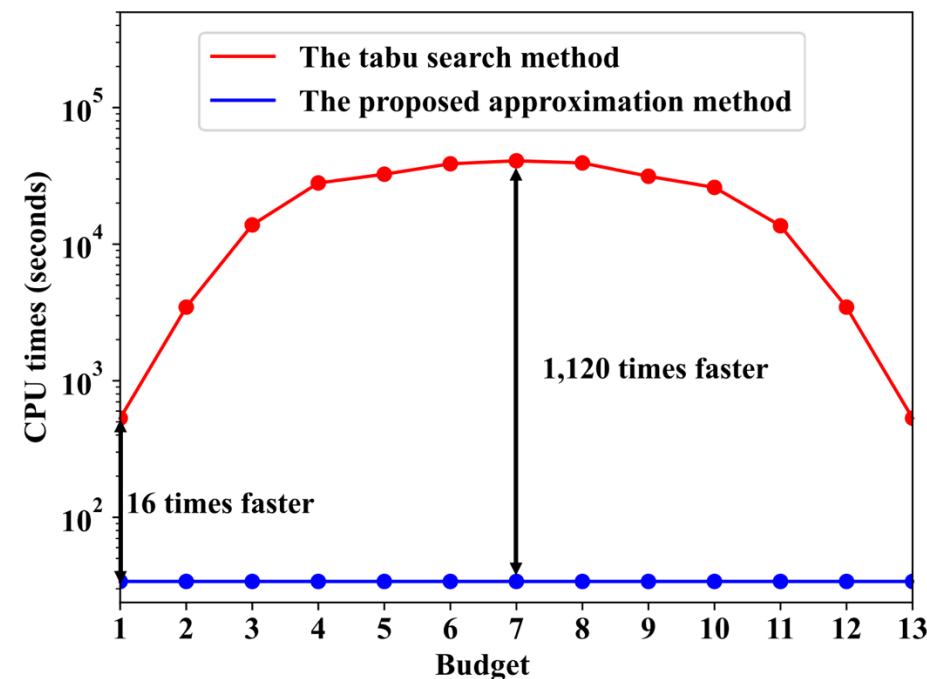
Network	#Zones	#Nodes	#Links	#O-D pairs	R-square
Sioux-Falls	24	24	76	552	0.975
Anaheim	38	914	416	1,406	0.971
Winnipeg	147	1,052	2,535	4,345	0.987
Barcelona	110	2,522	1,020	7,922	0.981
Chicago-sketch	387	2,950	933	93,135	0.906

5.1.3 The performance of the developed approximation algorithm

提案手法の計算時間 = 線形近似モデルの較正に必要な100サンプル生成時間 + BILPを解く時間
計算時間の大部分を占める ごくわずか

提案手法の計算効率をタブサーチと比較

- 提案手法の計算効率が著しく高い
 - タブサーチは最悪100万回以上のDial計数が必要だが、提案手法は近似モデル較正のための14,500回で済む
 - 一度パラメータを較正すれば、異なる予算下での改修計画を求めるときに再利用できる
→ 提案手法のグラフは平坦
- タブサーチ法は予算額によって探索空間の大きさが変化
 - 探索すべき解の組み合わせはB=7で最大
→ タブサーチのグラフは放物線



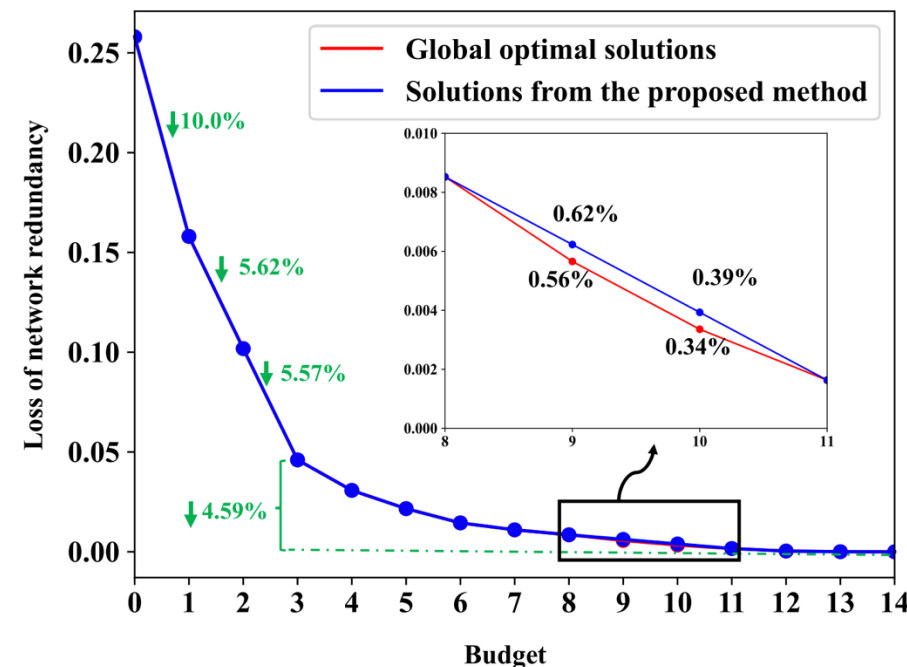
5.1.3 The performance of the developed approximation algorithm

提案手法の解の質

提案手法で得られた改修計画の質を検証するために、予算額が1から14までの各ケースでの
グローバル最適解と比較

全ての可能な改修計画を列挙し、それぞれの期待冗長性損失を計算し
最も良いものを選ぶ（計算量が膨大）

- 提案手法で得られた解は予算額9と10を除き
グローバル最適解と一致
 - 予算9と10のときも2番目に良い結果と一致
- 提案手法は質の高い解を求めることができる



5.2.1 The experiment setting (RNRP-DRO model)

RNRP-DROモデル

意思決定者は将来起こる災害の正確な分布を知らない代わりに、過去の橋の状態に関する限られた履歴データのみ利用可能

災害発生モデル

- 各橋における破壊はベルヌーイ分布に従って発生する
 - ベルヌーイ分布のパラメータ（各橋が被災する確率）は一様分布に従って決定
- 履歴観測データのサンプリングのために2種類の真の災害シナリオ分布を考慮（NORTA法 (Ghosh and Henderson, 2003) を用いて生成)
 1. 独立発生：各橋での破壊は互いに独立で発生
 2. 相関発生：各橋での破壊は互いに相関し、橋間の距離が近いほど相関は強い

5.2.1 The experiment setting (RNRP-DRO model)

頑健性パラメータ γ の決定

- γ の値を定理1に従って理論的に設定すると、過度に保守的な解になる可能性
- 代わりにテストセットで最良の結果が得られるように2分割交差検証で γ を決定

性能評価の公平性

- 解の性能評価はアウトオブサンプルの冗長性損失を用いて行う
- アウトオブサンプルの冗長性損失は正確なDial計数法によって得られた冗長性損失で評価
- 提案モデルの性能は、標本平均近似（SAA）アプローチと比較

5.2.2 The out-of-sample performance of the RNRP-DRO model

- RNRP-DROモデルが未知のデータに対してどれだけ良い性能を発揮するかを**SAAモデル**と比較しながら評価
- その際、**履歴データセットのサイズ**と**予算**という2つの主要なパラメータを変化させる

標本平均近似 (SAA) モデル

$$\begin{aligned}\tilde{F}^{\text{SAA}} = & \min \quad \sum_{k=1}^{\hat{K}} \sum_{i=1}^{|\bar{A}|} \hat{p}_k \left(\hat{\xi}_i^k (1 - z_i) g_i + g_0 \right) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{z} \in \{0, 1\}^{|\bar{A}|} \\ & \mathbf{z}^\top \mathbf{c} \leq B.\end{aligned}$$

- 真の破壊分布を経験分布で置き換える
 - $\gamma = 0$ のときと同じ
- 真の分布が未知の場合にSPモデルの近似解を与える一般的なデータ駆動アプローチ

5.2.2 The out-of-sample performance of the RNRP-DRO model

履歴データセットのサイズの影響

独立したインサンプルの訓練データ数を $H = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128$ と変化させ、10万件のテストサンプルを用いて両モデルの性能を評価（予算 $B = 8$ で固定）

インサンプルデータサイズ変動によるアウトオブサンプル性能の変化

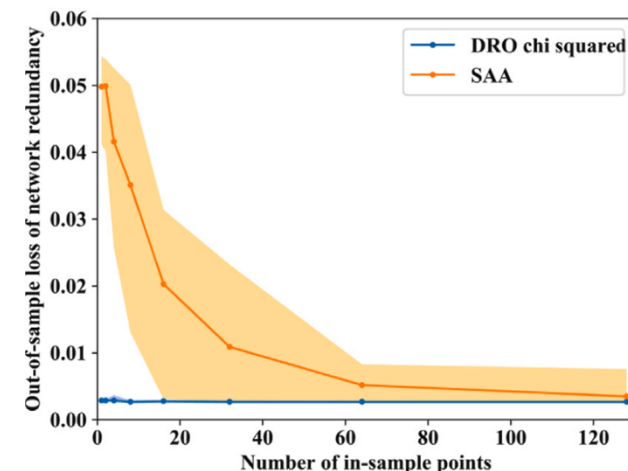
※ 影部分は20回の試行にわたるアウトオブサンプル冗長性損失の10%から90%の分位範囲

結果

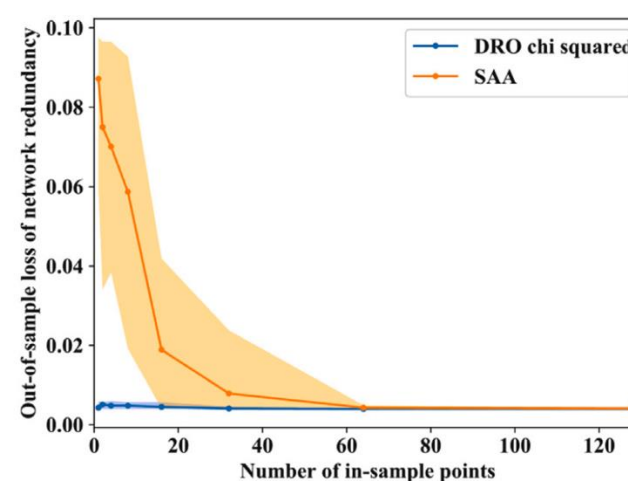
- DROモデルの解はインサンプルデータ数が限られている場合に両方の災害分布下でSAAモデルの解より優れている
- DROモデルの影付き領域はSAAモデルよりも小さく、頑健性が示された

→ DROモデルの観測外のシナリオ予測とデータが少ないときのSAAモデルの過学習を防ぐ能力による

災害が独立発生



災害が相関発生



5.2.2 The out-of-sample performance of the RNRP-DRO model

予算の影響

予算を $B = 0, \dots, 14$ で変化させ、 $H = 16$ の訓練サンプルと10万件のテストサンプルを用いて両モデルの性能を評価

予算変動にによるアウトオブサンプル性能の変化

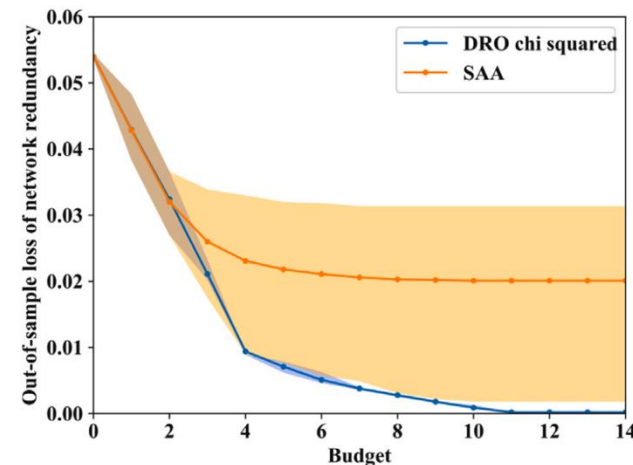
※ 影部分は20回の試行にわたるアウトオブサンプル冗長性損失の10%から90%の分位範囲

結果

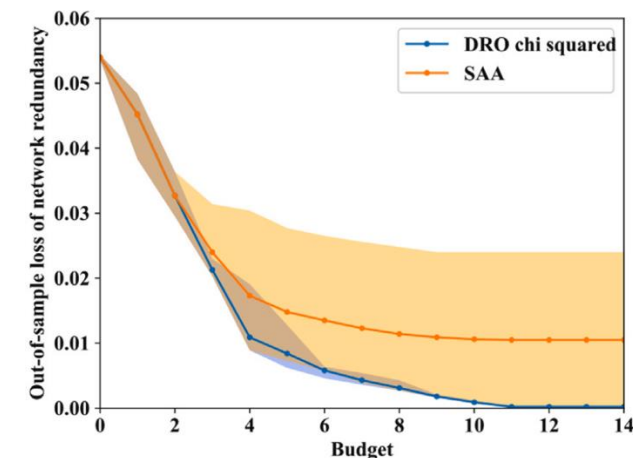
- DROモデルの解は様々な予算下で両方の分布においてSAAモデルよりも優れており、影領域の狭いためより頑健性が高い
- 2モデルのアウトオブサンプル性能の差は予算が増加するにつれ大きい傾向

→ サンプル数が限られる時、SAAモデルでは観測された災害シナリオに対して最適化するため、予算が完全に活用されていない可能性あり

災害が独立発生



災害が相関発生



5.2.3 The computational efficiency of the Benders decomposition algorithm

Benders分解アルゴリズム（DRO-Benders）の計算効率

DRO-Bendersと近似DROモデルをソルバーで解く場合のCPU時間を比較

異なるインサンプルデータサイズでの平均計算時間の比較

N	1	2	4	8	16	32	64	128
DRO	2.71	3.09	4.64	10.24	32.17	44.74	49.74	52.19
DRO-Benders	0.90	0.91	0.94	0.95	1.02	1.03	1.03	1.06

※ 異なる分布が計算時間に与える影響は小さいため、相関災害分布下でのCPU時間を計算

※ ソルバーで直接解く場合の計算時間は、入力サンプルにより大きく異なるため、100回の試行の平均をとる

結果

- DRO-Bendersの方が計算時間が短く、その傾向はサンプルサイズが増加するほど顕著
- 実験ではDRO-Bendersは常に最適解に収束
→ 最適性（Benders）カットの有効性を示す

6. Concluding remarks and future research

Concluding remarks

- 研究背景と目的：交通網の「冗長性」向上は災害時の代替路確保に不可欠
→ 限られた予算内で既存インフラの「改修」により冗長性を高める戦略決定支援モデルの開発
- 開発モデル：不確実な災害下で冗長性損失を最小化するSPモデルとDROモデル
 - それぞれが災害情報の完全/部分的な既知に対応
 - 冗長性損失を線形回帰で近似し、その性能を検証
 - 近似によりSPモデルをBILP、DROモデルをSOCPに変換し、計算負荷を軽減
- 数値実験（ウィニペグネットワーク）
 - 小額の改修投資でも冗長性が大幅向上 & 限界効果の逓減を確認
 - 提案RNRP-SPモデルはヒューリスティック手法よりも高性能
 - RNRP-DROモデルは情報が不完全な場合にSAAモデルより頑健な結果を示した
 - 線形回帰による近似は高精度であり、解法アルゴリズムは効率的かつ高品質な解を生成

Concluding remarks

- 実用的な意義
 - 既存のレジリエンス計画に「冗長性改善」の視点を導入
 - SPモデルとDROモデルは多様なデータ環境に対応。特にDROモデルはデータが限定される地域において有効
 - トポロジー指標である冗長性は、既存の交通計画ツールで用いられる均衡配分の計算負荷を回避し、効率的な近似解法が大規模適用を促進
 - 新しいインフラの建設だけでなく、既存の交通インフラのネットワーク冗長性を改善することで、レジリエントな都市の建設を促進する可能性

Future research

1. リンク追加と改修の統合：新設と改修の長所を組み合わせ、より高い冗長性を目指す
2. 多様な改修レベルと容量の考慮：複数レベルの改修や交通容量を考慮した冗長性定義の導入
3. O-D需要の考慮：O-D需要に基づき冗長性評価を拡張し、計画を改善
4. ライフサイクル全体のレジリエンス：災害前後の改修と復旧を統合し、ライフサイクル全体でレジリエンスを最適化（例えば予算内で改修と復旧の両戦略のトレードオフを考える）
5. 移行期機能損失の考慮：期間ベースの指標で、災害後の段階的な機能低下を評価
6. 実データでの検証深化：仮説データではなく、実際の災害・コストデータでモデルの洞察を深める
7. リンク状態のバイナリ仮定の緩和：リンクの部分的な機能低下を許容し、より現実的なモデルを目指す（計算効率とのバランス注意）

所感

- 14ページのOverviewにあるように元のモデルがあり、それを変形して、効率的な解法で解くという流れがわかりやすかった
- モデルの定式化から変形のところは途中数式を追うのが長くて大変
- 現実の複雑な問題をなるべくシンプルにモデル化しつつ、どこまで精度良くやれるかのトレードオフ
 - Future research で述べられていたようなこと（例えばリンクの新設と改修を統合する、リンクの部分的な機能低下を許容するなど）をどこまで再現したら、より良い解が得られるかの見極めが大切

参考文献

- Qu, K., Fan, X., Xu, X., Hanasusanto, G. A., & Chen, A. (2025). Improving transportation network redundancy under uncertain disruptions via retrofitting critical components. *Transportation Research Part B: Methodological*, 194, 103174.
- Qiita. CVXOPTを用いた2次錐計画問題(SOCP)へのアプローチ. 2017-07-09.
<https://qiita.com/infhyroyage/items/039a264d206adb63bf63> (2025-06-04閲覧)