

第24回 行動モデル夏の学校

行動モデルの応用：推定の高度化

東京理科大学 創域理工学部 社会基盤工学科

柳沼 秀樹

yaginuma@rs.tus.ac.jp

行動モデル構築の流れ

離散選択モデル構築の流れ

1. コンセプトの設定

- 対象の明確化：どのような現象を記述・予測したいのか？
なにを明らかにしたいのか？
- 施策の明確化：どのような施策を検討したいのか？

超大事！

2. モデルの設定

- 選択肢：どのような選択肢があるのか？離散/連続なのか？
- 選択肢集合：選択可能性(choice availability)は考慮しているか？
- モデル選択：適切なモデルは何か？

**腕の見せ所！
楽しみ所！**

3. 効用関数の特定化 (specification)

- 「関数形状の選択」と「変数・係数の設定」は適切か？

4. パラメータ推定と統計的有意性の確認 (estimation)

- 適切なパラメータ推定方法を使っているか？
- モデルの当てはまりや変数の統計的な性質を確認しているか？

5. 現況再現・予測 (verification/validation V&V)

- Verification: 想定どおりのモデルか？
- Validation: 予測に使えるモデルか？

**丁寧に！ 慎重に！
Gian先生資料見ろ！**

粘り強く試行錯誤を繰り返してブラッシュアップ！

効用関数の形状

線形効用関数

線形加法和で表現（最も一般的な定式化）

$$V_{in} = \sum_{k=1}^K \theta_k x_{ink}$$

x_{ink} : 個人 n の選択肢 i の k 番目の特性（変数）

θ_k : k 番目の特性（変数）の未知パラメータ

対数線形効用関数

線形加法和の特殊例でコブ・ダグラス型と呼ばれる

$$V_{in} = \sum_{k=1}^K \theta_k \ln(x_{ink})$$

$\ln(x_{ink}) = x_{ink}$ とすれば線形関数と同じ

→ **これらはコードの変更なく推定可能**

CES型効用関数

未知パラメータ γ の値によって関数の形状が変化する一般的な関数

$$V_{in} = -\frac{1}{\gamma} \ln \left(\sum_{k=1}^K \theta_k x_{ink}^{-\gamma} \right)$$

$\gamma = -1$: 線形

$\gamma = 0$: 対数線形

$\gamma = \infty$: L字型

線形が基本だが現象や基礎集計結果に合わせて選択

変数とパラメータの設定

変数の選択

- **サービスレベル変数(LOS)**：選択肢毎に定義される変数
選択肢間で値が変化する (ex 料金, 所要時間)
- **社会経済変数(SE)**：選択肢に依存しない変数
選択肢間で値が変化しない (ex 性別, 年齢, 免許の有無)
- **定数項**：説明変数では表現しきれない選択肢固有の効用値.
選択肢固有ダミーのパタメータと解釈できる

※理論的・経験的に重要な変数や**政策変数**は効用関数に導入する

パラメータの設定

- **選択肢共通係数(generic coefficients)**：
選択肢間で共通のパラメータを設定
(例：鉄道と自動車で費用の係数は**同じ**)
- **選択肢固有係数(specific coefficients)**：
選択肢で固有のパラメータを設定
(例：鉄道と自動車で費用の係数は**違う**)

変数選択とパラメータ設定が特定化のキモ！

変数とパラメータの設定（補足）

例：交通機関の選択（自動車・鉄道・バスの3項選択）

効用関数の特定化

$$\begin{aligned}
 V_{\text{車}n} &= \beta_1 + \beta_3 t_{\text{車}n} + \beta_4 c_{\text{車}n} + \beta_5 l_n \\
 V_{\text{鉄道}n} &= \beta_2 + \beta_3 t_{\text{鉄道}n} + \beta_4 c_{\text{鉄道}n} \\
 V_{\text{バス}n} &= \beta_3 t_{\text{バス}n} + \beta_4 c_{\text{バス}n} + \beta_6 f_n
 \end{aligned}$$

所要時間 → t
 費用 → c
 免許保有ダミー → l
 女性ダミー → f

Specification Table

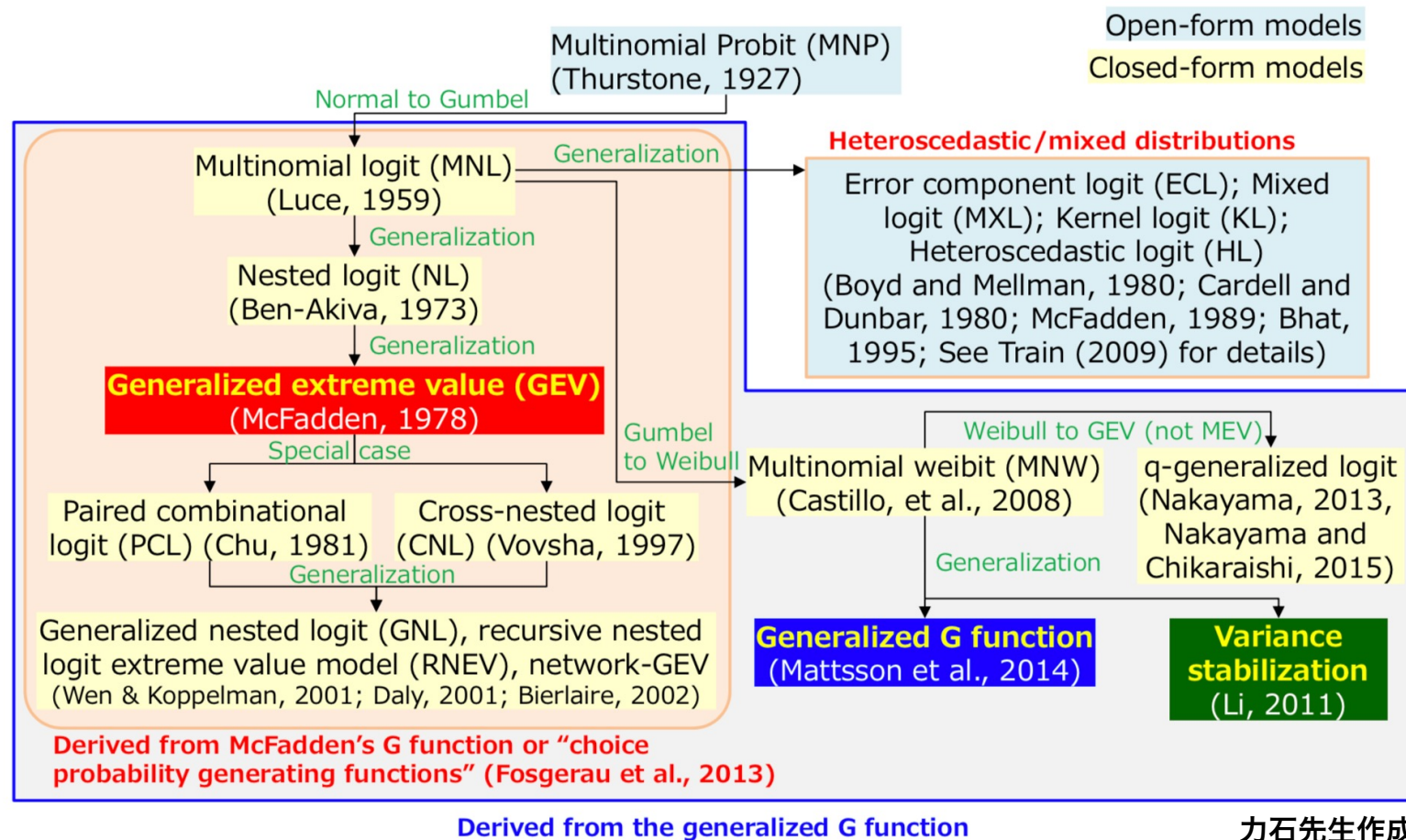
	定数項(固有)		共通係数		固有係数	
	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6
車	1	0	$t_{\text{車}}$	$c_{\text{車}}$	l	0
鉄道	0	1	$t_{\text{鉄道}}$	$c_{\text{鉄道}}$	0	0
バス	0	0	$t_{\text{バス}}$	$c_{\text{バス}}$	0	f
	ダミー変数		サービスレベル変数		社会経済変数	

なぜ全ての選択肢に定数項を入れないのか？（考えてみよう）

発展的な行動モデルと推定手法

離散選択モデルのバリエーション

離散選択モデルの系譜 + 最近の発展的なモデル



+

動的選択：動的離散選択モデル, Recursive Logit → 時間軸を考慮

相互作用：ゲーム論的行動モデル → 他者の影響を考慮

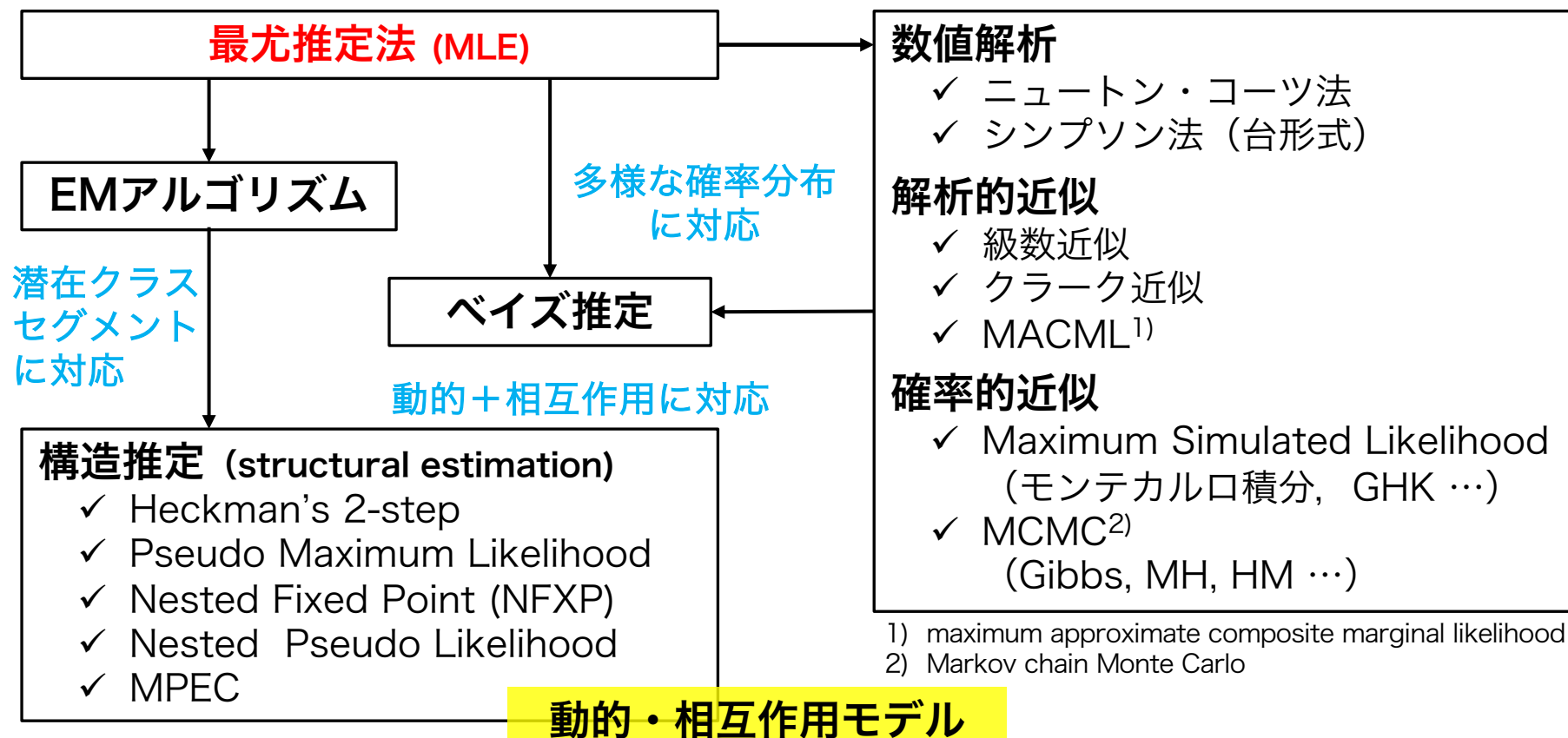
機械学習：次元圧縮, ニューラルネットワーク → 非線形な影響を考慮

パラメータ推定手法のバリエーション

Closed-form モデル

積分計算に対応

Open-form モデル



機械学習 (Machine Learning)

- ・ バックプロパゲーション → **NN型モデルの推定**
- ・ スパース推定 (L1, L2など) → **変数選択**
- ・ 変分近似 → **複雑な確率分布を近似**

- ・ 転移学習 → **モデル移転**
- ・ 逆強化学習 + 敵対的学習 → **多体な相互作用**

多様な交通手段間の相互作用 + 安定的マルチモーダル学習

- ✓ 経路選択をマルコフゲーム (Recursive Logit; RLや敵対的逆強化学習: AIRLと関係) に基づいてゲーム論的均衡モデルとして定式化
- ✓ 都市内における“**歩行者経路選択**” vs “**自動車経路選択**”の相互関係を**Multi-Agent AIRL** (AIRL) として定式化
→ 相関均衡 (LSBRE) を満たす報酬関数と方策関数を導入
- ✓ 高次元データ (画像など) から**多様な集約度**で特徴量を抽出
→ 特徴量生成を内生化したモデルと学習を一気通貫で可能

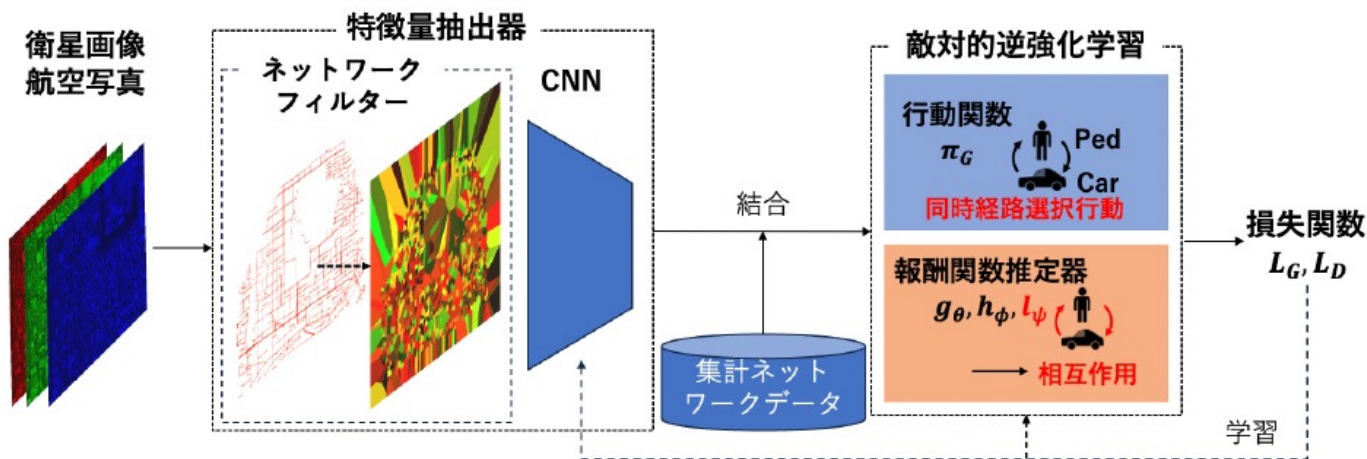


図-2 経路選択モデルに基づく画像データ特徴量抽出モデル

ゲーム的行動モデルと構造推定

はるか昔…

行動モデル夏の学校2007



トップ >>> まとめ

2007年9月20日、21日にかけ、東京大学内で行動モデル夏の学校が行われました。名古屋大学、山梨大学、岐阜大学、日本大学、慶應義塾大学、中央大学、愛媛大学、東京工業大学、東京海洋大学、東京大学から総勢約50名の学生が集まり、2日間という時間を使って、講義受け、行動モデルを用いて課題に取り組みました。

こちらでは当日の内容についてご報告しています。

■プログラム

1日目(9月20日)

10:00-10:30	受付
10:30-11:00	ガイダンス 羽藤英二(東京大学)
11:00-12:00	基調講演 兵藤哲朗(東京海洋大学)
12:00-13:00	昼食 (研究室紹介)
13:00-13:50	講義1 効用最大化理論と確率的意思決定モデル 倉内慎也(愛媛大学)
14:00-14:50	講義2 パラメータ推定のテクニック 佐々木邦明(山梨大学)
14:50-15:00	休憩
15:00-18:00	演習1 コンピュータ演習 牛尾龍太郎(愛媛大学M1)
	GAUSS/Rのサンプルプログラムの説明
	各人データ分析
	モデルの選択とパラメータ推定
18:00-19:00	中間発表
19:00-	立食 (交流会)

2日目(9月21日)

08:30-10:00	演習2 グループごとにデータ分析・パラメータ推定 (プログラムの提出)
10:00-12:00	演習3 発表準備 (途中昼食、講師陣によるプログラチェック)
12:00-13:00	昼食
13:00-14:30	博士コースセッション
	講演1 交通エコポイント制度のサービスレベルと評価意識構造に関する分析 佐藤仁美(名古屋大学D2)
	講演2 ゲーム論的交通均衡モデルとパラメータ推定手法 柳沼秀樹(東京工業大学D1)
	講演3 ITSにおけるプローブカーデータを活用した統合型交通情報提供システムの開発 薄井智貴(名古屋大学D3)
14:30-15:20	講義3 異質性と動学化へのアプローチ 山本俊行(名古屋大)
15:30-17:00	プレゼンテーション&質疑
17:00-18:00	講評・表彰・交流会

混雑外部性を内生化した離散選択モデルと構造推定*

Discrete Choice Model with Endogenous Congestion Externality and Structural Estimation*

柳沼秀樹**・福田大輔***

By Hideki YAGINUMA**・Daisuke FUKUDA***

混雑した都市鉄道における 出発時刻選択モデルの構造推定： ゲーム理論に基づいた実証研究

松村 杏子¹・武藤 滋夫²・福田 大輔³・柳沼 秀樹⁴

¹非会員 東京工業大学大学院社会理工学研究科社会学専攻 (〒152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1-W9-97)
E-mail: matsumura.k.ad@m.titech.ac.jp

²非会員 東京工業大学教授 大学院社会理工学研究科 (〒152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1-W9-97)

³正会員 博(工) 東京工業大学准教授 大学院理工学研究科 (〒152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1-M1-11)

⁴正会員 株式会社道路計画 (〒170-0013 東京都豊島区東池袋 2-13-14)

2008.9/20-21

混雑内生型離散選択 モデルの開発と構造推定

行動モデル夏の学校@東大

東京工業大学大学院

博士課程2年 柳沼秀樹

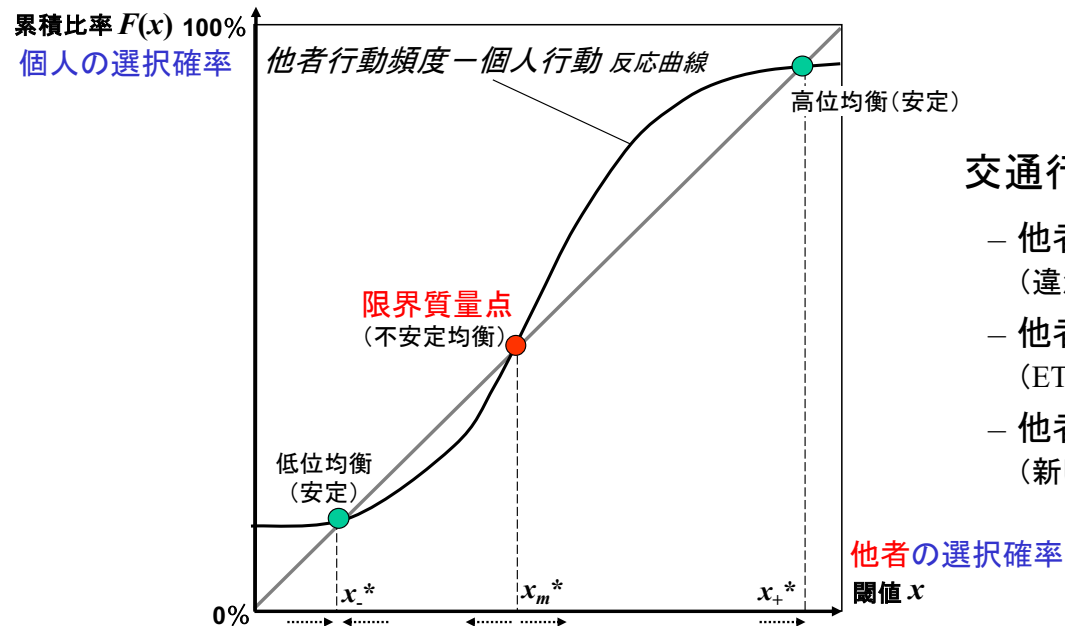
yaginuma@plan.cv.titech.ac.jp

構造推定とは？

内生性を持つモデルのパラメータ推定

- ✓ 自身の選択が他者の選択に依存する状況（違法駐輪，混雑など）はゲーム論的（戦略的行動選択）な状況と考えられる
- ✓ 内生性によって選択モデルのパラメータを通常の方法などでは適切に推定できない

福田先生の社会的相互作用に関する研究（2004）



交通行動には相互作用が有意に働く

- 他者の行動への心理的同調圧力
(違法駐輪・駐車，自動車利用・購入の自粛，政策受容...)
- 他者の行動が個人の経済的便益に影響
(ETC車載器の購入，テレコミュニケーション...)
- 他者の行動を通じた社会的学習と規範・慣習の形成
(新しい交通環境への適応...)

混雑を内生化した出発時刻選択モデル

- ✓ 出発時刻選択では、混雑を避ける選択が見られるが、そもそも混雑は自分を含む通勤者全体の選択行動の結果となっている
→ **通勤者間の戦略的行動（ゲーム）として定式化**

➤ 効用関数

$$u_i^a = \beta X_i^a + \theta h_i(n_i) + \epsilon_i^a$$

1項は**個人効用項** X_i^a : 個人属性, β : パラメータ

2項は**相互作用項** n_i : 利用者数, θ : パラメータ

3項は**タイプ**(誤差項)



私的情報: 個人のみが知る情報

⇒ 分析者 + 他プレイヤーはunknown

期待利用者数を**選択確率の総和**として定義

$$h_i(E_{\epsilon^{-a}}[n_i^{-a}]) = h_i\left(\sum_{-a \in N} p_i^{-a}\right)$$

➤ 期待効用

$$E_{\epsilon^{-a}}[u_i^a] = \beta X_i^a + \theta h_i(E_{\epsilon^{-a}}[n_i^{-a}]) + \epsilon_i^a$$

他者のタイプベクトル $\epsilon^{-a} = \{\epsilon^1, \dots, \epsilon^{a-1}, \epsilon^{a+1}, \dots, \epsilon^N\}$ に依存

混雑を内生化した出発時刻選択モデル

- ✓ ベイジアンナッシュ均衡としてLogit型の選択モデルとなり, さらに誤差項を分解すればMixed Logitとしても導出できる
→**Logit型の選択モデルとして導出可能**

➤ Bayesian Nash Equilibrium

$$s^a (\epsilon^a)^* \in \operatorname{argmax}_{s^a} E_{\epsilon^a} [u_i^a]$$

期待利得が最大となる戦略を選択する


$$p_i^a = \operatorname{Prob}(E_{\epsilon^a} [u_i^a] \geq E_{\epsilon^a} [u_j^a]) \forall j \neq i$$

➤ 選択確率

Logit型選択モデル (Model 1) $\Rightarrow$ 全個人が従う

$$p_i^a = \frac{\exp(\beta X_i^a + \theta h_i(E_{\epsilon^a} [n_i]))}{\sum_{j \in T} \exp(\beta X_j^a + \theta h_j(E_{\epsilon^a} [n_j]))}$$

Nested Pseudo Likelihood

- ✓ 構造モデルから誘導モデルを導くことが困難，モデル内に選択確率が入れ子構造（内生性）となっている，識別問題などの理由でモデルから直接パラメータを推定できない

→他者の選択確率を適切に生成して「擬似尤度」を最大化

Step0:尤度関数

$$LL(\Theta, P^0) = \sum_{a \in N} \sum_{i \in T} \ln(p_i^a) \cdot \delta_i^a$$

- 繰り返しが無い場合はPMLと呼ばれる構造推定
- 縮小写像による発散が生じる
→ Kasahara&Shimotsu参照

Step1:初期値設定

観測値等のノンパラな頻度分布を $\hat{P}^0$ とする

Step2: 擬似尤度の最大化

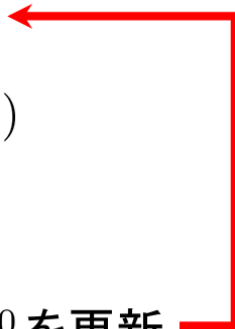
$$\hat{\Theta} = \underset{\Theta}{\operatorname{argmax}} LL(\Theta, \hat{P}^0)$$

Step3: $\hat{P}^0$ の更新

選択確率を算出して $\hat{P}^0$ を更新

Step4: 繰り返し計算

収束するまで初期値
(確率)の更新と最大化
を実行



まとめ：より良い推定に向けて

Closed-formなら最尤推定法の枠組みで十分に戦える

- 多項ロジット（MNL）の最尤推定では、推定量として望ましい性質や解の収束性がある程度保証されている（NLなどは一部保証されていない）
- 変数の工夫（対数・指数、次元圧縮）、セグメンテーション、潜在クラスの導入、データ統合（SP/RP融合）など色々な方法論が存在

Open-formはベイズ推定が必須だが表現力が豊か

- ミックスドロジット（MXL）は誤差要素モデル（EC）やランダム係数モデル（RC）により柔軟なモデリングが可能【付録参照】

動学や相互作用を考慮したモデルは応用的な推定手法が必須

- 内生性を有するモデルには構造推定が有効であり、大山先生のgRLや浦田先生の避難モデルなどに適用されている
- 機械学習における新たな手法（敵対的学習や強化学習）の行動モデルへの適用可能性は高く、研究を深掘りしたい

パラメータ推定手法の理解は実装が一番！

- スクラッチで全部実装すれば一皮剥けます（1度でいいのでやろう！）
- 過去の夏の学校の講義資料や発表資料は参考にしよう

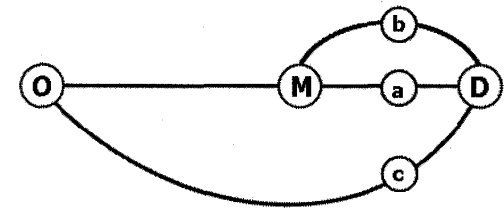
おまけ

多様な離散選択モデル

選択肢間の相関構造を如何に表現するかがポイントとなる
(交通機関の類似性、経路の重複構造)

MNLベース

相関構造を表現する**変数**を導入して効用を修正
⇒C-Logit, Path-Size Logit



GEVベース (Closed form)

柔軟な確率分布を導入して**誤差項**を構造化 (ネスト表現)
⇒NL, PCL, CNL, n-GEV

非GEVベース (Open form)

確率変数を導入して誤差の構造化と変数の異質性を考慮
すべてのGEVを近似可能だが、数値積分が必要
⇒Mixed Logit (Error Component, Random Coefficient)

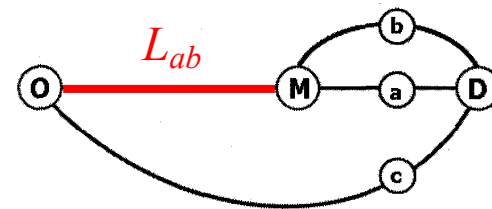
MNLの操作性を担保しつつ，相関構造を変数で表現している
(経路選択モデルで発展)

C-Logit

CF変数 (Commonality Factor)

あるODペア間に存在する経路間の類似度を表す変数を導入

$$p_j = \frac{\exp\left[\alpha\left(V_{ij} - \beta_0 \ln CF_j\right)\right]}{\sum_k \exp\left[\alpha\left(V_{ik} - \beta_0 \ln CF_k\right)\right]}$$



$$CF_j = \sum_{h \in I_{od}} \left(\frac{L_{jh}}{L_j^{1/2} L_h^{1/2}} \right)^\gamma$$

L_j, L_h : OD間の経路 j と h の経路長(時間)
 L_{jh} : 経路 j と h の共通リンク長(時間)
 γ : パラメータ

MNLの操作性を担保しつつ、相関構造を変数で表現している
(経路選択モデルで発展)

Path-Size Logit

類似性を表現するPath-Size変数を導入

$$p_i = \frac{\exp\left(V_i - \frac{1}{\mu} \ln \boxed{PS_i}\right)}{\sum_k \exp\left(V_k - \frac{1}{\mu} \ln PS_j\right)}$$

$$\boxed{PS_j} = \sum_{a \in \Gamma_i} \frac{l_a}{L_i} \frac{1}{\sum_{j \in C_n} \delta_{aj}}$$

リンクが経路に占める割合

リンクを共有している
経路の数

Γ_i : 経路 i に含まれるリンク集合

l_a : リンク a の長さ

C_n : 選択肢集合

δ_{aj} : リンク a が経路 j に含まれるとき1, それ以外は0

μ : スケールパラメータ

様々なGEV(Generalized Extreme Value)関数を適用することでIIDを緩和した柔軟な誤差構造を表現している

Nested Logit

$$G(y) = \sum_m \alpha_m \left(\sum_k y_k^{1/\mu_m} \right)^{\mu_m}$$

Cross Nested Logit

$$G(y) = \sum_m \left(\sum_k (\alpha_{mk} y_k)^{1/\mu} \right)^{\mu}$$

Ordered GEV

$$G(y) = \sum_m \left(\sum_k \alpha_{mk} y_k^{1/\mu_m} \right)^{\mu_m}$$

Generalized Nested Logit

$$G(y) = \sum_m \left(\sum_k (\alpha_{mk} y_k)^{1/\mu_m} \right)^{\mu_m}$$

Ordered GEV

$$G(y) = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n (y_k^{1/\mu_{kj}} + y_j^{1/\mu_{kj}})^{\mu_{kj}}$$

Nested Logit

選択肢をネスティングすることでネスト間の相関のみを考慮
最初にグループ g を選択し, 次にグループ内の選択肢 m から選択

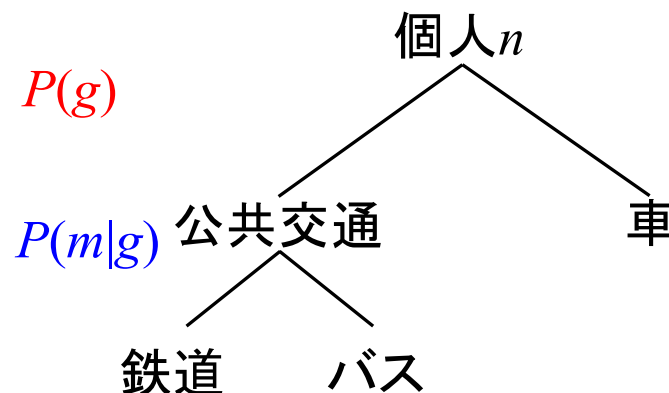
$$P(g, m) = P(m|g)P(g)$$

$$P(m|g) = \frac{\exp(V_m)}{\sum_{m' \in \{\text{鉄道}, \text{バス}\}} \exp(V_{m'})}$$

$$P(g) = \frac{\exp(\Lambda_g)}{\sum_{g' \in \{\text{公共交通}, \text{車}\}} \exp(\Lambda_{g'})}$$

$$\Lambda_g = \frac{1}{\mu_g} \log \left(\sum_{m \in \{\text{鉄道}, \text{バス}\}} \exp(\mu_g V_m) \right)$$

ログサム変数: グループ g に含まれる
交通手段から得られる効用の最大
値の期待値



	鉄道	バス	自動車
鉄道	σ^2	$\sigma_{公共交通}^2$	0
バス	$\sigma_{公共交通}^2$	σ^2	0
自動車	0	0	σ^2

Mixed Logit

Logitモデルの操作性とProbitモデルの柔軟性を備えたモデル
あらゆるGEVモデルに近似可能

$$\begin{aligned} U_{\text{鉄道}} &= \beta X_{\text{鉄道}} + \eta_{\text{鉄道}} + v_{\text{鉄道}} \\ U_{\text{バス}} &= \beta X_{\text{バス}} + \eta_{\text{バス}} + v_{\text{バス}} \\ U_{\text{車}} &= \beta X_{\text{車}} + \eta_{\text{車}} + v_{\text{車}} \end{aligned}$$

誤差項を正規分布 (Probit) と
ガンベル分布 (Logit) の両方に
従うと仮定

$$P(i) = \frac{\int \int \int \frac{e^{\beta X_i + \eta_i}}{\sum_{i'} e^{\beta X_{i'} + \eta_{i'}}} f(\eta) d\eta$$

Open-form (積分を含む形式)
なのでシミュレーション法を用
いたパラメータ推定法を適用

NL近似における分散共分散構造

$$\begin{aligned} \text{Cov}(U) &= \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{鉄道} & \text{バス} & \text{自動車} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{鉄道} \\ \text{バス} \\ \text{自動車} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{\text{公共交通}}^2 & 0 \\ \sigma_{\text{公共交通}}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} + \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{鉄道} & \text{バス} & \text{自動車} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{鉄道} \\ \text{バス} \\ \text{自動車} \end{matrix} & \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} \end{matrix} \\ \varepsilon &= \eta + v \end{aligned}$$

NLへの近似

誤差成分 η を適切に配置する事であらゆる誤差構造を近似
MXLの誤差要素モデル (Error Component) として適用

$$\begin{aligned} U_{car} &= \beta X_{car} + v_{car} \\ U_{bus} &= \beta X_{bus} + \sigma_{transit} \eta_{transit} + v_{bus} \\ U_{rail} &= \beta X_{rail} + \sigma_{transit} \eta_{transit} + v_{rail} \end{aligned}$$

自動車
バス
鉄道

標準正規乱数
 $\eta_{transit} \approx N(0,1)$

η v ε

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{transit}^2 & \sigma_{transit}^2 \\ 0 & \sigma_{transit}^2 & \sigma_{transit}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{transit}^2 + \sigma^2 & \sigma_{transit}^2 \\ 0 & \sigma_{transit}^2 & \sigma_{transit}^2 + \sigma^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \sigma_{transit}^2 \\ 0 & \sigma_{transit}^2 & \sigma^2 \end{pmatrix}$$

ECとNLの誤差構造は厳密には一致しない
⇒対角成分が $\sigma^2 t_{transit}$ 分だけ大きくなる！

あくまでも近似であることに注意

CNLへの近似

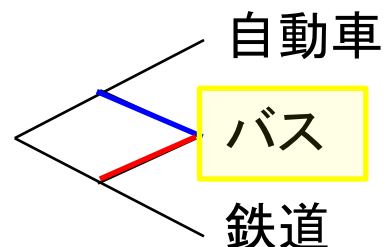
選択肢がネスト間で重複することを許容

⇒バスは公共交通であり車両でもある（バスは2つのネットに帰属）

$$U_{car} = \beta X_{car} + \sigma_{road} \eta_{road} + v_{car}$$

$$U_{bus} = \beta X_{bus} + \sigma_{transit} \eta_{transit} + \sigma_{road} \eta_{road} + v_{bus}$$

$$U_{rail} = \beta X_{rail} + \sigma_{transit} \eta_{transit} + v_{rail}$$



$$\begin{pmatrix} \sigma_{road}^2 & \sigma_{road}^2 & 0 \\ \sigma_{road}^2 & \sigma_{transit}^2 + \sigma_{road}^2 & \sigma_{transit}^2 \\ 0 & \sigma_{transit}^2 & \sigma_{transit}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}$$

標準正規乱数

$$\eta_{transit}, \eta_{road} \approx N(0,1)$$

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \sigma_{road}^2 + \sigma^2 & \sigma_{road}^2 & 0 \\ \sigma_{road}^2 & \sigma_{road}^2 + \sigma_{transit}^2 + \sigma^2 & \sigma_{transit}^2 \\ 0 & \sigma_{transit}^2 & \sigma_{transit}^2 + \sigma^2 \end{pmatrix}$$

空間的相関への近似

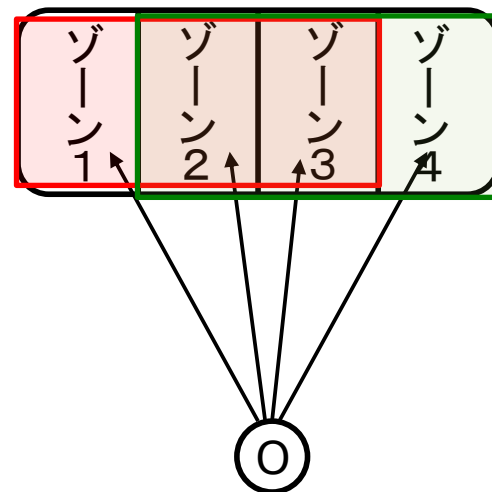
当該ゾーンと隣接するゾーンとの近接性を相関として表現

$$U_{zone1} = \beta X_{zone1} + \sigma_0 \eta_1 + v_{zone1}$$

$$U_{zone2} = \beta X_{zone2} + \sigma_0 \eta_1 + \sigma_0 \eta_2 + v_{zone2}$$

$$U_{zone3} = \beta X_{zone3} + \sigma_0 \eta_2 + \sigma_0 \eta_3 + v_{zone3}$$

$$U_{zone4} = \beta X_{zone4} + \sigma_0 \eta_3 + v_{zone4}$$



$$\eta_1, \eta_2, \eta_3 \approx N(0,1)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_0^2 & \sigma_0^2 & 0 & 0 \\ \sigma_0^2 & 2\sigma_0^2 & \sigma_0^2 & 0 \\ 0 & \sigma_0^2 & 2\sigma_0^2 & \sigma_0^2 \\ 0 & 0 & \sigma_0^2 & \sigma_0^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_0^2 + \sigma^2 & \sigma_0^2 & 0 & 0 \\ \sigma_0^2 & 2\sigma_0^2 + \sigma^2 & \sigma_0^2 & 0 \\ 0 & \sigma_0^2 & 2\sigma_0^2 + \sigma^2 & \sigma_0^2 \\ 0 & 0 & \sigma_0^2 & \sigma_0^2 + \sigma^2 \end{pmatrix}$$

複合選択への近似

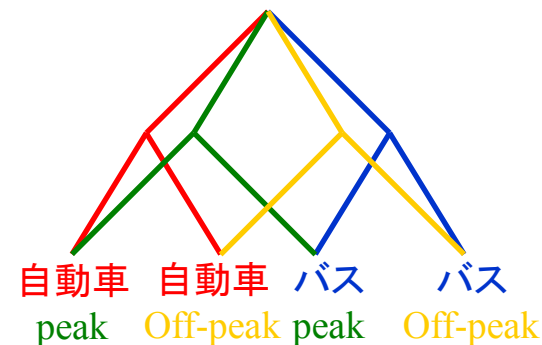
交通機関（自動車/バス）と時間帯（Peak/Off-Peak）の複合選択

$$U_{car,p} = \beta X_{car,p} + \sigma_{car} \eta_{car} + \sigma_p \eta_p + v_{car,p}$$

$$U_{car,op} = \beta X_{car,op} + \sigma_{car} \eta_{car} + \sigma_{op} \eta_{op} + v_{car,op}$$

$$U_{bus,p} = \beta X_{bus,p} + \sigma_{bus} \eta_{bus} + \sigma_p \eta_p + v_{bus,p}$$

$$U_{bus,op} = \beta X_{bus,op} + \sigma_{bus} \eta_{bus} + \sigma_{op} \eta_{op} + v_{bus,op}$$



$$\eta_{car}, \eta_{bus}, \eta_p, \eta_{op} \approx N(0,1)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{car}^2 + \sigma_p^2 & \sigma_{car}^2 & 0 & 0 \\ \sigma_{car}^2 & \sigma_{car}^2 + \sigma_{op}^2 & 0 & \sigma_{op}^2 \\ \sigma_p^2 & 0 & \sigma_{bus}^2 + \sigma_p^2 & \sigma_{bus}^2 \\ 0 & \sigma_{op}^2 & \sigma_{bus}^2 & \sigma_{bus}^2 + \sigma_{op}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_{car}^2 + \sigma_p^2 + \sigma^2 & \sigma_{car}^2 & \sigma_p^2 & 0 \\ \sigma_{car}^2 & \sigma_{car}^2 + \sigma_{op}^2 + \sigma^2 & 0 & \sigma_{op}^2 \\ \sigma_p^2 & 0 & \sigma_{bus}^2 + \sigma_p^2 + \sigma^2 & \sigma_{bus}^2 \\ 0 & \sigma_{op}^2 & \sigma_{bus}^2 & \sigma_{bus}^2 + \sigma_{op}^2 + \sigma^2 \end{pmatrix}$$

誤差項の異分散への近似

IIDの下では同一分散⇒選択肢別に異なる分散を推定

※ 1 つは0に固定しないとIdentification問題が発生

$$U_{car} = \beta X_{car} + \sigma_{car} \eta_{car} + v_{car}$$

$$U_{bus} = \beta X_{bus} + \sigma_{bus} \eta_{bus} + v_{bus}$$

$$U_{rail} = \beta X_{rail} + \sigma_{rail} \eta_{rail} + v_{rail}$$

$$\eta_{car}, \eta_{bus}, \eta_{rail} \approx N(0,1)$$

交通機関毎に誤差分散が異なると仮定

- ・自動車：所要時間信頼性が低い
⇒誤差分散が大きくなる
- ・鉄道：所要時間信頼性が高い
⇒誤差分散が小さくなる

つまり、以下ような関係が期待される
自動車 > バス > 鉄道

$$\begin{pmatrix} \sigma_{car}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{bus}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{rail}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{car}^2 + \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{bus}^2 + \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{rail}^2 + \sigma^2 \end{pmatrix}$$

※異分散のみを考慮 (IIDは緩和していない)

ランダム係数モデル(1)

パラメータは母集団で同質であるが実際には嗜好の異質性が存在
MXLのランダム係数モデル (Random Coefficient) として適用

$$U_{car,n} = \beta T_{car,n} + \varepsilon_{car,n} \rightarrow U_{car,n} = \beta_n T_{car,n} + \varepsilon_{car,n}$$

観測異質性

- 男女別定数項： $U_{car,n} = \alpha_0 + \alpha_1 * male_n + \beta_1 T_{car,n} + \varepsilon_{car,n}$
女性の定数項: α_0 男性の定数項: $\alpha_0 + \alpha_1$
- 男女別パラメータ： $U_{car,n} = \alpha_0 + \beta_1 * male_n * T_{car,n} + \beta_2 * (1 - male_n) * T_{car,n}$
女性のパラメータ: β_2 男性のパラメータ: β_1

非観測異質性

- アプリアリ・マーケットセグメンテーション：

$$U_{car,n}^{Group1} = \alpha_0^{Group1} + \beta_1^{Group1} T_{car,n} + \varepsilon_{car,n}^{Group1} \quad \text{Group1のパラメータベクトル: } (\alpha_0^{Group1}, \beta_1^{Group1})$$
$$U_{car,n}^{Group2} = \alpha_0^{Group2} + \beta_1^{Group2} T_{car,n} + \varepsilon_{car,n}^{Group2} \quad \text{Group2のパラメータベクトル: } (\alpha_0^{Group2}, \beta_1^{Group2})$$

ランダム係数モデル(2)

パラメータが確率分布に従うと仮定して異質性を考慮

⇒パラメータが正規分布に従って分布すると仮定した場合、分布の母数である平均値と分散(標準偏差)そのものを推定

$$U_{car,n} = \beta_n T_{car,n} + v_{car,n}$$

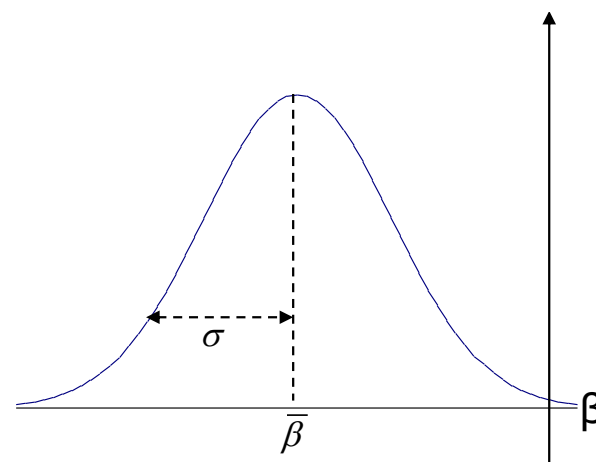
$$\beta_n \approx N(\bar{\beta}, \sigma^2)$$

$$U_{car,n} = \bar{\beta} T_{car,n} + \sigma \eta_n T_{car,n}$$

$$U_{bus,n} = \bar{\beta} T_{bus,n} + \sigma \eta_n T_{bus,n}$$

$$U_{rail,n} = \bar{\beta} T_{rail,n} + \sigma \eta_n T_{rail,n}$$

$$\eta_n \approx N(0,1) \quad \bar{\beta}, \sigma : \text{unknown parameter}$$



母数 β を構造化することにより、観測異質性と非観測異質性を同時に考慮可能

$$\bar{\beta}_n = \gamma_0 + \gamma_1 \text{income}_n \quad \beta \text{ が観測可能な所得に依存}$$

ECとRCの両者を利用

両者を統合したモデル（CNLモデルに異質性を考慮etc）が可能
⇒考えられる構造を試すことができる！！

$$\begin{aligned}U_{car,n} &= \bar{\beta}T_{car,n} + \eta_n T_{car,n} + v_{car,n} \\U_{bus,n} &= \bar{\beta}T_{bus,n} + \eta_n T_{bus,n} + v_{bus,n} \\U_{rail,n} &= \bar{\beta}T_{rail,n} + \eta_n T_{rail,n} + v_{rail,n}\end{aligned}$$

η の分布形状：正規分布以外の確率分布でも利用できる

⇒正規分布では非現実的な値を取るケースでは、様々な確率分布（三角分布，切断正規分布，対数正規分布，レーリー分布等）を仮定できる。

v の分布形状：任意のGEV関数を適用できる

- ・ IIDガンベル：Logit Kernel ⇒ MNL
- ・ 各種GEV：GEV Kernel ⇒ NL, PCL, CNL, GNL…