

環状道路の都市計画決定と制度分析

～民間有料道路ゲーム理論の論文レビュー～

M2 中園翔

@9月理論合宿

2017/09/16

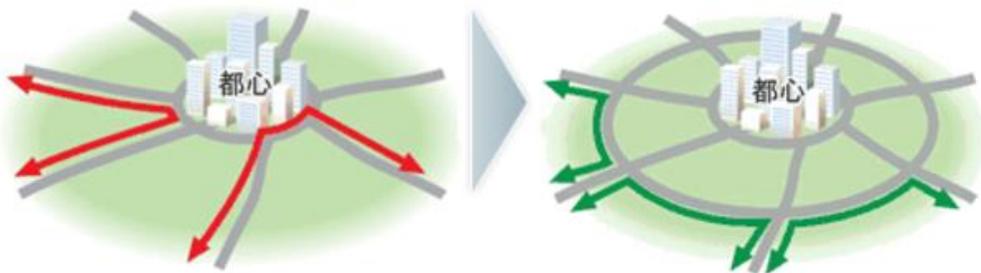
1 環状道路を対象に

✓ 注目するインフラ:環状道路

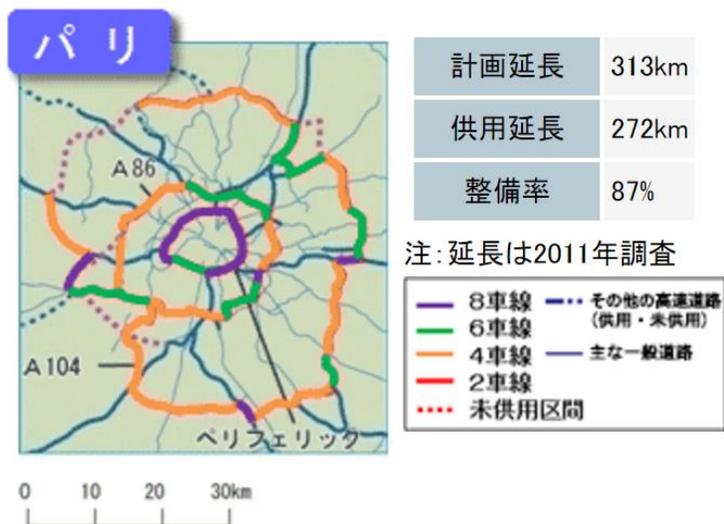
- ・首都圏3環状
(計画延長525km, 整備率:79%)
- ・環状道路を利用した効率的運用

✓ 環状道路の整備効果

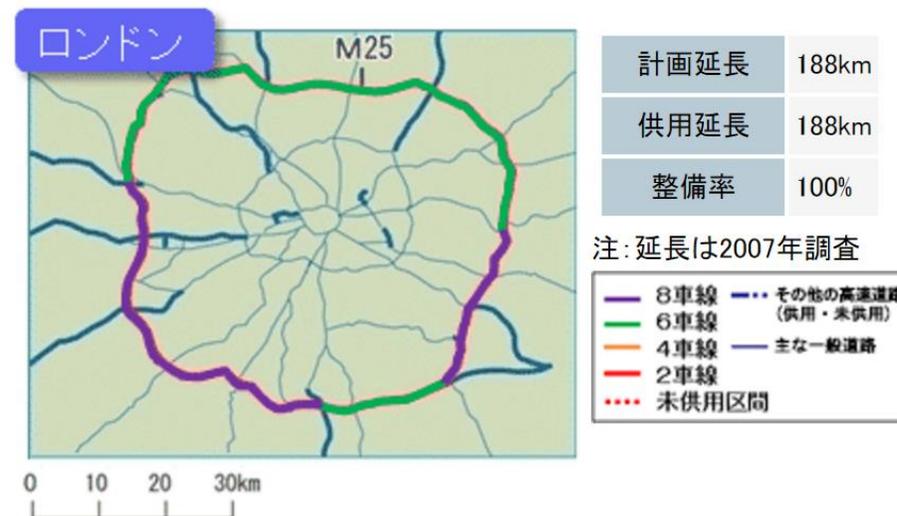
- ・通過交通の都心部への流入を抑制
- ・郊外から都心部への交通を分散導
- ・周辺地域間での直接移動
- ・災害や事故等による一部区間の不通にも速やかに移動



(出典:国土交通省HP)



パリの第2環状道路「A86」



ロンドンを囲む「M25」

2章) 道路制度設計と環状線効果に関する研究のレビュー(Transportation Research関連)

- ・インフラ整備, 道路制度設計関連論文(均衡配分系論文)
- ・環状線に関する論文, グリーンベルトなどの関連プロジェクト構想論文

3章) 環状線の最適配置と管理制度設計

- a) 多プレイヤー下での環状線の最適な制度設計の定式化
- b) 仮想的ネットワークにおける解の性質の分析
- c) 数値計算

4章) 環状線形成の通史的分析(東京, 大阪, ロンドン, パリ, NY)

- a) 道路ネットワークの図面による変遷分析
- b) 予算と制度の分析-計画史や社会的評価, 背後にある法制度を整理
- c) ゲーム論的な考察(プレイヤーを明確化し, 戦略と利得と解の動きを分析)

5章) 日本の道路制度の数値計算

- ・首都圏と周辺部の課金システムの制度スタディ

➤ 民間の道路管理者による, メンテナンス強度や通行料金の制度設計

- ・A de Palma(2007)「Maintenance, service quality and congestion pricing with competing roads」
道路のメンテナンスに着目. 競合する民間の道路管理者の意思決定タイミングによる影響をゲーム理論で解く.

➤ 環状線の最適配置問題に関するもの

- ・M. J. Smith(1979)「The optimal location of a single ring road」
環状線が1つだけのネットワークを想定し, 放射方向の交通量を最小化する環状線の位置の存在を証明.

- ・M. J. Smith(1976)「The location of two ring roads and the control of traffic speed which together minimizes radial travel in a town」
環状線が2つのネットワークを想定し, 放射方向の交通量を最小化する環状線の半径を求める.

➤ 民間有料道路を題材に, 同時選択ゲーム理論で解いた論文

- ・Xiao et al. (2006)「Competition and efficiency of private toll roads」
民間が経営する対称的でない道路において, 通行料と道路容量を, 同時に選択する場合の, 解の性質を分析

5

The location of two ring roads and the control of traffic speed which together minimizes radial travel in a town

- Smith らによる研究. Transportation Research 10 (1976) 201-207
- 環状道路が最もパフォーマンスを発揮するとき
= 通過交通の都心部への流入を抑制できるとき (= 放射方向の総移動距離が最小化できるとき)
- そのような環状道路の最適な配置はどこか? (= 最適な環状道路の半径を求める)
想定するネットワーク) 2つの環状道路があるネットワーク
放射方向の道路は都心部でつながっていない

前提条件

- ① ドライバーは各自, 最小時間となる経路を選択する
- ② 車両速度は右の表により与えられる
 - Smith(1974)によると, 右表の速度のとき, 半径方向に移動する距離が最小
 - 平均車両速度は信号制御で, ある程度実現できる
- ③ 道路のキャパシティ制約はなし

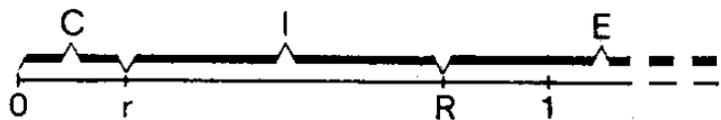
Road	Speed
Ring of radius r	cr
Ring of radius R	cR
Radial	v

6

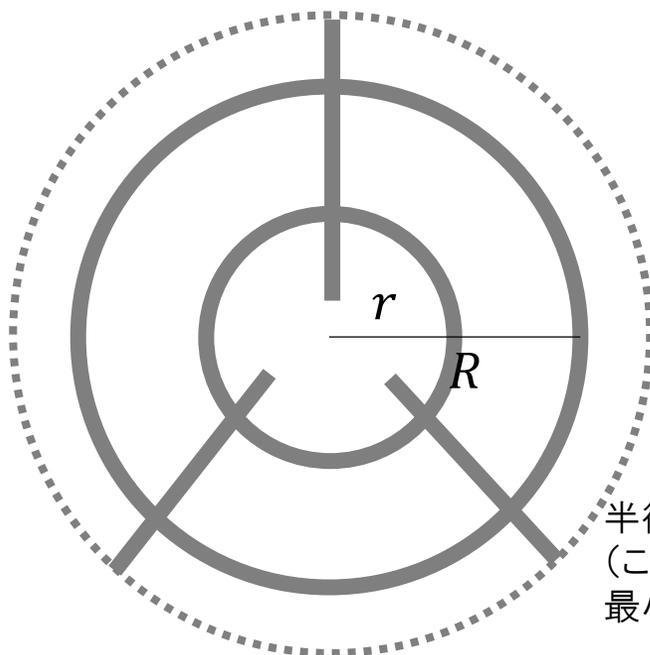
放射方向の移動距離

・トリップのクラス分け

① 中心からの距離で以下のように領域を分ける

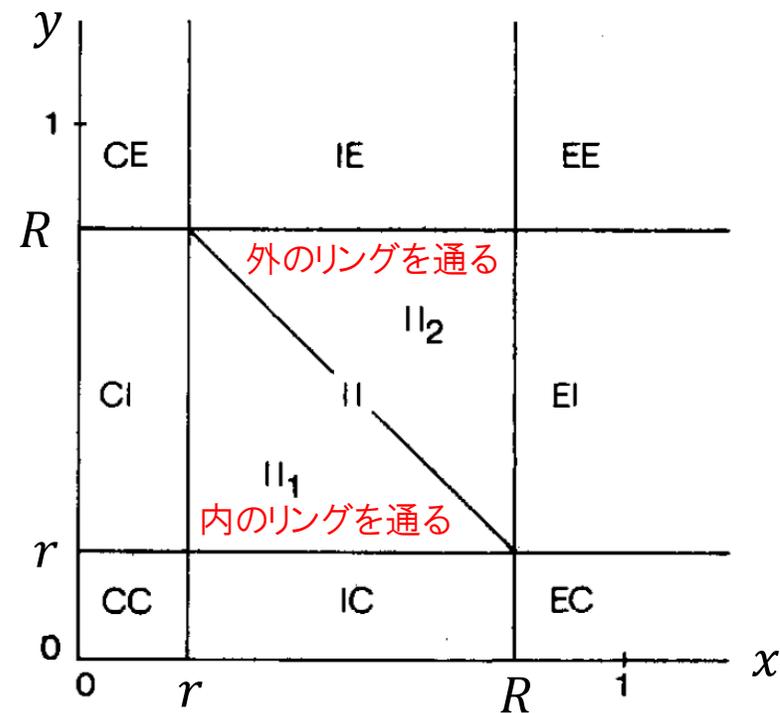


② 出発地点の半径を x , 到着地点の半径を y とする
 (以後, 半径のみに注目. 環状線をどれだけ走ったかは問わない)



半径1の円
 (これより外側は
 最小化に関係ない)

・放射方向の移動距離



$$s(r, R, x, y) = \begin{cases} \min(|x - r| + |y - r|, |R - x| + |R - y|) & \text{if } x \leq 1 \text{ and } y \leq 1 \\ 1 - R + |R - y| & \text{if } x > 1 \text{ and } y \leq 1 \\ 2(1 - R) & \text{if } x > 1 \text{ and } y > 1. \end{cases} \quad (1)$$

放射方向総移動距離を最小化する環状道路の半径

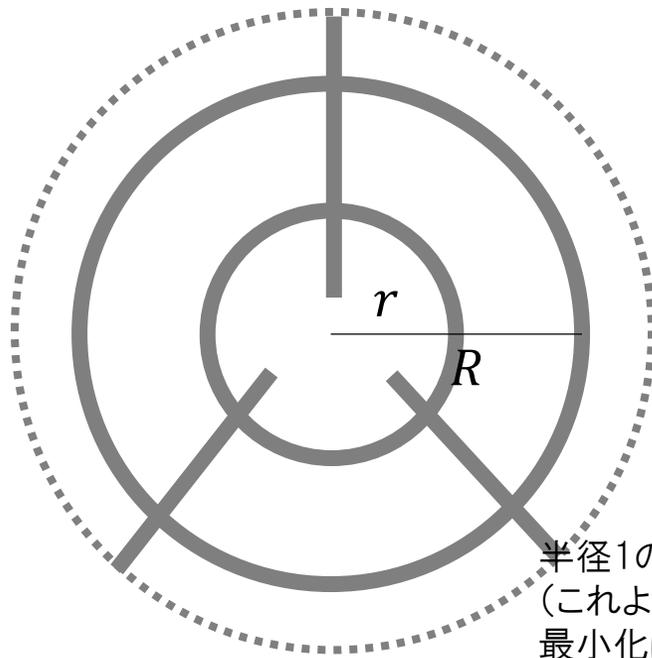
・放射方向移動距離 s の例

$$CC: r - x + (r - y)$$

$$|l|: x - r + (y - r)$$

$$EE: x - R + (y - R)$$

$$\text{または } 1 - R + (1 - R)$$



・放射方向移動距離 s を r で偏微分 $= D_1s$

放射方向移動距離 s を R で偏微分 $= D_2s$

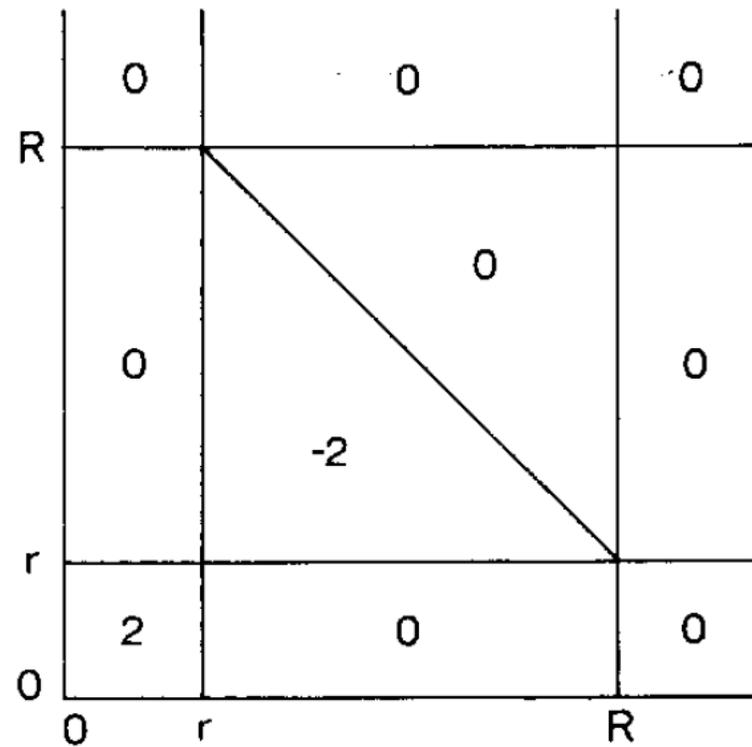


Fig. 6. The partial derivatives D_1s .

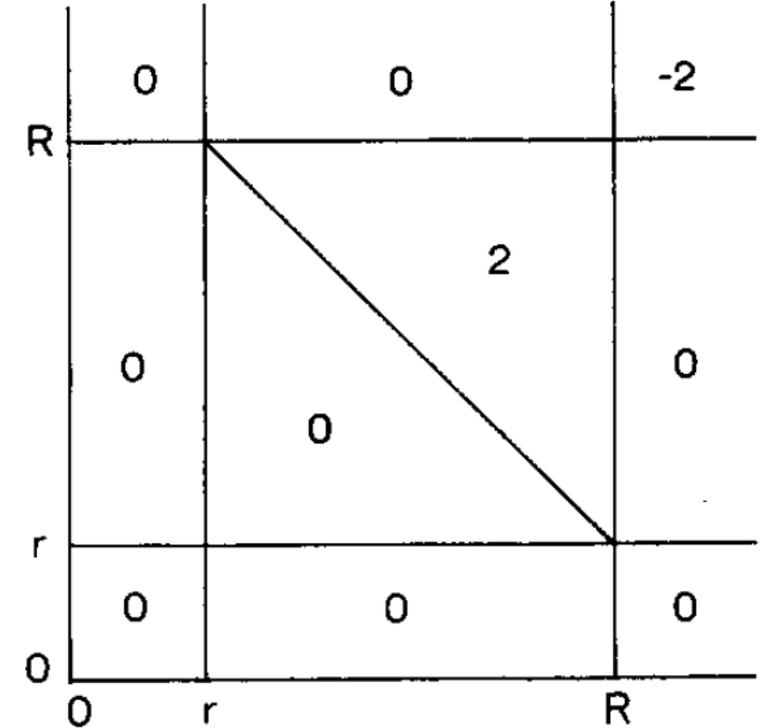


Fig. 7. The partial derivatives D_2s .

8

放射方向総移動距離最小化のための一階条件

- 放射方向総移動距離を環状線の半径で偏微分

$$\begin{aligned} D_1 S(r, R) &= \iint D_1 s(r, R, x, y) f(x, y) dx dy \\ &= \iint_{CC(r)} 2f(x, y) dx dy + \iint_{II_1(r, R)} (-2)f(x, y) dx dy \\ &= 2m(CC(r)) - 2m(II_1(r, R)). \end{aligned}$$

$$D_2 S(r, R) = 2m(II_2(r, R)) - 2m(EE(R)).$$

- r が固定なら、一階微分条件

$$m(II_2(r, R)) = m(EE(R))$$

- 領域Aにおけるトリップ交通量の表し方

$$m(A) = \int \int_A f(x, y) dx dy.$$

$f(x, y)$ は半径 x の地点から半径 y の地点に行く交通量密度

$m(A)$ はAという領域に存在するトリップの交通量

- R が固定なら、一階微分条件

$$m(CC(r)) = m(II_1(r, R)).$$

⇒環状線を通る、リングの内側から内側へのトリップ交通量と、リングの外側から外側へのトリップ交通量が等しいときに、放射方向の総移動距離は最小化される(環状線は最適な位置にあると言える)

- $R = 1$ and $f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{if } x, y < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ のケースを考える

注) x か y のどちらかが $R(= 1)$ を超えた場合, 半径方向の移動は環状道路の位置 r に関係なく, 一定値をとるので, $f(x, y) = 0$ とできる

- 放射方向総移動距離の下限

$$S_0 = \int_0^1 \int_0^1 |x - y| dx dy = \frac{1}{3}$$

- 放射方向移動のペナルティ

$$P(r, 1) = S(r, 1) - S_0$$

総移動距離の最小化と,
ペナルティの最小化は同値

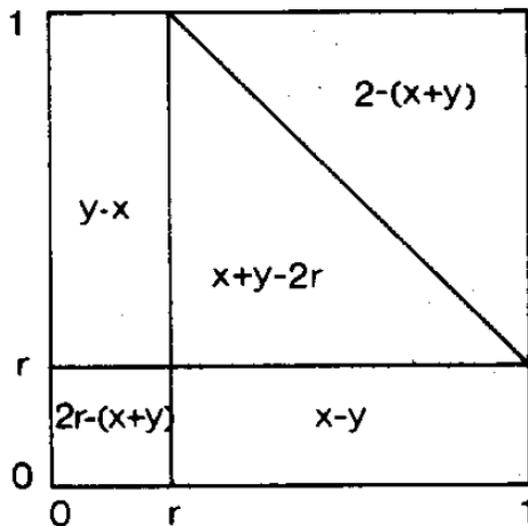


Fig. 8. Integrands for $S(r, 1)$.
被積分関数

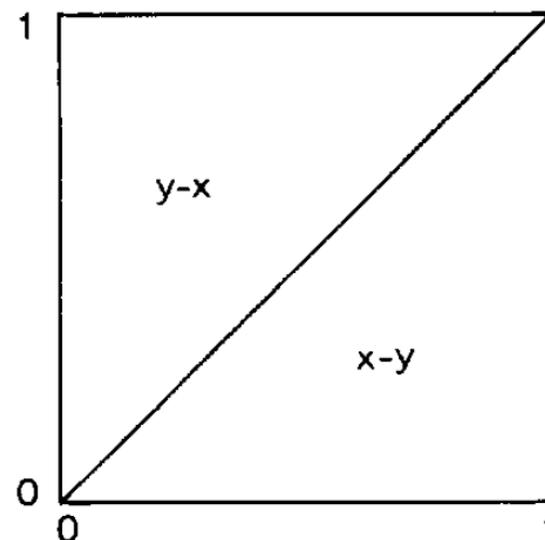


Fig. 9. Integrands for S_0 .

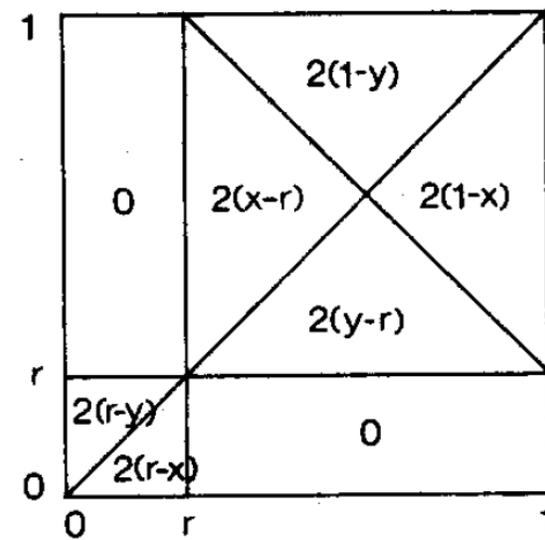


Fig. 10. Integrands for $P(r, 1)$.

10 数値計算例

・ペナルティの最小化

$$P(r, 1) = \frac{2r^3}{3} + \frac{(1-r)^3}{3} = \frac{1}{3}(1 - 3r + 3r^2 + r^3).$$

よって, $P(r, 1)$ は $r = \sqrt{2} - 1$ のとき,
最小値 $P(\sqrt{2} - 1, 1) = 0.11$ をとる.

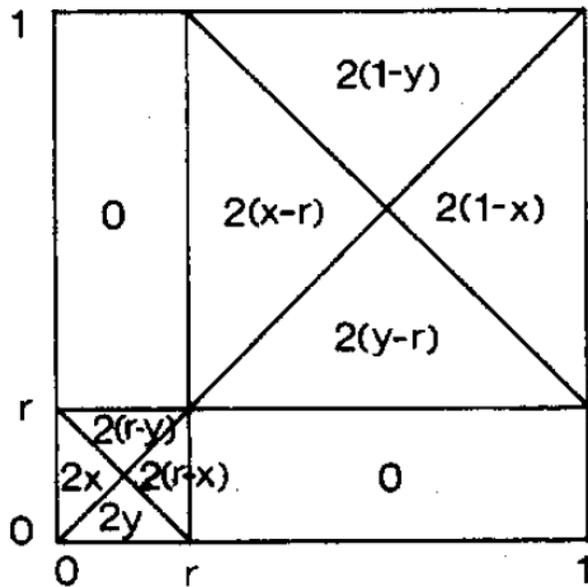
・図10におけるピラミッド2つの形状の違いから,
 $r \approx 0$ の環状道路を想定すると,

・比較

$$P(1) = \frac{2}{3} \doteq 0.67,$$

$$P(\sqrt{2} - 1, 1) = 2 - \frac{4\sqrt{2}}{3} \doteq 0.11,$$

$$P(0, \frac{1}{2}, 1) = \frac{1}{12} \doteq 0.083.$$



$$\begin{aligned} P(0, r, 1) &= \frac{1}{3}(r^3 + (1-r)^3) \\ &= \frac{1}{3}(3r^2 - 3r + 1). \end{aligned}$$

$P(0, r, 1)$ は $r = 0.5$ のとき,
最小値 $P(0, 0.5, 1) = 0.083$
をとる.

Fig. 11. Integrands for $P(0, r, 1)$.

⇒・ $R = 1$ のとき, 最適な内側環状
道路の半径は, $r = \sqrt{2} - 1$

・都心部に近すぎる環状道路を計画
しても, 2環状の場合と効果は変わらない

11

Competition and efficiency of private toll roads

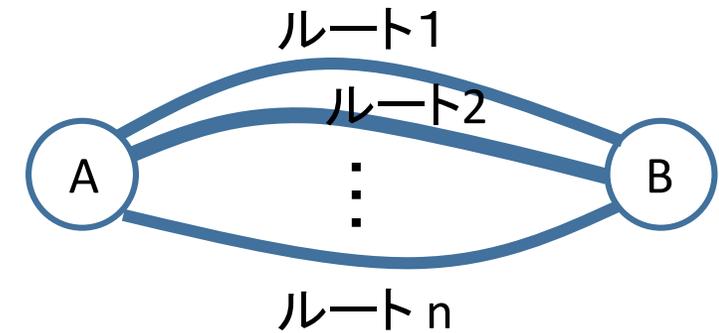
・F. Xiao らによる研究. Transportation Research Part B 41 (2007) 292-308

・背景) 道路の供給が市場主導になりつつある
道路会社の戦略的相互作用, 競争が生む非効率性を論じる必要性

・パラレルリンクをもつネットワーク上で, 民間が経営する対称的でない道路において,
通行料と道路容量を, 同時に選択する場合の, 解の性質を分析した

・やってること

- ① 企業が, 通行料と道路容量を同時に決めると, 渋滞の程度はどうか(競争が渋滞にあたえる影響)
- ② 通行料・道路容量選択ゲームにおけるナッシュ均衡と社会最適の関係性
- ③ 社会最適状態と均衡状態のかけ離れ具合を表す指標(非効率比)の提案



12 仮定 Assumption

- ・仮定1) 交通の速度は、交通量-道路容量比($\gamma_i = v_i/y_i$)のみに依存する

v_i : 交通量
 y_i : 道路容量(道路キャパシティ)

この仮定は、リンクパフォーマンス関数としてBPR関数が使われるのと同値

$$t_i(\gamma_i) = t_i^0 \left\{ 1.0 + a \left(\frac{v_i}{y_i} \right)^b \right\}.$$

$$t'_i = \frac{dt_i(\gamma_i)}{d\gamma_i} = y_i \frac{\partial t_i}{\partial v_i} > 0, \quad i \in N,$$

$$t''_i = \frac{d^2 t_i(\gamma_i)}{d\gamma_i^2} = y_i^2 \frac{\partial^2 t_i}{\partial v_i^2} > 0, \quad i \in N.$$

- ・仮定2) リンク建設費用は道路容量のみに比例する

リンク建設コスト関数 $I_i(y_i) = \kappa_i y_i$ κ_i : 単位キャピタルコスト

- ・また、総交通量を $Q = \sum_{i=1}^n v_i$ とし、需要関数は次の2項からなる.

$$B(Q) = u_i + \beta t_i(\gamma_i) \quad \forall i \in N. \quad u_i : \text{通行料} \quad (1)$$

時間を金額ベースに(時間価値)

13 補題 Lemma

・補題) $\delta_{ji} = \frac{\partial v_j}{\partial u_i}$, $\sigma_{ji} = \frac{\partial v_j}{\partial y_i}$, $\omega_i = \frac{\partial t_i}{\partial v_i} = \frac{t'_i}{y_i}$ とすると,

$$\begin{aligned} & \text{(i)} \quad \delta_{ii} < 0, \quad \sigma_{ii} > 0; \\ & \text{(ii)} \quad \delta_{ji} > 0, \quad \sigma_{ji} < 0, \quad \text{for } j \neq i; \\ & \text{(iii)} \quad \sigma_{ji} = (-\beta\gamma_i\omega_i)\delta_{ji} \quad \forall i, j \in N. \end{aligned} \tag{2}$$

・補題なので、証明は略しますが、それぞれの文字は以下のように表されます

$$\begin{aligned} \delta_{ii} &= \frac{1 - \frac{B'}{\beta} \sum_{j \neq i} \frac{1}{\omega_j}}{B' \omega_i \sum_{j \neq i} \frac{1}{\omega_j} + B' - \beta \omega_i}, & \sigma_{ii} &= -\beta \gamma_i \omega_i \left(\frac{1 - \frac{B'}{\beta} \sum_{j \neq i} \frac{1}{\omega_j}}{B' \omega_i \sum_{j \neq i} \frac{1}{\omega_j} + B' - \beta \omega_i} \right), \\ \delta_{ji} &= \frac{1}{\beta \omega_j} \frac{B'}{B' \omega_i \sum_{l \neq i} \frac{1}{\omega_l} + B' - \beta \omega_i}, \quad \text{for } j \neq i. & \sigma_{ji} &= -\frac{\omega_i}{\omega_j} \left(\frac{\gamma_i B'}{B' \omega_i \sum_{l \neq i} \frac{1}{\omega_l} + B' - \beta \omega_i} \right), \quad \text{for } j \neq i. \end{aligned}$$

14 ナッシュ均衡下での交通量－道路容量比

・命題1: ナッシュ均衡下では, 企業の通行料および道路容量選択は, 他企業の選択に無関係である

・企業は利潤関数を最大化

$$\pi_i(u_i, y_i) = \underbrace{v_i(u, y)}_{\text{交通量}} u_i - \underbrace{\eta \kappa_i y_i}_{\text{通行料 道路建設コスト}}$$

・道路容量と通行料で一階微分

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial y_i} = \sigma_{ii} u_i - \eta \kappa_i = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial u_i} = v_i + u_i \delta_{ii} = 0.$$

・(2), (3)式より, u_i を消去して,

$$\beta \gamma_i^* \omega_i^* v_i^* = \eta \kappa_i, \quad i \in N,$$

・ $\omega_i = \frac{\partial t_i}{\partial v_i} = \frac{t'_i}{y_i}$ であるから,

$$(\gamma_i^*)^2 \underbrace{t'_i(\gamma_i^*)}_{\text{一文字です}} = \frac{\eta \kappa_i}{\beta}, \quad i \in N, \quad (4)$$

⇒ 渋滞の程度を表す, 交通量-道路容量比 ($\gamma_i = v_i/y_i$) は, 所与の η, κ_i, β , リンクパフォーマンス関数にのみ依存する (=命題1)

15 社会最適下での交通量—道路容量比

- ・社会厚生関数の最大化

$$\max W(u, y) = \int_0^{\sum_{j=1}^n v_j(u, y)} B(\omega) d\omega - \beta \sum_{j=1}^n v_j(u, y) t_j(\gamma_j) - \sum_{j=1}^n \eta I(y_j),$$

需要関数の積分
利用者の時間損失コスト
総道路建設コスト

- ・道路容量と通行料で一階微分

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial y_i} &= B(Q) \sum_{j=1}^n \sigma_{ji} - \beta \left[\sum_{j=1}^n (\sigma_{ji} t_j) + \sum_{j=1, j \neq i}^n (v_j \omega_j \sigma_{ji}) \right] - \beta (v_i \omega_i \sigma_{ii} - \gamma_i^2 t'_i) - \eta \kappa_i, \\ &= B(Q) \sum_{j=1}^n \sigma_{ji} - \beta \sum_{j=1}^n (\sigma_{ji} t_j + v_j \omega_j \sigma_{ji}) + \beta \gamma_i^2 t'_i - \eta \kappa_i, \\ &= \sum_{j=1}^n \sigma_{ji} (B - \beta t_j - \beta \gamma_j t'_j) + \beta \gamma_i^2 t'_i - \eta \kappa_i = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\frac{\partial W}{\partial u_i} = B(Q) \sum_{j=1}^n \delta_{ji} - \beta \sum_{j=1}^n (\delta_{ji} t_j + v_j \omega_j \delta_{ji}) = \sum_{j=1}^n \delta_{ji} (B - \beta t_j - \beta \gamma_j t'_j) = 0. \tag{6}$$

16 社会最適下での交通量-道路容量比

・命題2: 社会最適下の交通量-道路容量比と, ナッシュ均衡下の交通量-道路容量比は等しい

・(2), (6)式より, δ_{ji} を σ_{ji} に置きかえて,

$$\sum_{j=1}^n \sigma_{ji}(B - \beta t_j - \beta \gamma_j t'_j) = 0,$$

・これを(5)式に代入して,

$$\gamma_i^{s2} t'_i(\gamma_i^s) = \frac{\eta \kappa_i}{\beta}, \quad (7)$$

cf. (4)式 $(\gamma_i^*)^2 t'_i(\gamma_i^*) = \frac{\eta \kappa_i}{\beta}, \quad i \in N,$

・直観的解釈

ナッシュ均衡下, 利益を最大化する企業は, 道路キャパを小さくし, 通行料を上げようとする.
すると, 交通量は小さくなる.

社会最適下, 計画者は, 道路キャパを大きくし, 通行料を下げようとする.
すると, 交通量は大きくなる.

その結果, **交通量-道路容量比は**, 2つの状況下で同じになり得る

・注) 経済学では、「ナッシュ均衡」の状態は「パレート最適」な状態とは限らない(交通量を見てください)

・社会最適の一階微分(6)式で, $\xi_i = B - \beta t_i - \beta \gamma_i t'_i$ として, 補題を代入すると,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{B'} - \sum_{l \neq i} \frac{1}{\beta \omega_l} \right) \xi_i + \sum_{l \neq i} \frac{\xi_l}{\beta \omega_l} &= \frac{1}{B'} \xi_i - \left(\sum_{l \neq i} \frac{1}{\beta \omega_l} \xi_i + \frac{\xi_i}{\beta \omega_i} \right) + \left(\frac{\xi_i}{\beta \omega_i} + \sum_{l \neq i} \frac{\xi_l}{\beta \omega_l} \right) \\ &= \underbrace{\left(\frac{1}{B'} - \sum_l \frac{1}{\beta \omega_l} \right) \xi_i}_{\text{項①}} + \underbrace{\sum_l \frac{\xi_l}{\beta \omega_l}}_{\text{項②}} = 0 \quad \forall i \in N. \end{aligned} \quad (8)$$

・(8)式は, すべてのリンクについて成り立ち, 項①と項②はリンク番号に関係なく共通なので,

$$\xi_i = \xi_j \quad \forall i, j \in N, i \neq j. \quad (9) \quad \text{が成立する.}$$

・(9)を(8)に代入して,

$$\frac{1}{B'} \xi_i = 0 \quad \forall i \in N.$$

・したがって,

$$\xi_i = B(Q) - \beta t_i(\gamma_i) - \beta t'_i \gamma_i = 0 \quad \forall i \in N. \quad (10)$$

18 ナッシュと社会最適下の通行料

・ここで、(1)を(10)に代入すると、
$$u_i^s = \beta t'_i(\gamma_i^s) \gamma_i^s = \frac{\eta \kappa_i}{\gamma_i^s}.$$
 (社会最適下での通行料)

・一方、ナッシュ均衡下では、(3)式に補題を代入して、
$$u_i^* = \frac{\eta \kappa_i}{\sigma_{ii}} = \frac{\eta \kappa_i}{\gamma_i^*} \left[1 + \frac{B'(Q^*)}{\omega_i^* \left(B'(Q^*) \sum_{j \neq i} \frac{1}{\omega_j^*} - \beta \right)} \right].$$

・したがって、通行料の関係式(11)が導かれる。
$$u_i^* = u_i^s \left[1 + \frac{B'(Q^*)}{\omega_i^* \left(B'(Q^*) \sum_{j \neq i} \frac{1}{\omega_j^*} - \beta \right)} \right]. \quad (11)$$

⇒ ナッシュ均衡時に設定される通行料は、社会最適時に設定される通行料より高くなることが分かる

・命題3: ナッシュ均衡下の総交通量は, 社会最適下の総交通量より小さい

・命題2と(11)を, (1)式に代入して,

$$B(Q^*) = u_i^s + \frac{u_i^s B'(Q^*)}{\omega_i^* \left(B'(Q^*) \sum_{j \neq i} \frac{1}{\omega_j^*} - \beta \right)} + \beta t_i(\gamma_i^s) = B(Q^s) + \frac{u_i^s B'(Q^*)}{\omega_i^* \left(B'(Q^*) \sum_{j \neq i} \frac{1}{\omega_j^*} - \beta \right)}. \quad (12)$$

・需要関数 $B(Q)$ は減少関数であり, $B(Q^s) < B(Q^*)$ なので, $Q^* < Q^s$

⇒ つまり, 企業が自社の利益だけを最大化した場合(ナッシュ均衡)の総交通量は, 社会最適な状態よりも, 少なくなる。(=非効率的と呼ぶ)

・命題4:リンク数が無限大(特定のリンク交通量が0)に近づくならば,
ナッシュ均衡下の通行料は, 社会最適な状態に収束する.

・ $\omega_i = \frac{\partial t_i}{\partial v_i} = \frac{t'_i}{y_i}$ であるから, $\frac{1}{\omega_i} = \frac{\partial v_i}{\partial t_i} = \frac{y_i}{t'_i}$ であり,
また特定のリンク交通量が0に近づくとき, $y_i^* = \gamma_i^* v_i^* \rightarrow 0$. なので, $\lim_{v_i^* \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_i^*} = \lim_{y_i^* \rightarrow 0} \frac{y_i^*}{t'_i(\gamma_i^*)} = 0$.

・これを, 通行料の関係式(11) $u_i^* = u_i^s \left[1 + \frac{B'(Q^*)}{\omega_i^* \left(B'(Q^*) \sum_{j \neq i} \frac{1}{\omega_j^*} - \beta \right)} \right]$ に適用すると,

$\lim_{v^* \rightarrow 0} u_i^* = u_i^s$ が得られる.

⇒ 各リンク交通量が0に近づく(道路経営企業が無限大存在する完全競争)ならば, 社会最適状態と同じ状態に収束する.

21 社会最適下における各リンクの交通量

・(10)式より, 社会最適下では次式が成り立つ.

$$B(Q^s) = \beta [t'_i(\gamma_i^s)\gamma_i^s + t_i(\gamma_i^s)]. \quad (13)$$

・もし, $B(Q^s) \leq \beta t'_i(\gamma_i^s)\gamma_i^s + \beta t_i(\gamma_i^s)$, が成り立つリンクがあるとすると, そのようなコストのかかるリンクは利用者に選ばれず, 交通量が0になる. したがって, そのようなリンクは建設するに値しない.

・社会的に価値のあるリンク(建設されるリンク)は

$$j = \arg \min_{i \in N} [t'_i(\gamma_i^s)\gamma_i^s + t_i(\gamma_i^s)]. \quad (14) \quad \text{を満たしている.}$$

・したがって, 社会最適下における各リンクの交通量は次のようにまとめられる.

$$v_i = \begin{cases} B^{-1}(\min_{i \in N} \beta [t'_i(\gamma_i^s)\gamma_i^s + t_i(\gamma_i^s)]), & i = j, \\ 0 & \forall i \in N, i \neq j. \end{cases} \quad (15)$$

・ここからは,

ネットワークのすべてのリンクが(13)式を満たすとき, ナッシュ均衡と社会最適状態の社会厚生を比べることで, 有料道路寡占状態の非効率性について論じる.

非効率性を表す指標として, $\rho = \frac{W^S}{W^*}$ (非効率性比)を用いる.

この値が大きいほど, ナッシュ均衡と社会最適状態は外れているので, 非効率である.

・社会厚生は, スライドP15より,

$$W(u, y) = \int_0^{\sum_{i=1}^n v_i(u, y)} B(\omega) d\omega - \beta \sum_{i=1}^n v_i(u, y) t_i(\gamma_i) - \sum_{i=1}^n \eta I(y_i).$$

・これに $\gamma_i = v_i/y_i$ と, (7)式を代入して,

$$W = \int_0^Q B(\omega) d\omega - \beta \sum_{i=1}^n v_i [t_i(\gamma_i) + t'_i(\gamma_i) \gamma_i]. \quad (16)$$

・ $\beta[t_i(\gamma_i^s) + t'_i(\gamma_i^s)\gamma_i^s] = \beta[t_i(\gamma_i^*) + t'_i(\gamma_i^*)\gamma_i^*] = B(Q^s)$ より,

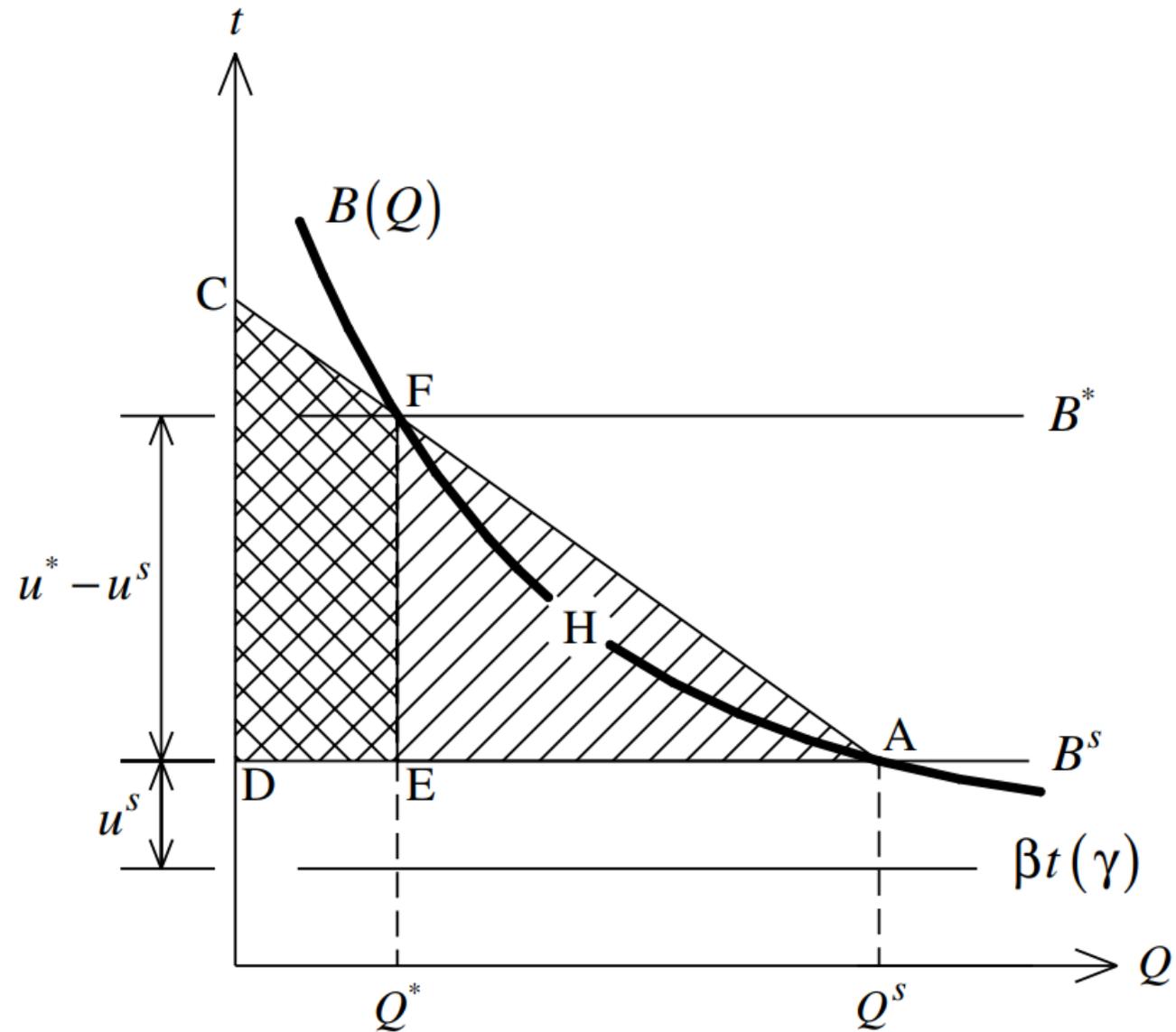
$$W = \int_0^Q B(\omega) d\omega - QB^s.$$

・したがって,

$$W^s - W^* = \int_{Q^*}^{Q^s} B(\omega) d\omega - B^s(Q^s - Q^*). \quad (17)$$

・(12)式と, $u_i^s = \beta t'_i(\gamma_i^s)\gamma_i^s = \beta t'_i(\gamma_i^*)\gamma_i^*$, $\omega_i^* = (1/y_i^*)t'_i(\gamma_i^*) = (\gamma_i^*/v_i^*)t'_i(\gamma_i^*)$, を用いて,

$$B^* - B^s = \frac{u_i^s B'(Q^*)}{\omega_i^* \left(B'(Q^*) \sum_{j \neq i} \frac{1}{\omega_j^*} - \beta \right)} = \frac{\beta v_i^* B'(Q^*)}{B'(Q^*) \sum_{j \neq i} \frac{1}{\omega_j^*} - \beta}. \quad (18)$$



・したがって、 $W^S - W^*$ は、領域AHFEなので、

$$W^S - W^* \leq \frac{1}{2}(B^S + B^*)(Q^S - Q^*) - B^S(Q^S - Q^*) = \frac{1}{2}(B^* - B^S)(Q^S - Q^*). \quad (19)$$

・ W^* は、需要関数の $0 \sim Q^*$ の積分から下の四角形を引いたものであるから、

$$W^* = \int_0^{Q^*} B(\omega) d\omega - B^S Q^* \geq \frac{1}{2} Q^* [2B^* - Q^* B'(Q^*)] - B^S Q^* = Q^* \left[B^* - B^S - \frac{1}{2} B'(Q^*) Q^* \right].$$

・図より、 W^* は、台形CDEFより大きく、

$$W^* \geq Q^*(B^* - B^S) + \frac{1}{2} (Q^*)^2 \frac{B^* - B^S}{Q^S - Q^*} \quad (20)$$

- ・ 非効率比の定義から,

$$\rho = 1 + \frac{W^s - W^*}{W^*} \leq 1 + \frac{A_{\overline{AEF}}}{A_{\overline{CDEF}}}. \quad (21)$$

- ・ (19)(20)式を代入して,

$$\rho \leq 1 + \left(\frac{Q^s}{Q^*} - 1 \right)^2 \frac{1}{2 \left(\frac{Q^s}{Q^*} - 1 \right) + 1}.$$

- ・ $\varepsilon = \frac{Q^s}{Q^*}$, とすると,

$$\rho \leq \frac{\varepsilon^2}{2\varepsilon - 1}. \quad (22)$$

- ・ 需要関数が凹関数のときも, 同様にして, 非効率比の範囲が導ける.

27 非効率比に対するルート数の影響

・ 時間価値を, $\beta = 1$ とすると,

$$v_i = \frac{Q}{n} \quad \forall i \in N,$$
$$\frac{1}{\omega_i} = \frac{v_i}{\gamma t'} = \frac{Q}{n\gamma t'} \quad \forall i \in N,$$

・ (18)式は,

$$B^* - B^s = \frac{1}{\frac{n-1}{\bar{\gamma}t'(\bar{\gamma})} - \frac{n}{Q^*B'(Q^*)}}. \quad (23)$$

・ 需要関数がexp型のとき, $B(Q) = -b^{-1}\ln(Q/a)$

・ (23)式より,

$$\ln\left(\frac{Q^s}{Q^*}\right) = \frac{1}{\frac{n-1}{b\bar{\gamma}t'(\bar{\gamma})} + n}. \quad (24)$$

・ 簡便のために, パラメータ μ をおく

・ (24)式より,

$$\mu = \frac{1}{b\bar{\gamma}t'(\bar{\gamma})}.$$
$$\ln\left(\frac{Q^s}{Q^*}\right) = \frac{1}{\mu(n-1) + n}.$$

28 非効率比に対するルート数の影響

・ したがって, $\varepsilon = e^{\frac{1}{\mu(n-1)+n}}$.

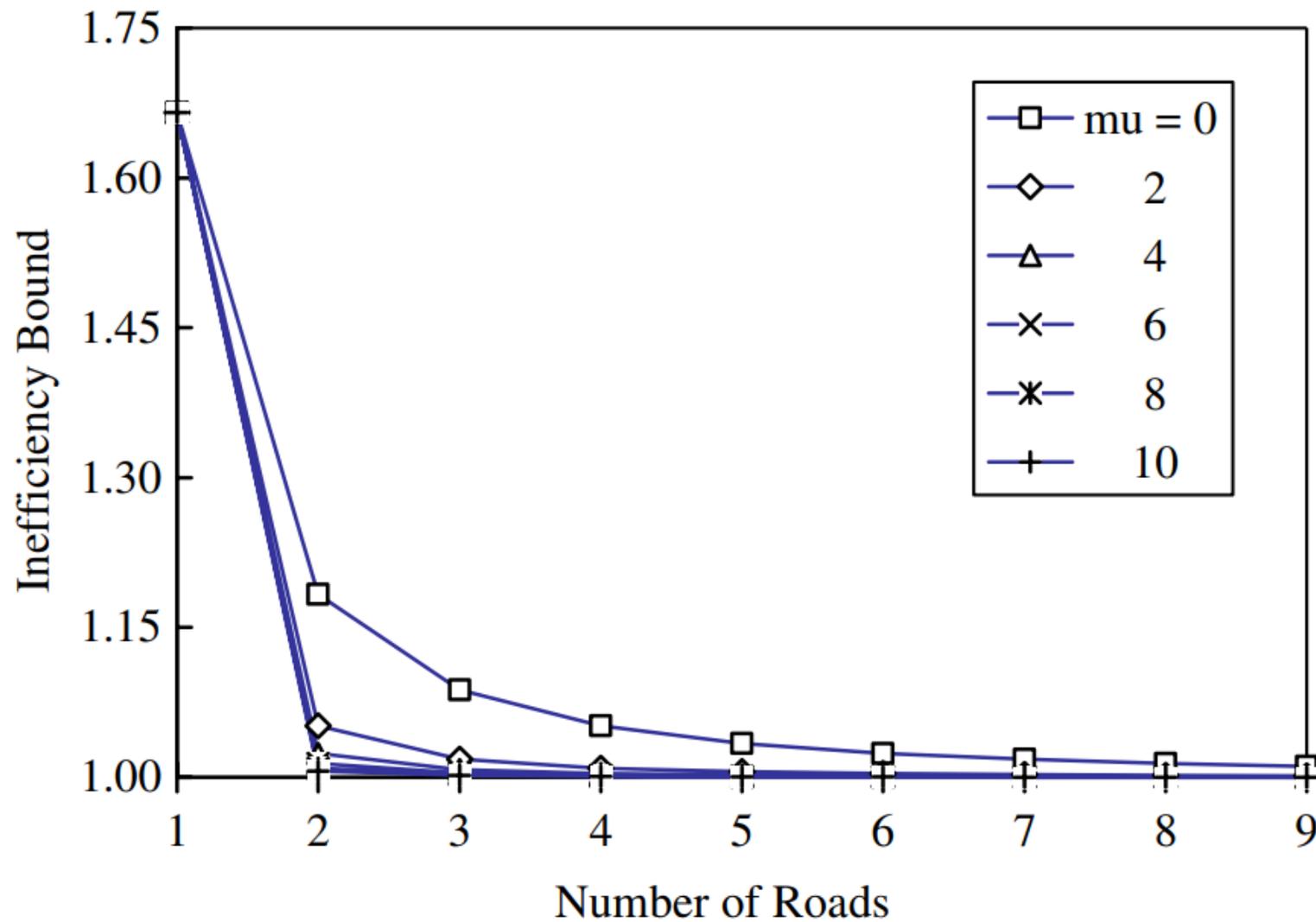
・ 非効率比の上界を表す(22)式は,
$$\rho \leq \frac{e^{\frac{2}{\mu(n-1)+n}}}{2e^{\frac{1}{\mu(n-1)+n}} - 1}. \quad (25)$$

・ この n を無限大にとばすと, 非効率比は 1 に近づく.

・ ちなみに, パラメータ μ は社会最適状態の需要弾力性 E^s に依る

$$\mu = \frac{\lambda}{|E^s|} > 0,$$

29 非効率比に対するルート数の影響



- ・やってること

- ① 企業が、通行料と道路容量を同時に決めると、渋滞の程度はどうか(競争が渋滞にあたえる影響)
→同時ゲームでは、寡占状態が渋滞の要因にはならない

- ② 通行料・道路容量選択ゲームにおけるナッシュ均衡と社会最適の関係性

- ③ 社会最適状態と均衡状態のかけ離れ具合を表す指標(非効率比)の提案
→独占から寡占へ移行することで、非効率比は大きく改善する。

- コストに対して、需要がセンシティブなほど、(μ が0に近づくほど)、上界は大きくなる