新・ゲーム理論輪読ゼミ

12章：τ値
13章：フォン・ノイマン／モルゲンシュテルン解
14章：交渉集合

2015夏合宿　　M2　芝原

新・ゲーム理論輪読ゼミ

12章：τ値
13章：フォン・ノイマン／モルゲンシュテルン解
14章：交渉集合

3 もくじ：12章

12章：τ 値

12.1　τ 値の定義

・最大限度額
・残余
・最小権利額
・ギャップ関数
・許容範囲
・準平衡ゲーム
・τ 値の定義

τ 値を定義するための概念

12.2　τ 値の性質

・残余均等配分解
・比例配分解
・τ 値は配分である
・その他の性質

4 最大限度額

■ 最大限度額：自分以外の他の全員からなる提携に参加することで生まれる提携値の増分.

$$M_i = \underbrace{v(N)}_{\text{全体提携の提携値}} - \underbrace{v(N-\{i\})}_{\text{自分以外の全プレイヤーが提携しているときの提携値}} \qquad \forall i \in N$$

$$M = (M_1, \cdots, M_n) \qquad \text{（最大限ベクトル）}$$

最大限度額は,
全体提携におけるプレイヤー i の取り分の最大値

5　残余／最小権利額

- 残余：プレイヤー i を含む提携 S で，プレイヤー i 以外の提携内の他のメンバーの最大限度額を提携値から引いた残りの値のこと.

$$R_i(S,i) = v(S) - \sum_{j \in S-\{i\}} \underline{M_j}$$

プレイヤー j の最大限度額

プレイヤー i は，i を含む各提携（2^{n-1}通り）に参加した場合の残余を考えることとで，全提携で最大の残余を確保できる．→最小権利額の定義

- 最小権利額：プレイヤー i の取りうる最大の残余のこと.個人合理性を満たす.

$$m_i = \max\{R_i(S,i) : S \subset N, i \in S\}$$

$$\geq R_i(\{i\},i) = v(i) - 0 = v(i) \qquad \forall i \in N$$

$$m = (m_1, \cdots, m_n)$$ （最小限ベクトル）

6 ギャップ関数

が，何かしら提携が形成されても，全員が最大限度額を獲得できるとは限らない．．．

- ギャップ関数：提携内の全メンバーの最大限度額の和と，提携値の差（最大限ベクトル M に対する提携 S としての要求の負の値）

$$g(S) \equiv \sum_{i \in S} \underline{M_i} - v(S) = -e(M;S) \qquad \forall S \subset N$$

プレイヤー i の最大限度額

$$g(\emptyset) = 0$$

定理1：常に $g(N-\{i\}) = g(N)$ が成り立つ．

証明．

$$\begin{aligned} g(N-\{i\}) &= \sum_{j \in N-\{i\}} M_j - v(N-\{i\}) \\ &= \sum_{j \in N} M_j - M_i - v(N-\{i\}) \\ &= \sum_{j \in N} M_j - \left(v(N) - v(N-\{i\})\right) - v(N-\{i\}) \\ &= \sum_{j \in N} M_j - v(N) = g(N) \end{aligned}$$

7 許容範囲

- 許容範囲：プレイヤー i を含む提携 S のギャップ関数の最小値

$$\lambda_i = \min\{g(S)\}$$

$$\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$$ （許容ベクトル）

定理2：常に　$\lambda_i = M_i - m_i$　が成り立つ.

証明.

$$\begin{aligned}
\lambda_i &= \min\{g(S) : S \subset N, i \in S\} \\
&= \min\left\{\sum_{j\in S} M_j - v(S) : S \subset N, i \in S\right\} \\
&= -\max\left\{v(S) - \sum_{j\in S} M_j\right\} \\
&= M_i - \max\left\{v(S) - \sum_{j\in S-\{i\}} M_j\right\} \\
&= M_i - m_i \qquad \forall i \in N
\end{aligned}$$

許容範囲は，最大限度額と最小権利額の距離

残余最大＝ギャップ最小となる提携Sを選ぶことで，獲得可能な利得の範囲を最大にできる.

8 （例）最小権利額を求める

$N=\{1,2,3\}$

$v(\varnothing)=v(1)=v(2)=v(3)=0$

$v(12)=60, v(13)=70, v(23)=80$

$v(123)=120$

$M_1=v(123)-v(23)=120-80=40$

$M_2=v(123)-v(13)=120-70=50$

$M_3=v(123)-v(12)=120-60=60$

$g(\varnothing)=0-v(\varnothing)=0$

$g(1)=M_1-v(1)=40$

$g(2)=M_2-v(2)=50$

$g(3)=M_3-v(3)=60$

$$g(12)=\sum_{i\in\{1,2\}} M_i - v(12)=30$$

$$g(13)=\sum_{i\in\{1,3\}} M_i - v(13)=30$$

$$g(23)=\sum_{i\in\{2,3\}} M_i - v(23)=30$$

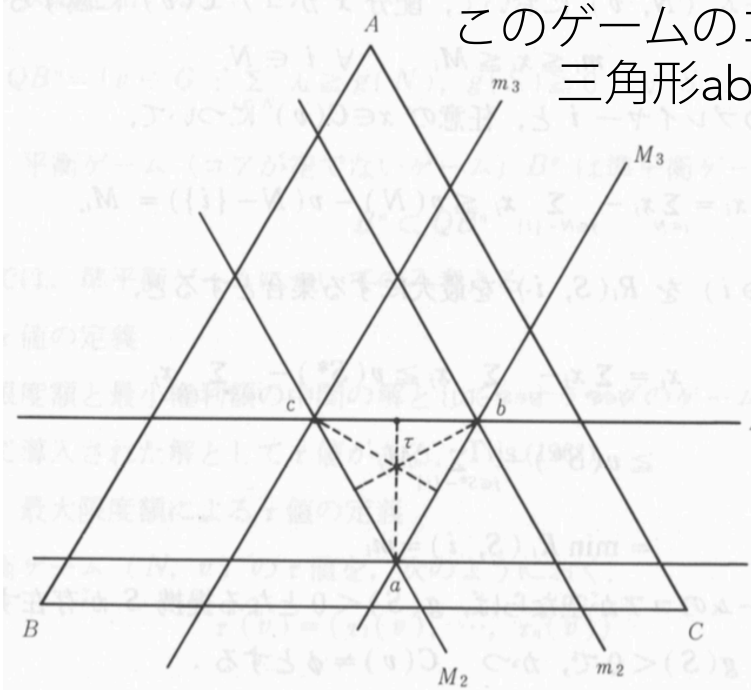
$\lambda_1=\min\{g(1),g(12),g(13),g(23)\}=30$

$\lambda_2=30, \lambda_3=30$

$m_i=M_i-\lambda_i$

$\boxed{m=(10,20,30)}$

このゲームのコアは
三角形abc



$a=(m_1,\ M_2,\ M_3)=(10,\ 50,\ 60)$

$b=(M_1,\ m_2,\ M_3)=(40,\ 20,\ 60)$

$c=(M_1,\ M_2,\ m_3)=(40,\ 50,\ 30)$

$\tau(v)=(30,\ 40,\ 50)$,　仁 $=(30,\ 40,\ 50)$

$\phi(v)=(35,\ 40,\ 45)$,　相対仁 $=(32,\ 40,\ 48)$

9 準平衡ゲーム

■ 準平衡ゲーム：次の3つの性質を持つゲームのこと.

1. 全プレイヤーの最小権利額は，その最大限度額を越えない.
2. 全プレイヤーの最小権利額の和は, $v(N)$ を越えない.
3. 全プレイヤーの最大限度額の和は，少なくとも $v(N)$ である.

ゲームの集合

$$QB^n = \{v \in G : \underbrace{m_i \leq M_i}_{\text{性質1}} \quad \forall i \in N, \underbrace{\sum_{i \in N} m_i \leq v(N) \leq \sum_{i \in N} M_i}_{\text{性質2と性質3}}\}$$

準平衡ゲームのクラス

ギャップ関数を用いると次のように書ける.

$\boxed{\text{以下では準平衡ゲームのみ考える.}}$

$$QB^n = \{v \in G : m_i \leq M_i \quad \sum_{i \in N} \lambda_i \geq g(N), g(S) \geq 0 \quad \forall S \subset N\}$$

10 τ 値の定義

■ τ 値

- 最大限度額と最小権利額の中間の解という概念.
- オランダのゲーム理論家タイツ（Tijs(1981)）が導入.

2つの定義がある

最大限度額による定義 ⇔ 最小権利額による定義

$g(N)=0$ のとき

$$\tau_i(v)=M_i \qquad\qquad \tau_i(v)=m_i=M_i$$

$g(N)>0$ のとき

$\forall i \in N$

$$\tau_i(v)=\underbrace{M_i}_{\text{最大限度額}}-\underbrace{\frac{\lambda_i}{\sum_{i\in N}\lambda_i}}_{\text{各プレイヤーの許容範囲の比}}\underbrace{g(N)}_{\text{全体提携の額と獲得可能額のギャップ}}$$

$$\tau_i(v)=\underbrace{m_i}_{\text{最小権利額を確保}}+\underbrace{\frac{\lambda_i}{\sum_{i\in N}\lambda_i}}_{\text{各プレイヤーの許容範囲の比}}\underbrace{[v(N)-\sum_{i\in N}m_i]}_{\text{全体での残り額}}$$

$$g(N)\equiv\sum_{i\in N}M_i-v(N)$$

最小権利額保証性

11 τ 値の定義

※τ 値はギャップ関数と最大限度額から求めるほうが容易

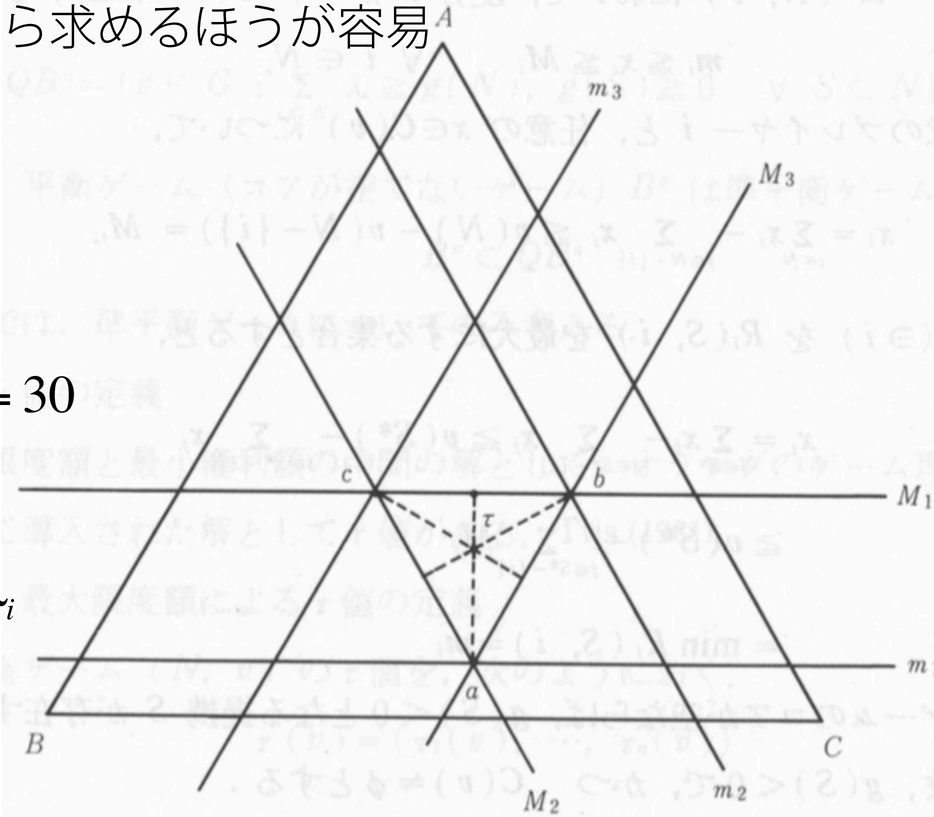
$$M=(40,50,60)\qquad \lambda=(30,30,30)$$

$$g(N)=\sum_{i\in N}M_i-v(N)=40+50+60-120=30$$

$$\tau_1(v)=M_i-\frac{\lambda_i}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}g(N)=M_i-\frac{30}{90}\lambda_i$$

$$\boxed{\tau(v)=(30,40,50)}$$

※このゲームでは，τ 値は仁に等しい．



$a=(m_1,\ M_2,\ M_3)=(10,\ 50,\ 60)$

$b=(M_1,\ m_2,\ M_3)=(40,\ 20,\ 60)$

$c=(M_1,\ M_2,\ m_3)=(40,\ 50,\ 30)$

$\tau(v)=(30,\ 40,\ 50)$，　　仁$=(30,\ 40,\ 50)$

$\phi(v)=(35,\ 40,\ 45)$，相対仁$=(32,\ 40,\ 48)$

12 τ値の性質

1) 残余均等配分解
2) 比例配分解
3) τ値は配分である

特にこの3つを説明します.

4) ダミプレイヤー性
5) 利得測定法からの独立性（戦略上同等のもとでの共変性）
6) 対称性（無名性）
7) 最小権利保証性を満たす
8) 限定比例性を満たす
9) 準平衡ゲームで効率性，最小権利保証性，限定比例性を満たす解はτ値のみ
10) 安定性
11) 加法性・単調性を満たさない

13 (1) τ 値と残余均等配分解

ゲームが， $0 \le g(N) \le g(S) \quad \forall S \subset N, S \ne \emptyset$ を満たすとき，

全体提携のギャップ

$$\tau_i(v) = M_i - \boxed{\frac{1}{n}}\left[\sum_{i \in N} M_i - v(N)\right] \quad \forall i \in N$$

全プレイヤーで均等に配分

τ 値は，残余均等配分解（不足額均等配分解）になる．

14 (2) τ 値と比例配分解

- 半凸ゲーム： $0 \le g(i) \le g(S) \quad \forall i \in N \quad \forall S \subset N, S \ne \varnothing$ を満たすゲーム

提携なしの場合のギャップ

許容範囲を考えると，，，

$$
\begin{aligned}
\lambda_i &= \min\left[g(S) : S \subset N, i \in S \right] \\
&= g(i) = M_i - v(i) \qquad\qquad \forall i \in N
\end{aligned}
$$

よって，あるゲームが半凸ゲームである条件は以下の2つに置き換えられる．

$$M_i \ge v(i) \qquad\qquad \forall i \in N$$

$$v(S) - \sum_{j \in S - \{i\}} M_j \le v(i) \qquad \forall S \subset N, i \in S$$

15 (2) τ 値と比例配分解

配分の集合が空でない半凸ゲームで，かつ　$g(N) > 0$　なら，　τ 値は

$$\tau_i(v) = M_i - \boxed{\frac{g_i}{\sum_{i \in N} g_i}} g(N) \longleftarrow \tau_i(v) = M_i - \frac{\lambda_i}{\sum_{i \in N} \lambda_i} g(N)$$

比例配分解

ギャップ関数の比

ゼロ正規化した半凸ゲームでは，

半凸ゲームの条件2　$v(S) - \sum_{j \in S - \{i\}} M_j \leq v(i)$

$$m_i = \max\{R_i(S,i) : S \subset N, i \in S\}$$

$$= \max\left[v(S) - \sum_{j \in S - \{i\}} M_j \right] = v(i) = 0$$

最小権利額による定義から，

$$\tau_i(v) = \frac{M_i}{\sum_{i \in N} M_i} v(N)$$

※ゼロ正規化3人ゲームの相対仁は比例配分解だから，相対仁とτ値は一致する．

16 （例）半凸ゲームの τ 値

$$N=\{1,2,3\}$$
$$v(\varnothing)=v(1)=v(2)=v(3)=0$$
$$v(12)=20, v(13)=40, v(23)=80$$
$$v(123)=120$$
$$M_1=v(123)-v(23)=120-80=40$$
$$M_2=v(123)-v(13)=120-40=80$$
$$M_3=v(123)-v(12)=120-20=100$$

$$g(\varnothing)=0-v(\varnothing)=0$$
$$g(1)=M_1-v(1)=40$$
$$g(2)=M_2-v(2)=80$$
$$g(3)=M_3-v(3)=100$$
$$g(12)=g(13)=g(23)=g(123)=100$$

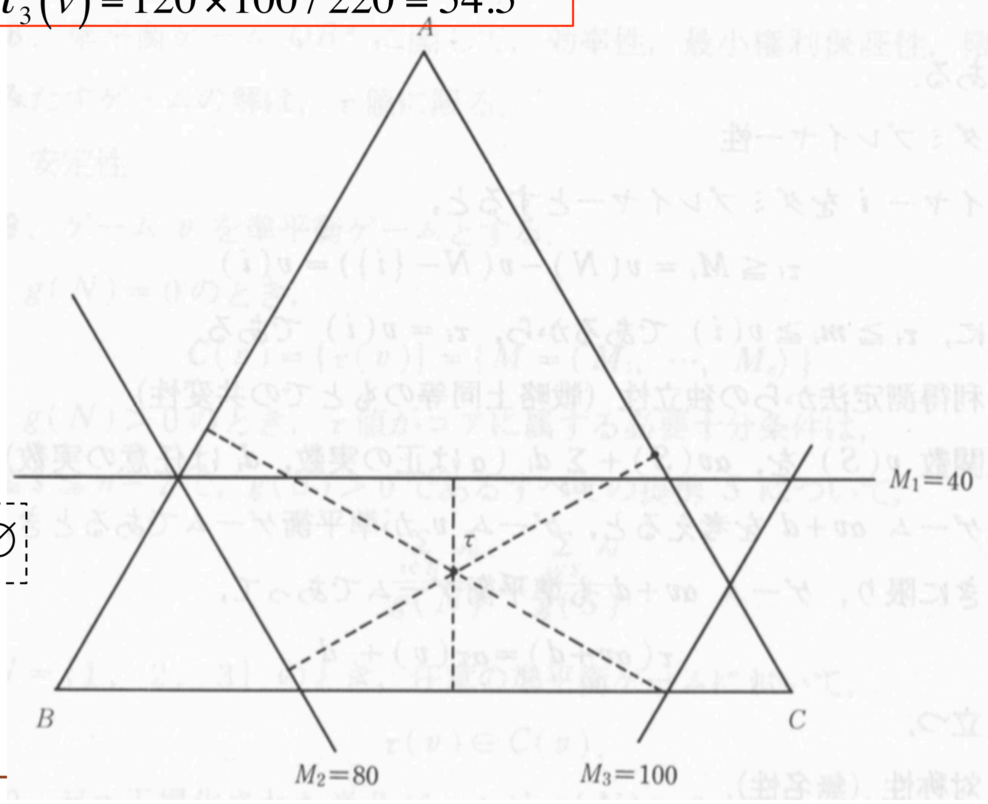
$$0\le g(i)\le g(S)\quad \forall i\in N\quad \forall S\subset N, S\ne\varnothing$$

よって，これは半凸ゲーム.

$$\lambda=(40,80,100)$$
$$m=(0,0,0)$$

$$\tau_i(v)=m_i+\frac{\lambda_i}{\sum_{i\in N}\lambda_i}[v(N)-\sum_{i\in N}m_i]$$

$$\tau_1(v)=120\times 40/220=21.8$$
$$\tau_2(v)=120\times 80/220=43.6$$
$$\tau_3(v)=120\times 100/220=54.5$$



17 (3) τ 値は配分である

■ τ 値は個人合理性と全体合理性をみたしている $\left(\tau_i \geq v(i)\right)$ から，配分である.

定義を書き直すと，，，

$$\tau_i = \left\{1 - \frac{g(N)}{\sum_{i \in N} \lambda_i}\right\} M_i + \frac{g(N)}{\sum_{i \in N} \lambda_i} m_i$$

■ τ 値は最小権利ベクトルと最大限ベクトルを結ぶ直線状の，全体合理性をみたす超平面上にある.

$$H = \{x \in R^n, \sum_{i \in N} x_i = v(N)\}$$

18　τ 値のその他の性質

4)　**ダミプレイヤー性**：プレイヤー i がダミプレイヤーなら，

$$\tau_i \le M_i = v(N) - v(N-\{i\}) = v(i) \qquad \tau_i \ge m_i \ge v(i) \qquad \therefore \tau_i = v(i)$$

5)　**利得測定法からの独立性（戦略上同等のもとでの共変性）**

特性関数 $v(S)$を　$av(S)+\sum_{i\in S} d_i$　と変換したゲーム $av+d$ を考えると，

ゲーム v が準平衡ゲームであれば，ゲーム $av+d$ も準平衡ゲームで，

$$\tau(\alpha v + d) = \alpha\tau(v) + d$$

が成り立つ.

6)　**対称性（無名性）**：プレイヤーの番号を付け替えても本質的に変わらない.

7)　**最小権利保証性**：各プレイヤーの τ 値は最小権利額 m_i を確保.

8)　**限定比例性**：最小権利額=0なら，最大限度額の倍数になる.

9)　**準平衡ゲームで効率性，最小権利保証性，限定比例性を満たす解は τ 値のみ**

10)　**安定性**：プレイヤー数が2,3のときは τ 値はコアに属するが，

4人以上のときは必ずしもコアに属せず，安定ではない.

→ τ 値は必ずしも安定な解ではない.

11)　**加法性・単調性を満たさない**

19 τ値の性質のまとめ

- τ値はシャープレイ値と仁の中間的な性質で，提携合理的な利得を求める交渉では不安定な解ではないか.
- 最大限度額と最小権利額を用いた解で，単純で理解しやすいが，十分に納得のいく解とは言えない.
- コアの性質を知るには有効.

新・ゲーム理論輪読ゼミ

12章：τ値
13章：フォン・ノイマン／モルゲンシュテルン解
14章：交渉集合

もくじ：13章

13章：フォン・ノイマン／モルゲンシュテルン解

13.1　安定集合

・フォン・ノイマン／モルゲンシュテルン解
　　ー 内部安定性
　　ー 外部支配性

・定和3人ゲームの対称解
・定和3人ゲームの差別解
・定和3人ゲームの安定集合

定義

応用

どのように満たされ,
解がが形成されるか.

13.2　非定和3人ゲームの解

・交渉曲線
・コアが空な非定和3人ゲームの解
・コアが空でない非定和3人ゲームの解
・τ 値は配分である
・その他の性質

13.3　解と行動基準

22 フォン・ノイマン／モルゲンシュテルン解

- 特性関数はフォン・ノイマン／モルゲンシュテルン型特性関数で定義され，優加法性を満たすと仮定する．

- 配分 A の部分集合 K が次の2つの性質を満たす時， K を**フォン・ノイマン／モルゲンシュテルン解（安定集合）**という．
  1. **内部安定性**：配分 x と配分 y が互いを支配しない．
  2. **外部支配性**：K に属さない任意の配分は，K に属する少なくとも1つの配分に支配される．

※一意な配分を定める解でなく，配分の集合として定義された概念．

※「すべてのゲーム理論の解概念は，非協力ゲームのナッシュ均衡の理論も含めて，この解に帰ってゆく」

23 定和3人ゲームの対称解

■ 多数決3人ゲームの例

$$N = \{1,2,3\}$$

$$v(\varnothing) = v(1) = v(2) = v(3) = 0$$

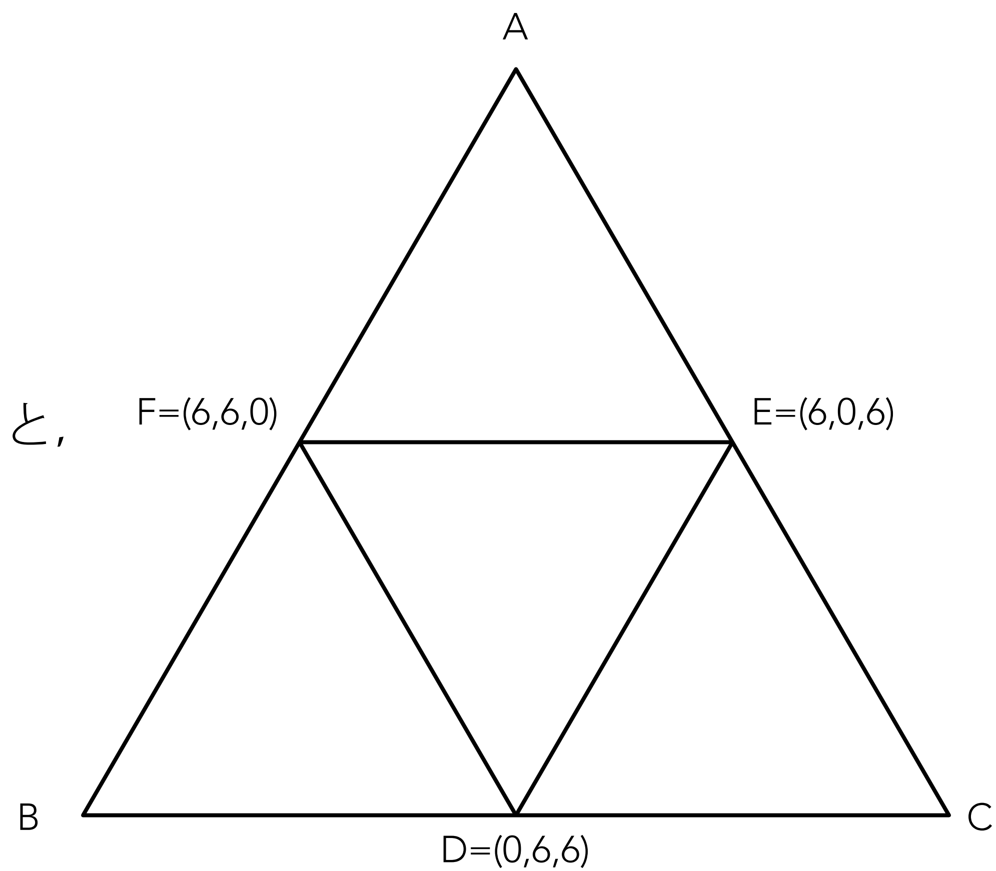
$$v(12) = v(13) = v(23) = 12$$

$$v(123) = 12$$

多数決でゲームに決着がつくとすると，
(1,2)，(1,3)，(2,3)の3通りの提携が
多数派になりうる．つまり，

$$K = \{(0,6,6,),(6,0,6),(6,6,0)\}$$

右の三角形DEF内の配分の集合が，
先の2つの性質を満たすかを考える．



24 定和3人ゲームの対称解

■ 多数決3人ゲームの例

1. 内部安定性

三角形DEFに属する2つの配分 x と y について,

$x_3 = y_3$　　$x_1 > y_1$ ならば $x_2 < y_2$　　$x_1 < y_1$ ならば $x_2 > y_2$

ので，互いに他を支配しない.

2. 外部支配性

(例) 最初の提案

$D = (0,6,6)$

↓ 支配

1から2へ提案

$G = (4,8,0)$

↓ 支配

3から1へ提案

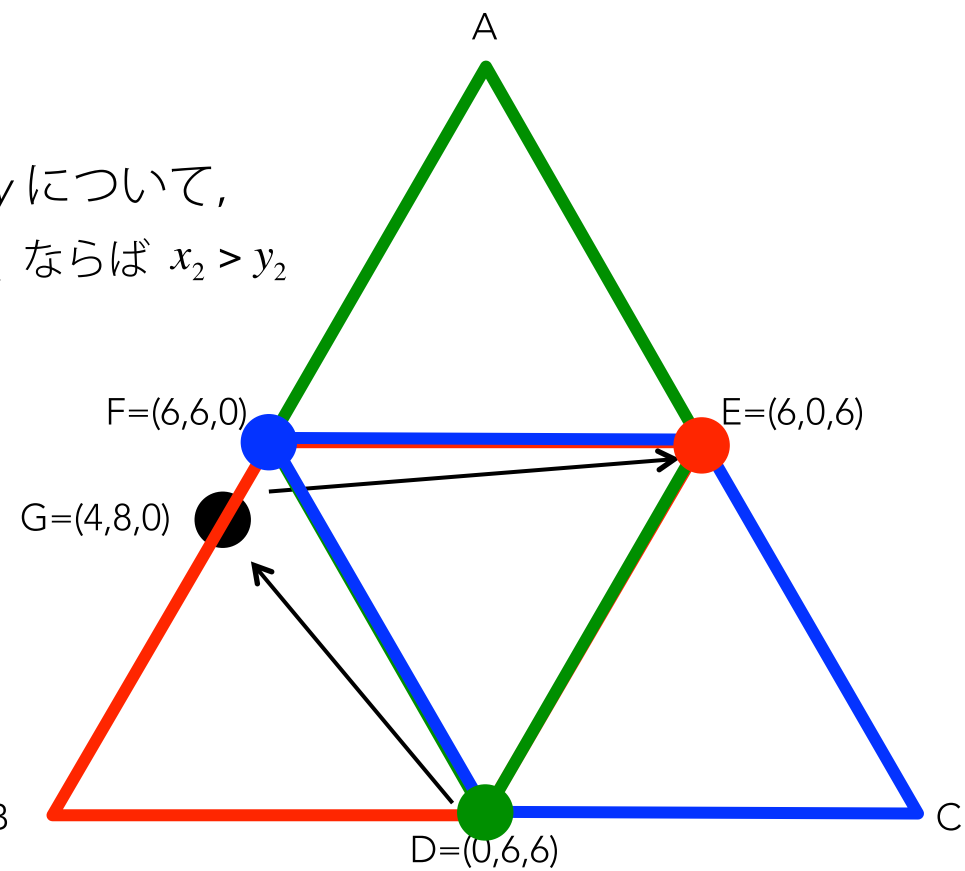
$E = (6,0,6)$

選考条件

$g_1 > d_1, g_2 > d_2$

有効条件

$g_1 + g_2 \leq v(12) = 12$



配分D，E，Fがそれぞれ
平行四辺形内の配分を支配する.

このような解を,
特に**対称解**という.

25 定和3人ゲームの差別解

■ 多数決3人ゲームの例

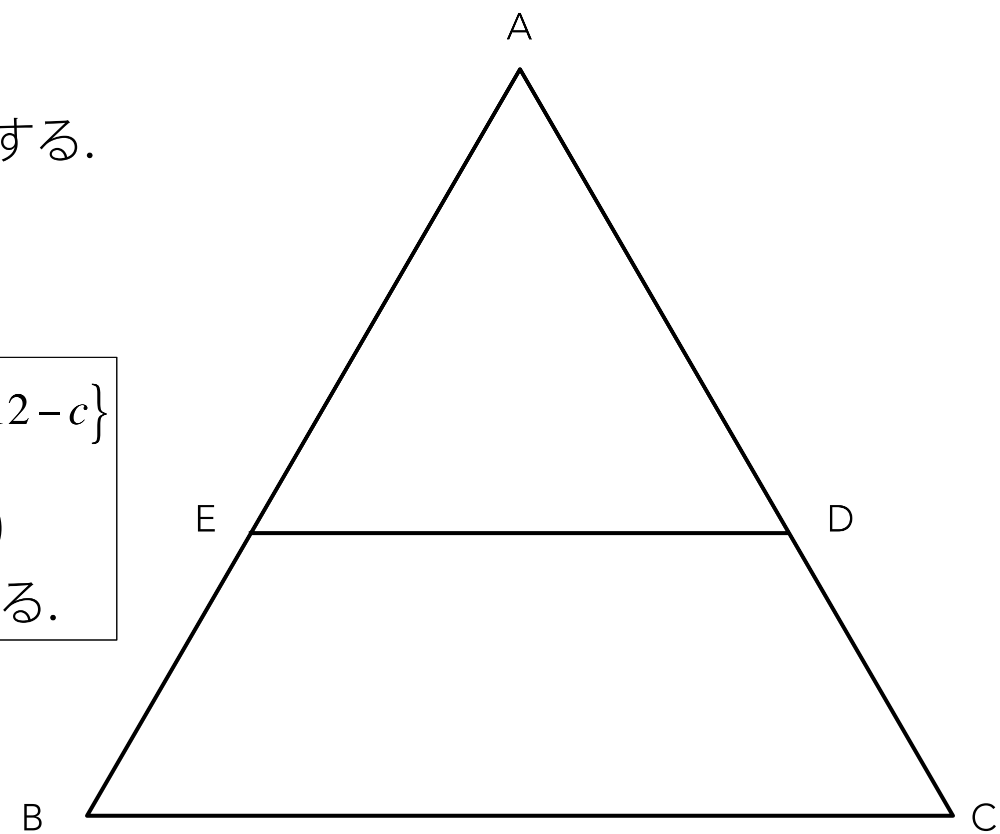
プレイヤー1に一定値 c を与え，
残りの $v(N)-c$ を2と3で分けるとする．

$$0 \le c < \frac{1}{2}v(N) = 6$$

集合 $D_1(c) = \left\{ x = (c, x_2, 12-c-x_2) : 0 \le x_2 \le 12-c \right\}$

線分ED　$E = (c, 12-c, 0), D = (c, 0, 12-c)$

が得られる．



集合 $D_1(c)$ が，内部安定性と
外部支配性を満たすかを考える．

26　定和3人ゲームの差別解

■ 多数決3人ゲームの例

1.　内部安定性

$D_1(c)$　に属する2つの配分 x と y について，

$x_1 = y_1$　　$x_2 > y_2$ ならば $x_3 < y_3$　　$x_2 < y_2$ ならば $x_3 > y_3$

ので，互いに他を支配しない．

2.　外部支配性

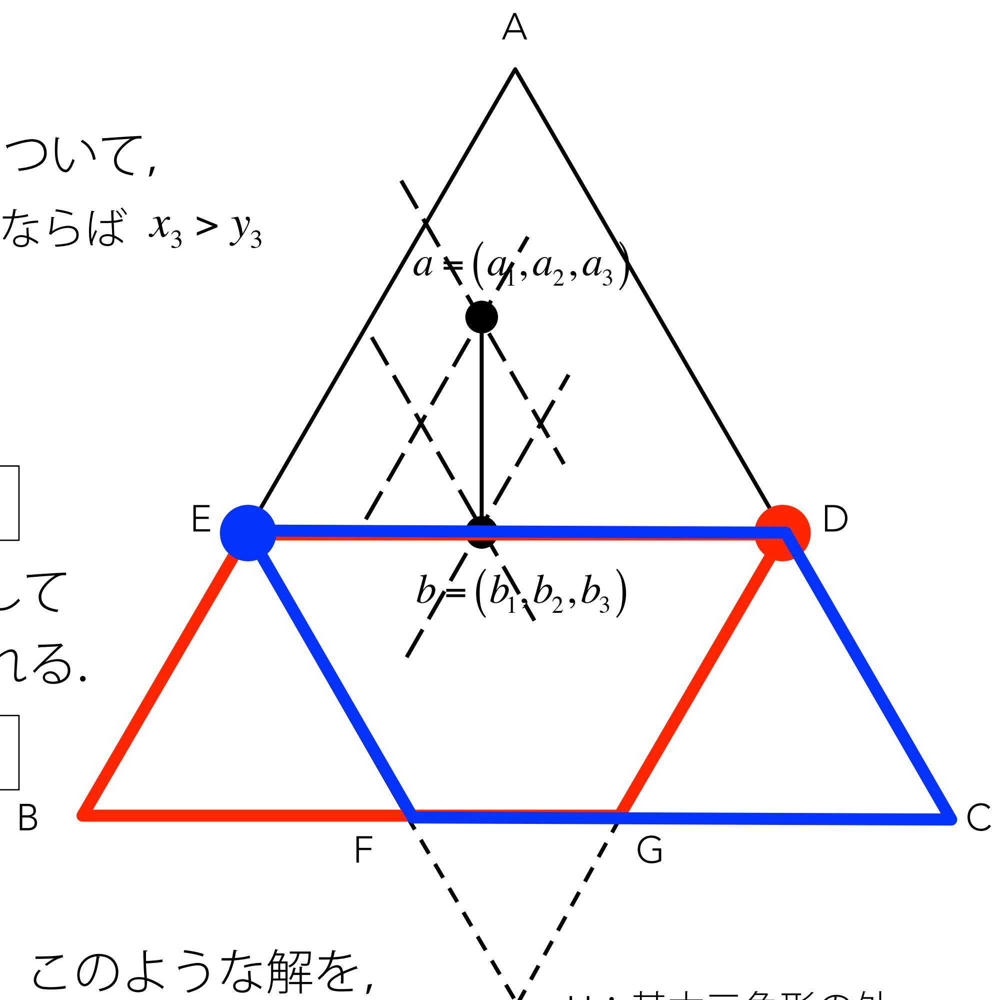
$a_1 > c$　である配分　$a = (a_1, a_2, a_3)$

$a_2 < b_2, a_3 < b_3$　より，提携{2,3}に関して
a から下ろした垂線の足 b に支配される．

$z_1 < c$　である配分　$z = (z_1, z_2, z_3)$

配分D，Eがそれぞれ
平行四辺形内の配分を支配する．

集合 $D_1(c)$ に属さない配分は，
$D_1(c)$ に属する配分に支配される．



このような解を，
特に**差別解**という．

27 定和3人ゲームの安定集合

安定集合（フォン・ノイマン／モルゲンシュテルン解）は次の2種類.

■ 対称解：定和3人ゲームでは一意に定まる.

$$K=\{(0,6,6,),(6,0,6),(6,6,0)\}$$

立場は対称だが，結果として得られる利得は等しくない.

■ 差別解：あるプレイヤーの利得が一定に固定された解
→無限にある.

$$D_1(c)=\{x=(c,x_2,12-c-x_2):0\le x_2\le 12-c\}$$

$$D_2(c)=\{x=(x_1,c,12-c-x_1):0\le x_1\le 12-c\}$$

$$D_3(c)=\{x=(x_1,12-c-x_1,c):0\le x_1\le 12-c\}$$

・提携形成の駆け引きから降り，一定の利得を取る選択をした場合
・差別的立場に置かれて提携形成から排除された場合

28 非定和3人ゲームの解

■ 例：非分割財3人ゲーム

売り手：プレイヤー1，買い手：プレイヤー2,3

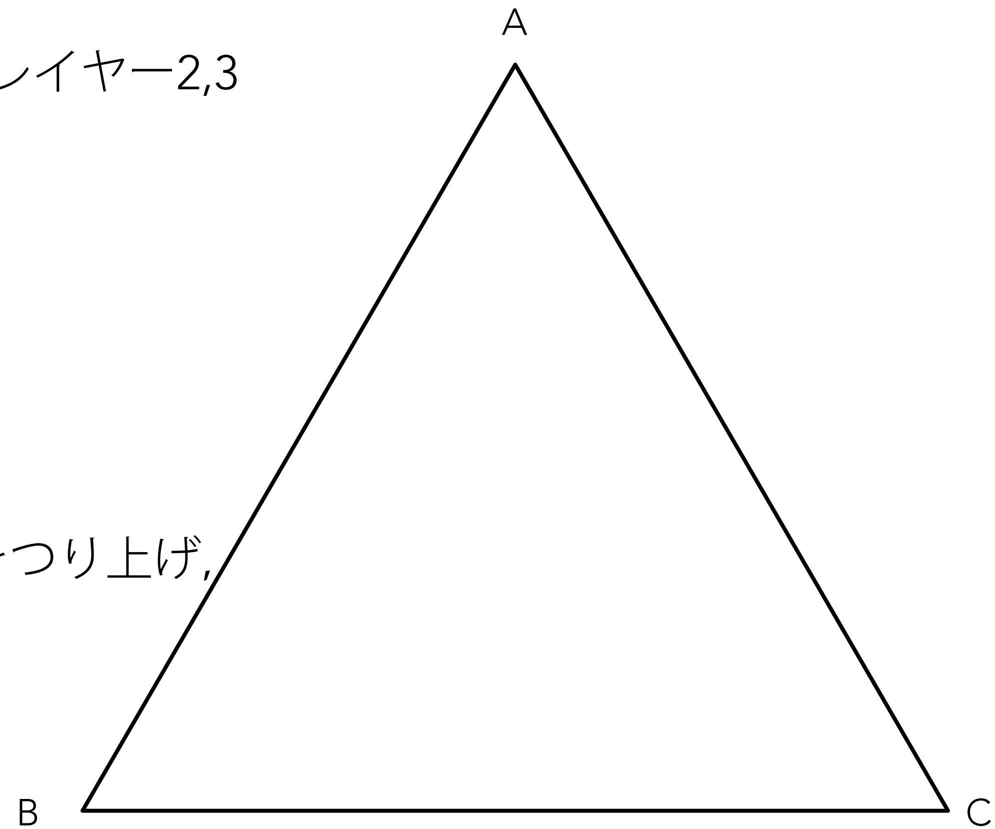
$$N=\{1,2,3\}$$
$$v(\varnothing)=v(1)=v(2)=v(3)=0$$
$$v(12)=v(13)=12, v(23)=0$$
$$v(123)=12$$

プレイヤー1の独占市場.
プレイヤー2と3の競争が財の価格をつり上げ,
最終的にp=12となる.

よって，このゲームのコアは,

$$c(v)=\{A=(12,0,0)\}$$

のただ1つの配分になる.



のが，従来の経済学に基づく考察だが，，，

29 非定和3人ゲームの解：交渉曲線

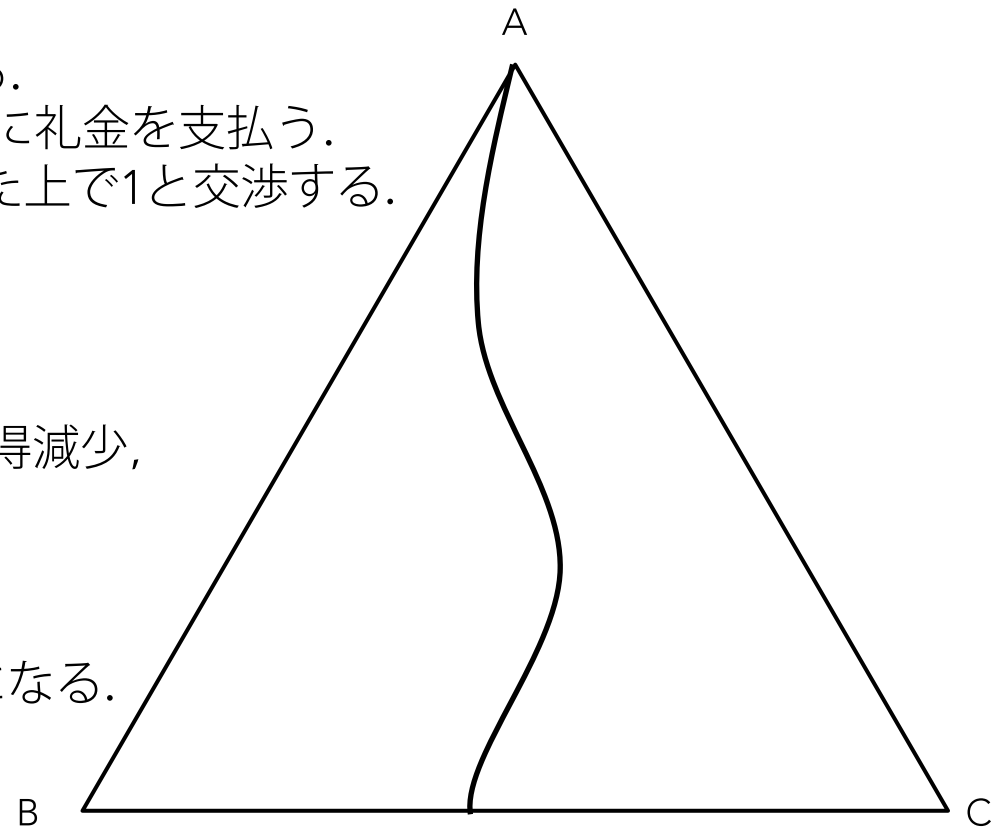
■ 例：非分割財3人ゲーム

・2と3が共謀しか買うを引き下げる.
・2が競争から降りる代わりに3は2に礼金を支払う.
・2と3が同盟し，取り分を3:2とした上で1と交渉する.

$$E=(7,3,2)$$

のような，値引き交渉による1の利得減少，
2と3の利得増加があり得る.

基本三角形では，右のような曲線になる.



この曲線を**交渉曲線**という.

30 非定和3人ゲームの解：交渉曲線

■ 例：非分割財3人ゲーム

交渉曲線として折れ線AEFDが引けた時,
折れ線上の配分の集合を K とする.
このＫの内部安定性・外部支配性を考える.

1. 内部安定性

$A=(12,0,0)$ $E=(7,3,2)$

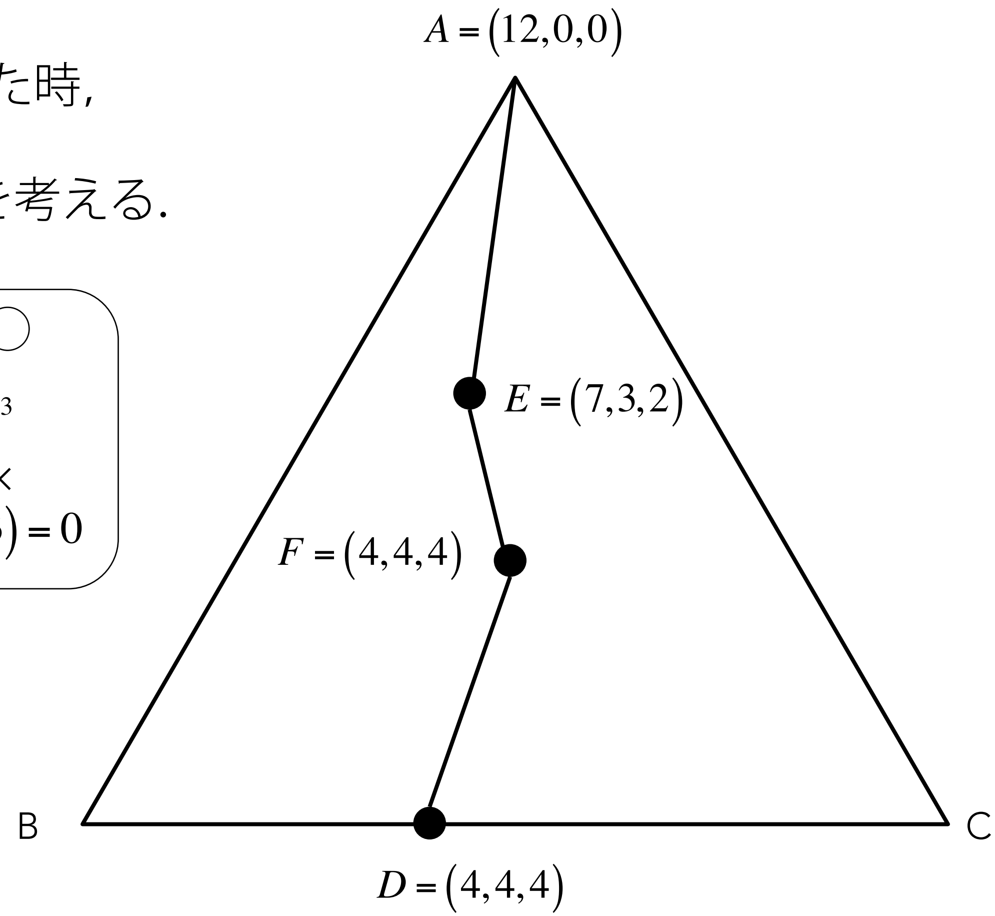
互いに他を支配しない.

選好条件：○
$e_2 > a_2, e_3 > a_3$

有効条件：×
$e_2 + e_3 > v(23) = 0$

2と3が提携すると,
コアである配分Aに支配されない

折れ線上のどの2点を取っても同様.



31 非定和3人ゲームの解：交渉曲線

■ 例：非分割財3人ゲーム

交渉曲線として折れ線AEFDが引けた時,
折れ線上の配分の集合を K とする.
この K の内部安定性・外部支配性を考える.

2. 外部支配性

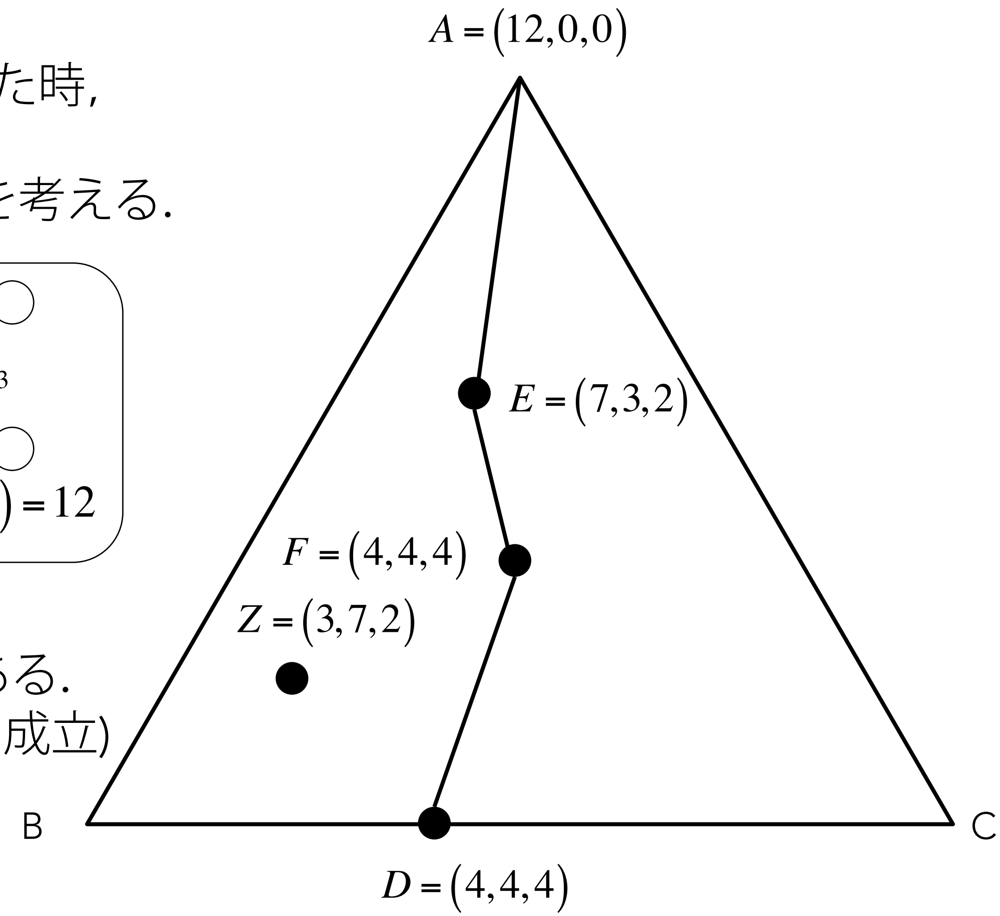
$Z=(3,7,2)$

$F=(4,4,4)$

選好条件：○
$f_1>z_1, f_3>z_3$

有効条件：○
$f_1+f_3\le v(23)=12$

交渉曲線以外の任意の点について,
それを支配する点が交渉曲線上にある.
(プレイヤー1と2か3の提携において成立)



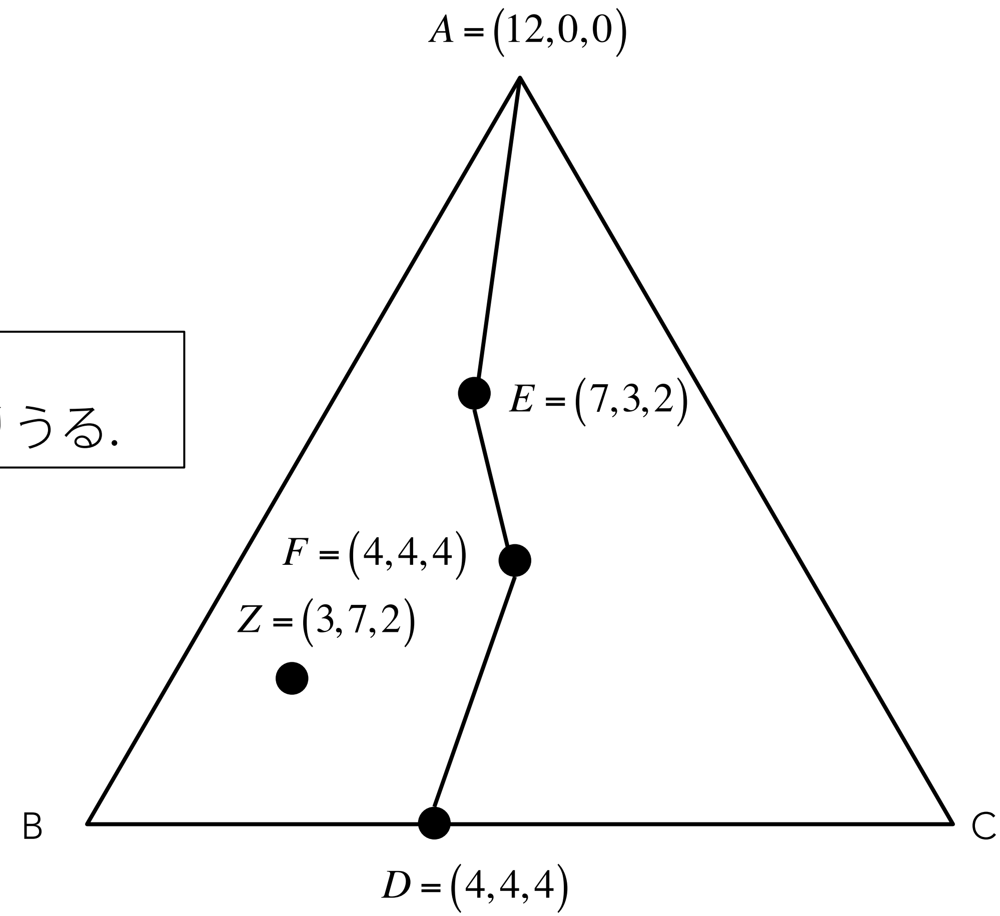
32 非定和3人ゲームの解：交渉曲線

■ 例：非分割財3人ゲーム

非定和3人ゲームの交渉曲線は
安定集合である.

買い手2人の共謀で財の価格が
引き下げられることが現実に起こりうる.

交渉曲線は無限に引ける.
曲線上のどの点に定まるかは
2と3の関係次第.



特性関数によって表現された極めて単純なモデルから,
支配関係だけで論理的に交渉曲線が導き出された.

33 コアが空である非定和3人ゲームの解

コアが空でも，プレイヤー間の話し合いで
何らかの安定集合が得られるはず.

1.　コアが空の場合

本質的で，ゼロ正規化ゲームを想定.

$$N = \{1,2,3\}$$

$$v(\varnothing) = v(1) = v(2) = v(3) = 0$$

$$v(12) = v_3$$

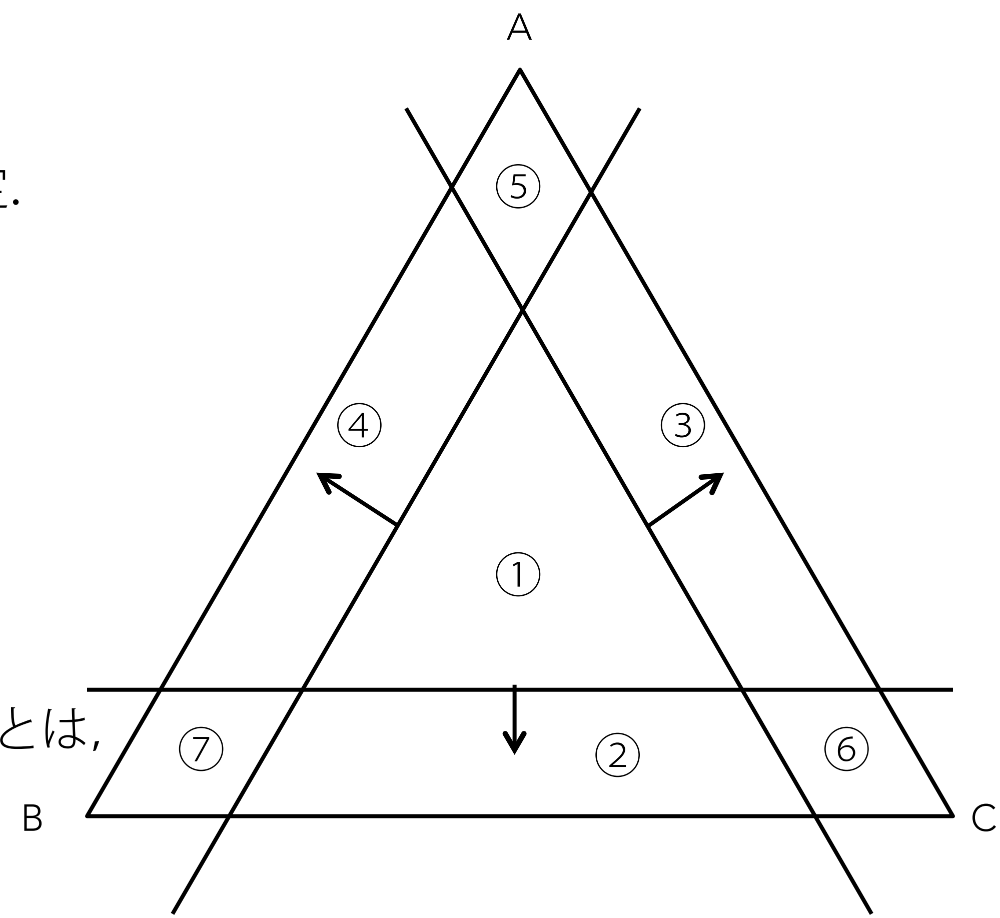
$$v(13) = v_2$$

$$v(23) = v_1$$

$$v(123) = v \qquad 0 \le v_1, v_2, v_3 \le v$$

提携 $S = \{i, j\}$ について，$x \operatorname{dom}_S y$ とは，

$$x_1 > y_1,\quad x_2 > y_2,\quad x_3 \ge v - v_3$$
$$x_1 > y_1,\quad x_3 > y_3,\quad x_2 \ge v - v_2$$
$$x_2 > y_2,\quad x_3 > y_3,\quad x_1 \ge v - v_1$$



34 コアが空である非定和3人ゲームの解

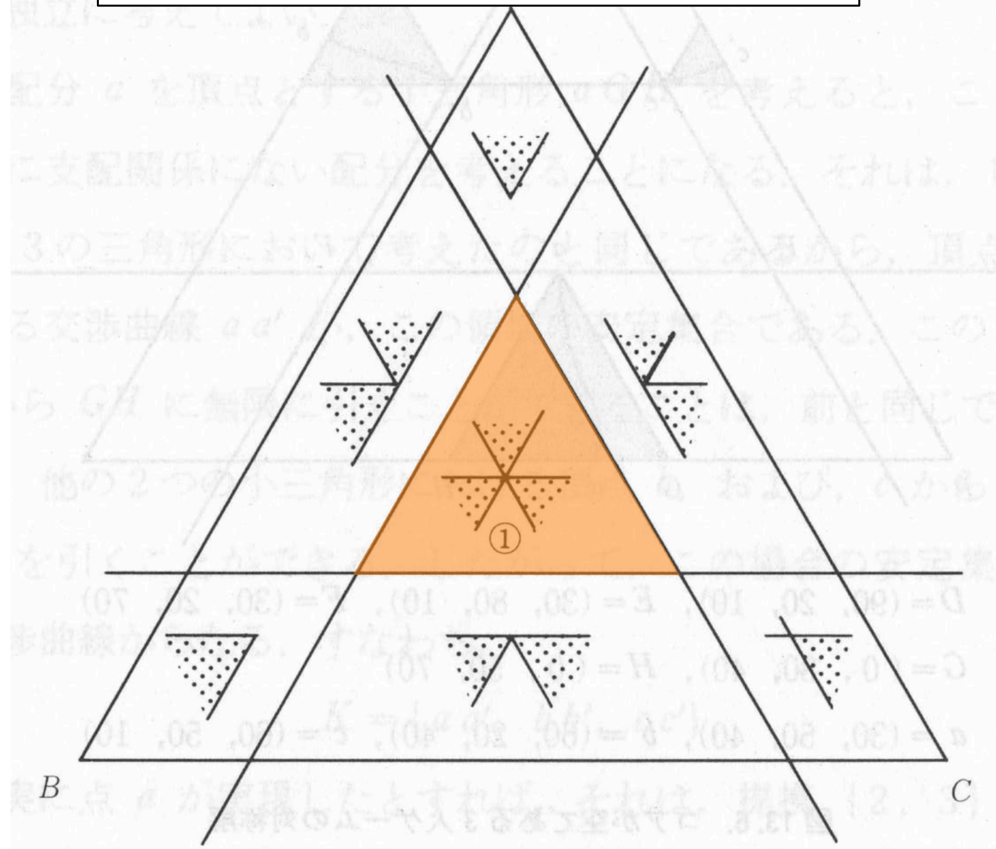
コアが空でも，プレイヤー間の話し合いで
何らかの安定集合が得られるはず.

1\. コアが空の場合

各領域で有効となりうる提携は,

領域	有効な提携 S		
①	1 2	1 3	2 3
②	1 2	1 3	
③	1 2		2 3
④		1 3	2 3
⑤			2 3
⑥	1 2		
⑦		1 3	

各領域の支配関係のダイアグラム



領域①のどの点も，①の外の点に支配されない.
①内の安定集合を求めるには①だけ考えれば良い.

（例）コアが空である非定和3人ゲームの解

$N = \{1,2,3\}$

$v(\varnothing) = v(1) = v(2) = v(3) = 0$

$v(12) = 110, v(13) = 100, v(23) = 90$

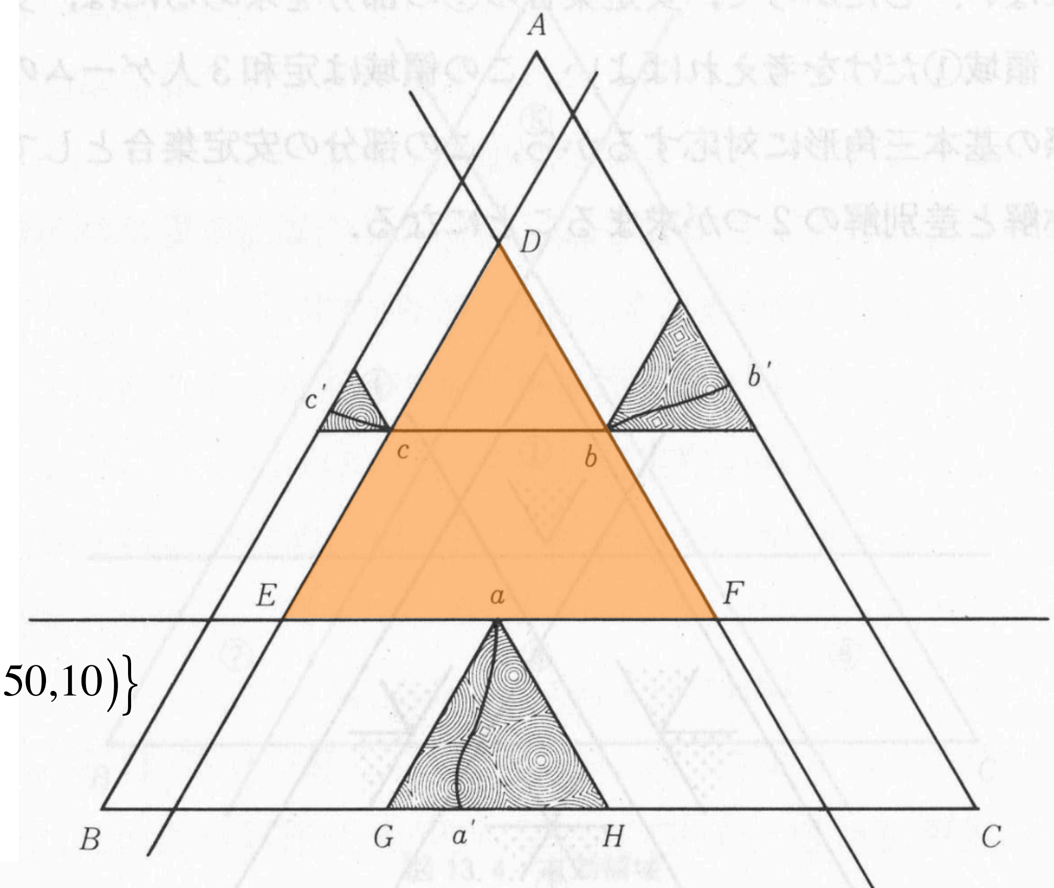
$v(123) = 120$

1. 対称解

三角形DEFが前スライドの領域①

領域①内の対称解に対応するのは，

$$K1 = \{a = (30,50,40), b = (60,20,40), c = (60,50,10)\}$$



一般に，

$$a = \left(v - v_1,\ \frac{1}{2}(v_1+v_3-v_2),\ \frac{1}{2}(v_1+v_2-v_3)\right)$$

$$b = \left(\frac{1}{2}(v_2+v_3-v_1),\ v - v_2,\ \frac{1}{2}(v_1+v_2-v_3)\right)$$

$$c = \left(\frac{1}{2}(v_2+v_3-v_1),\ \frac{1}{2}(v_1+v_3-v_2),\ v - v_3\right)$$

$D = (90,\ 20,\ 10)$， $E = (30,\ 80,\ 10)$， $F = (30,\ 20,\ 70)$

$G = (0,\ 80,\ 40)$， $H = (0,\ 50,\ 70)$

$a = (30,\ 50,\ 40)$， $b = (60,\ 20,\ 40)$， $c = (60,\ 50,\ 10)$

（例）コアが空である非定和3人ゲームの解

$N = \{1,2,3\}$

$v(\emptyset) = v(1) = v(2) = v(3) = 0$

$v(12) = 110, v(13) = 100, v(23) = 90$

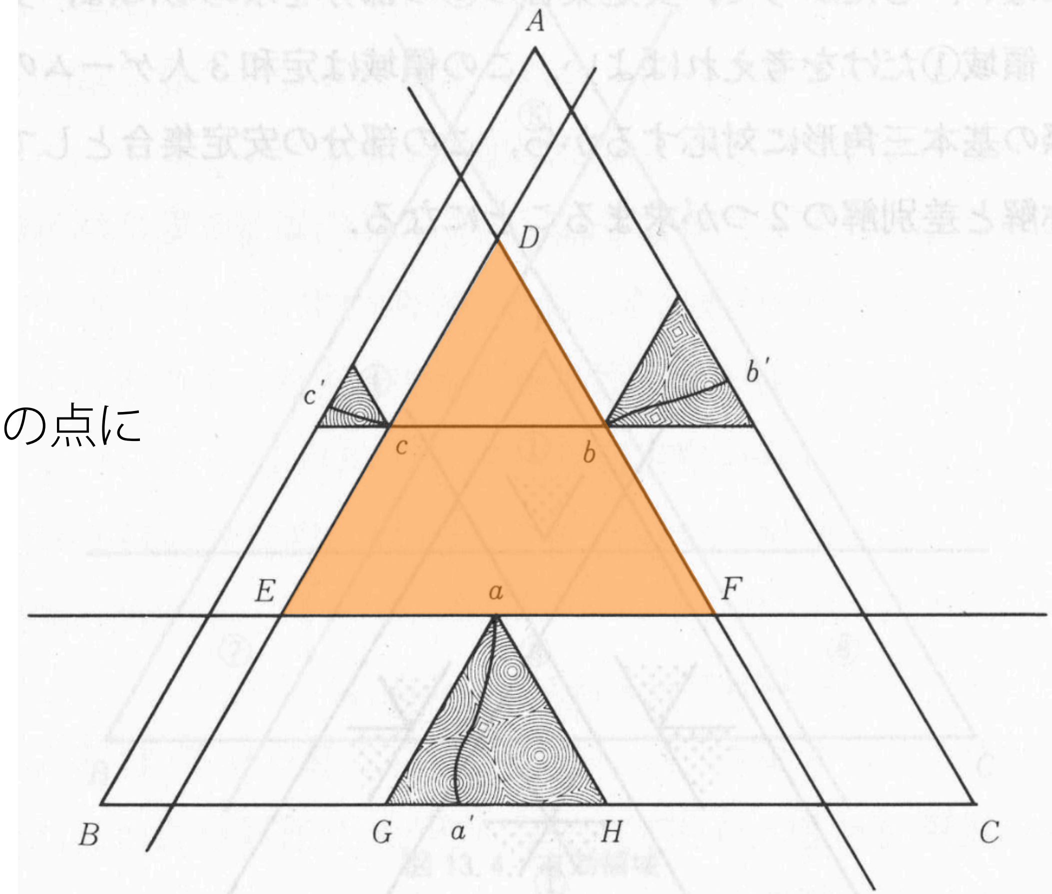
$v(123) = 120$

1. 対称解

影をつけた3つの三角形は，領域①の点に支配されない．

これは，非分割財3人ゲームの交渉曲線が考えられる！

交渉曲線*aa′,bb′,cc′*が安定集合



$D = (90,\ 20,\ 10)$，$E = (30,\ 80,\ 10)$，$F = (30,\ 20,\ 70)$

$G = (0,\ 80,\ 40)$，$H = (0,\ 50,\ 70)$

$a = (30,\ 50,\ 40)$，$b = (60,\ 20,\ 40)$，$c = (60,\ 50,\ 10)$

（例）コアが空である非定和3人ゲームの解

2. 差別解

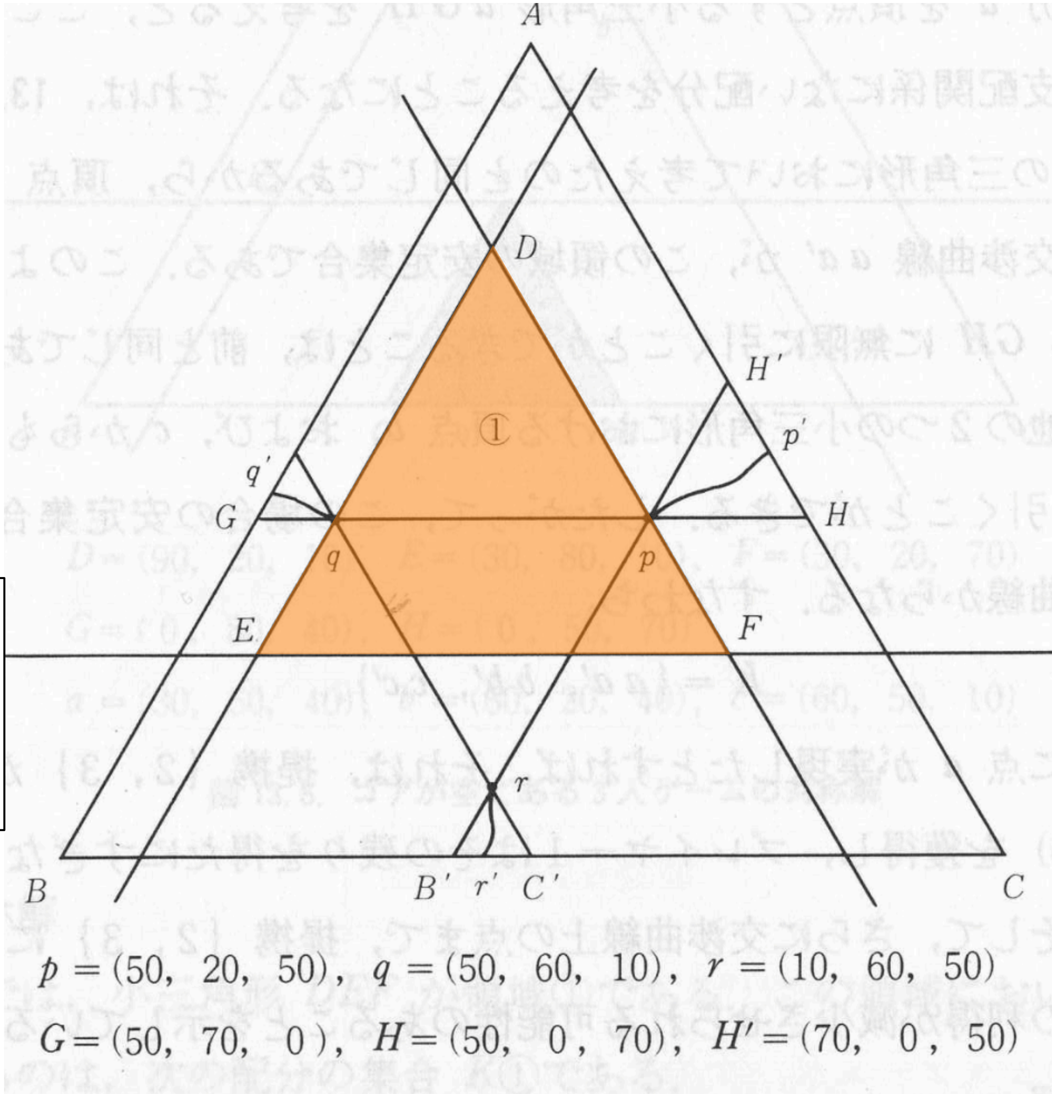
プレイヤー1の利得が c_1 に
固定されているとすると，，，

このとき，差別解は線分pqだが，
3つの交渉曲線も安定集合になる．
（前までの説明から）

交渉曲線rr′は，
プレイヤー1が多く取りすぎたとき，
2と3が共謀して1の取り分を
減少させる場合と言える．

※rr′は c_1 が十分小さいと消滅．

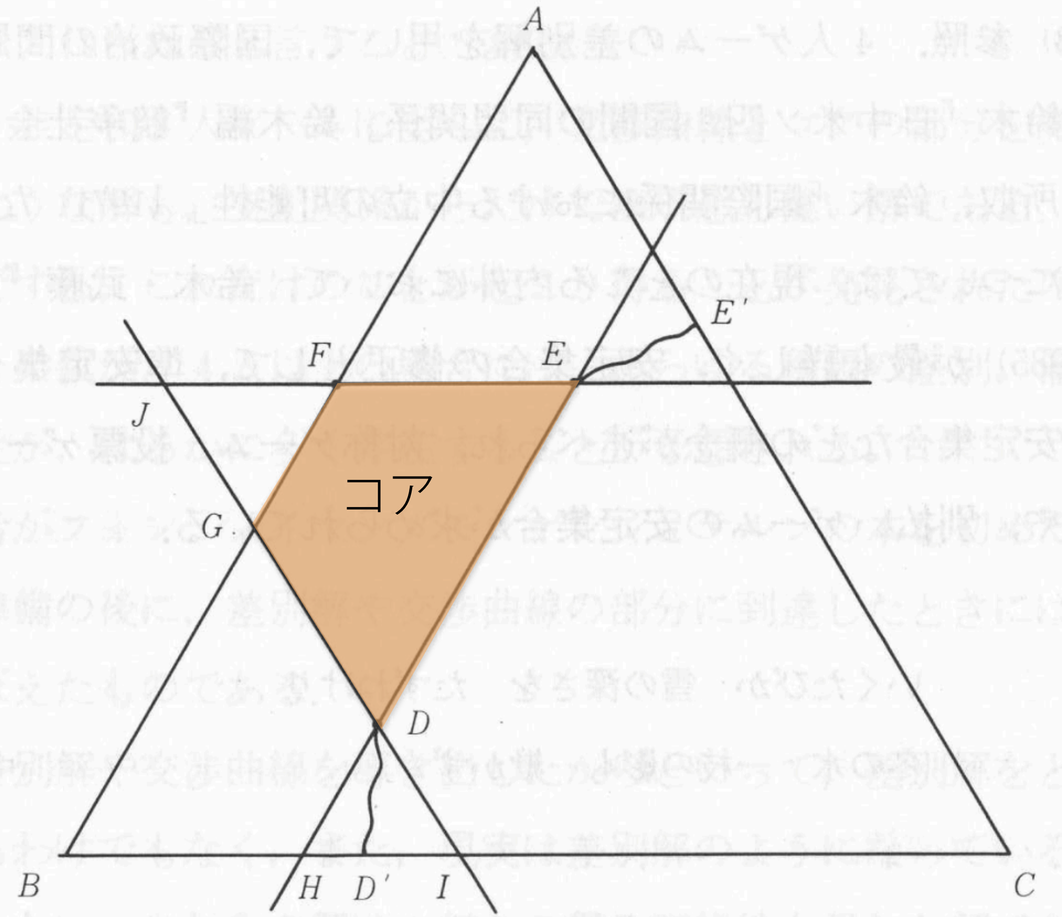
消える条件 $v - v_1 \le c_1 \le \frac{1}{2}(v_2 + v_3 - v)$



38 （例）コアが空でない3人ゲームの解

$$N = \{1,2,3\}$$
$$v(\varnothing) = v(1) = v(2) = v(3) = 0$$
$$v(12) = 90, v(13) = 50, v(23) = 50$$
$$v(123) = 120$$

このゲームの安定集合は，
コア（四角形DEFG）と
交渉曲線EE′，DD′



$D = (20,\ 70,\ 30)$，$E = (70,\ 20,\ 30)$
$F = (70,\ 50,\ 0)$，$G = (50,\ 70,\ 0)$

39 解と行動基準

■ 提携合理性に基づいて配分間の支配関係を定義．そこから内部安定性と外部支配性を満たす配分の集合として解（安定集合）を定義した.

■ 「新たな解を導く異なる安定な行動基準が存在し，それがプレイヤーに受け入れられ得ることを示した」ことに意義がある.

■ 規範的理論でも記述的理論でもなく，起こり得る可能性があることを発見する理論.

→社会規範の変化を行動基準の変化によって示すことができる．（ある時期には客観解が成立していたが，時代の変化であるプレイヤーが差別的立場に立たされ，差別解が成立するようになった．など．．．）

新・ゲーム理論輪読ゼミ

12章：τ値
13章：フォン・ノイマン／モルゲンシュテルン解
14章：交渉集合

もくじ：14章

14章：交渉集合

14.1　交渉集合

- 提携構造
- 交渉集合型特性関数
- 利得構成
- 個人合理的利得構成
- 異議
- 逆異議
- M安定
- 交渉集合

前提の定義

交渉に関する定義

交渉集合の定義

別の解を定義

14.2　カーネル

- 最大超過要求
- 不満
- 請求関数
- 均衡
- カーネル

14.3　仁

どのように満たされ，
解がが形成されるか．

42 提携構造

■ 提携構造：プレイヤーの集合の分割のこと.

$$\left[\{1,2\},\{3\}\right] or \left[12,3\right]$$

提携{1,2}が成立し，プレイヤー3は単独行動

$N=\{1,2,\cdots,n\}$ のプレイヤーをm個の許容提携に分割したときは,

$$\beta=\left[B_1,B_2,\cdots,B_m\right]$$

と表現する.

ある提携構造の元で，提携値がどのように構成されているかを考えることで,
どのような提携構造が（交渉によって）成立しうるかを考える.

43　交渉集合型特性関数

■ 交渉集合型特性関数（オーマン／マッシラー型特性関数）：提携Sの獲得可能な値が，N-Sの行動に影響されずに，Sに属するプレイヤーのみに依存して定まると想定し，定義された特性関数

交渉集合型特性関数

$$v(B) = \max_{s_B \in S_B} \sum_{i \in B} f_i(s_B)$$

個人の利得の集合

プレイヤーの集合：　$N = \{1, 2, \cdots, n\}$

許容提携：　$B \subset N$

提携 B のもつ共同戦略　s_B の集合：$S_B = \{s_B\}$

提携 B に属するプレイヤー i の利得関数：$f_i(s_B)$

■ 交渉集合型特性関数の仮定

1. 提携 {i} は許容提携
2. 空集合は許容提携ではないが，　$v(\emptyset) = 0$
3. ゲームは合理的とする．　$v(B) \geq \sum_{i \in B} v(i)$

44 利得構成／個人合理的利得構成

■ 利得構成：利得ベクトル x と提携構造 β の組

$\beta=\left[B_1,B_2,\cdots,B_m\right]$ について，$\sum_{i\in B} x_i = v(B)$ を満たすとき，

$(x;\beta)$ と表現する．

■ 個人合理的利得構成：利得構成の各成分 x が個人合理的である利得構成のこと．

$$x_i \geq v(i)$$

（例）個人合理的利得構成は，

$N=\{1,2,3\}$

$v(\emptyset)=v(1)=v(2)=v(3)=0$

$v(12)=60, v(13)=70, v(23)=80$

$v(123)=90$

$(x;\beta_1)=(0,0,0:1,2,3)$　$x_i \geq 0 \quad \forall i \in N$

$(x;\beta_2)=(x_1,x_2,0:12,3)$,　$x_1+x_2=60$

$(x;\beta_3)=(x_1,0,x_3:13,2)$,　$x_1+x_3=70$

$(x;\beta_4)=(0,x_2,x_3:23,1)$,　$x_2+x_3=80$

$(x;\beta_5)=(x_1,x_2,x_3:123)$,　$x_1+x_2+x_3=90$

45 異議

（例）前スライドと同じゲーム.

$N=\{1,2,3\}$

$v(\varnothing)=v(1)=v(2)=v(3)=0$

$v(12)=60, v(13)=70, v(23)=80$

$v(123)=90$

$(x;\beta_1)=(0,0,0:1,2,3) \quad x_i \geq 0 \quad \forall i \in N$

$(x;\beta_2)=(x_1,x_2,0:12,3), \quad x_1+x_2=60$

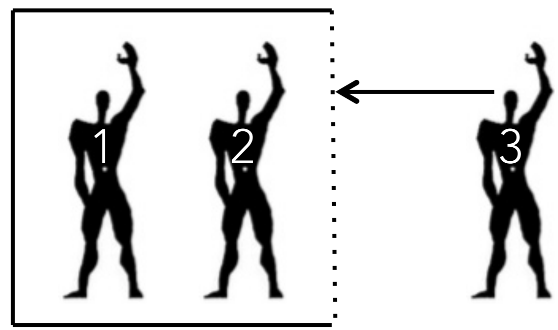
$(x;\beta_3)=(x_1,0,x_3:13,2), \quad x_1+x_3=70$

$(x;\beta_4)=(0,x_2,x_3:23,1), \quad x_2+x_3=80$

$(x;\beta_5)=(x_1,x_2,x_3:123), \quad x_1+x_2+x_3=90$

提携　$\beta_2=[12,3]$　が成立した後の交渉を考える.

1と2が同じ部屋にいて，3が横から見ている.
（1と2の交渉に影響を与えている．）



1：均等に分けよう.　$(a;\beta_2)=(30,30,0:12,3)$

異議

2：均等なら3と組むし，，$(b;\beta_4)=(0,40,40:23,1)$

プレイヤー k のプレイヤー h
に対する異議　$(y;\beta_2)$

ｉ) $k \in C$,　$h \notin C$ なる提携 $C \in \beta_2$

ｉｉ) $y_i > x_i$,　$\forall i \in C$

46 逆異議

1：均等に分けよう． $(a;\beta_2)=(30,30,0:12,3)$

↓ 異議

2：均等なら3と組むし，，$(b;\beta_4)=(0,40,40:23,1)$

↓ M安定な利得構成

1：ちょっと譲歩します．．$(c;\beta_2)=(25,35,0:12,3)$

↓ 異議

2：もっと出せよ $(d;\beta_4)=(0,36,44:23,1)$

↓ 逆異議

1：じゃあ3と組みます． $(e;\beta_3)=(25,0,45:13,2)$

$$N=\{1,2,3\}$$
$$v(\varnothing)=v(1)=v(2)=v(3)=0$$
$$v(12)=60, v(13)=70, v(23)=80$$
$$v(123)=90$$

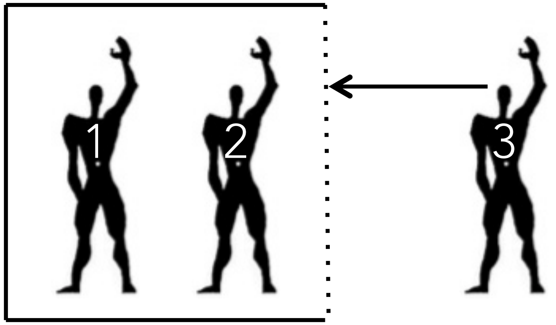
$(x;\beta_1)=(0,0,0:1,2,3)$ $x_i\geq 0 \quad \forall i\in N$

$(x;\beta_2)=(x_1,x_2,0:12,3),$ $x_1+x_2=60$

$(x;\beta_3)=(x_1,0,x_3:13,2),$ $x_1+x_3=70$

$(x;\beta_4)=(0,x_2,x_3:23,1),$ $x_2+x_3=80$

$(x;\beta_5)=(x_1,x_2,x_3:123),$ $x_1+x_2+x_3=90$



k の異議に対する h の逆異議 $(z;\beta_3)$

ｉ) $h\in D,\quad k\notin D$ なる提携 $D\in\beta_3$

ii) $z_i>x_i,\quad \forall i\in D$

iii) $z_i>y_i,\quad \forall j\in D\cap C$

プレイヤー k のプレイヤー h に対する異議 $(y;\beta_2)$

ｉ) $k\in C,\quad h\notin C$ なる提携 $C\in\beta_2$

ii) $y_i>x_i,\quad \forall i\in C$

47 M安定

- M安定：いかなる異議に対しても，それに対抗する逆異議を提出でき，逆の立場でも同様の状態.

＝ある提携構造のもとで得られる安定な利得構成のこと.

- 勘当値：3人ゲームのM安定な利得構成の値.

勘当値	M安定な個人合理的利得構成
$w_1 = \frac{1}{2}\{v(12) + v(13) - v(23)\}$	$(w_1, w_2, 0 : 12, 3)$
$w_2 = \frac{1}{2}\{v(12) + v(23) - v(13)\}$	$(w_1, 0, w_3 : 13, 2)$
$w_3 = \frac{1}{2}\{v(13) + v(23) - v(12)\}$	$(0, w_2, w_3 : 23, 1)$

（例）全員提携の場合

全員提携の場合．3人とも同じ部屋で取り分を交渉．

$N=\{1,2,3\}$
$v(\varnothing)=v(1)=v(2)=v(3)=0$
$v(12)=60, v(13)=70, v(23)=80$
$v(123)=90$

$(x;\beta_1)=(0,0,0:1,2,3) \quad x_i \geq 0 \quad \forall i \in N$
$(x;\beta_2)=(x_1,x_2,0:12,3), \quad x_1+x_2=60$
$(x;\beta_3)=(x_1,0,x_3:13,2), \quad x_1+x_3=70$
$(x;\beta_4)=(0,x_2,x_3:23,1), \quad x_2+x_3=80$
$(x;\beta_5)=(x_1,x_2,x_3:123), \quad x_1+x_2+x_3=90$

1：均等に分けよう． $(a;\beta_5)=(30,30,30:123)$

↓ 異議

3：2と組みます． $(b;\beta_4)=(0,40,40:23,1)$

1：2と組むなら，， $(c;\beta_2)=(20,40,0:12,3)$

↓ M安定な利得構成

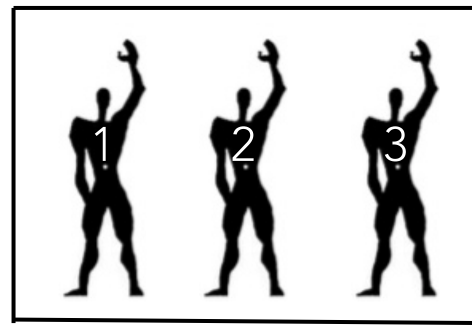
1：譲歩します． $(d;\beta_5)=(20,30,40:123)$

↓ 異議

3：異議あり $(e;\beta_4)=(0,39,41:23,1)$

↓ 逆異議

1：2と組みます． $(c;\beta_2)=(20,40,0:12,3)$



1と3の交渉

1と2の交渉

2と3の交渉

49 交渉集合

- 交渉集合：M安定な利得構成の集合のこと．Aumann and Maschler(1964)

さっきのゲームでは，

$$M = \left\{ \begin{array}{l} (0,0,0:1,2,3) \\ (25,35,0:12,3) \\ (25,0,45:13,2) \\ (0,35,45:23,1) \\ (20,30,40:123) \end{array} \right\}$$

50 最大超過要求

- k の h に対する異議は，k が h の協力なしでもある提携ではより大きな利得が得られるということ.

- つまり，以下の要求にまだ超過分があり，この超過分を得られることを示すのが異議.

$$e(x;C) = v(C) - \sum_{i \in C} x_i$$

これの最大値を考えると，別の解が見つかるのではないか？

51 最大超過要求

- 最大超過要求：プレイヤー k の h に対する要求の最大値.

提携の集合 $T_{kh} \equiv \{S : k \in S, h \notin S\} \qquad \forall k, h \in N, k \neq h$

について，個人合理的構成 $(x;\beta)$ が与えられたとき.

$$S_{kh} \equiv \max\left[e(x;S) : S \in T_{kh}\right] \qquad e(x;S) = v(S) - \sum_{i \in S} x_i$$

（例） $N = \{1,2,3\}$

$v(\varnothing) = v(1) = v(2) = v(3) = 0$

$v(12) = 60, v(13) = 70, v(23) = 80$

$v(123) = 120$

1：均等に分けよう．$(a;\beta_5) = (40,40,40 : 123)$

$$e(a;3) = v(3) - a_3 = -40$$

$$e(a;23) = v(23) - a_2 - a_3 = 0$$

$$S_{31} = \max[0, -40] = 0$$

$$e(a;1) = v(1) - a_1 = -40$$

$$e(a;12) = v(12) - a_1 - a_2 = -20$$

$$S_{13} = \max[-20, -40] = -20$$

52 不満／請求関数

$$S_{31} = \max\left[0, -40\right] = 0 \quad > \quad S_{13} = \max\left[-20, -40\right] = -20$$

しかも， $x_1 = 40 > v(1) = 0$ 3は1に対して不満を持つはず！

- 2人のプレイヤー間の不満：一般的に以下なら，*(x;β)*に関して，*k*は *h*に不満をもつという．

$$S_{kh} > S_{hk} \qquad x_h > v(h)$$

3は1に利得の譲渡を求める．

- 請求関数：利得の譲渡を求める際，最大要求の一部を要求する際に用いる関数

$$S_{31} > S_{13} \qquad d_{31} = \alpha \min\left[S_{31} - S_{13}, x_1 - v(1)\right]$$

$$S_{31} \leq S_{13} \qquad d_{31} = 0$$

均衡

3： α=0.5で.　$(b;\beta_5)=(30,40,50:123)$

$e(b;12)=v(12)-b_1-b_2=-10$
$e(b;13)=v(13)-b_1-b_3=-10$
$e(b;23)=v(23)-b_2-b_3=-10$
$e(b;1)=v(1)-b_1=-30$
$e(b;2)=v(2)-b_2=-40$
$e(b;3)=v(3)-b_3=-50$

$S_{13}=\max[-10,-30]=-10$
$S_{31}=\max[-10,-50]=-10$
$S_{12}=\max[-10,-30]=-10$
$S_{21}=\max[-10,-40]=-10$
$S_{23}=\max[-10,-40]=-10$
$S_{32}=\max[-10,-50]=-10$

（例） $N=\{1,2,3\}$
$v(\varnothing)=v(1)=v(2)=v(3)=0$
$v(12)=60, v(13)=70, v(23)=80$
$v(123)=120$

合意点.

■ 均衡：任意の2人のプレイヤー間に互いに不満がないとき状態．つまり，

$$\left[S_{kh}(x)-S_{hk}(x)\right]\times\left[x_h-v(h)\right]\leq 0$$

$$\left[S_{hk}(x)-S_{kh}(x)\right]\times\left[x_k-v(k)\right]\leq 0$$

54 カーネル

- カーネル：同じ提携に属する任意の2人のプレイヤーの不満が均衡している個人合理的利得構成$(x;\beta)$の全体のこと.

- 交渉集合では全体提携の場合にただ1つの利得構成に定まらなかったが，最大要求のバランスを考えるとただ1つに定まることがわかる.

55 （例）カーネル

$N=\{1,2,3\}$

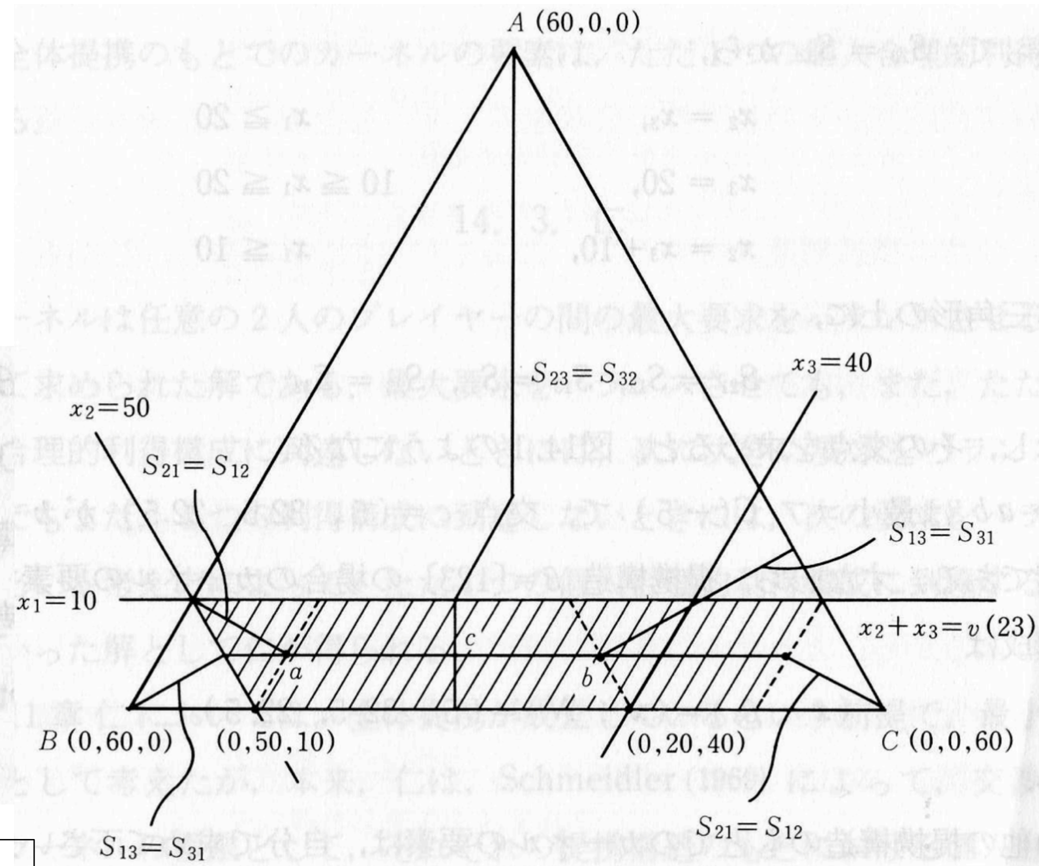
$v(\varnothing)=v(1)=v(2)=v(3)=0$

$v(12)=20, v(13)=10, v(23)=50$

$v(123)=60$　　コアは影付きの部分.

提携　$\beta=[123]$　各提携の要求は,

$$e(x\ ;12)=v(12)-x_1-x_2=20-x_1-x_2$$
$$e(x\ ;13)=v(13)-x_1-x_3=10-x_1-x_3$$
$$e(x\ ;23)=v(23)-x_2-x_3=50-x_2-x_3$$
$$e(x\ ;1)=v(1)-x_1$$
$$e(x\ ;2)=v(2)-x_2$$
$$e(x\ ;3)=v(3)-x_3$$



$a=(5,\ 45,\ 10),\ b=(5,\ 20,\ 35),\ c=(5,\ 32.5,\ 22.5)$

プレイヤー間の最大超過の均衡点を場合分けで求める.

（例）カーネル

プレイヤー1と2

1→2の最大超過

$S_{12} = e(x\ ;13) = 10 - x_1 - x_3, \quad x_3 \leqq 10$ のとき

$S_{12} = e(x\ ;1) = 0 - x_1, \quad x_3 \geqq 10$ のとき

2→1の最大超過

$S_{21} = e(x\ ;23) = 50 - x_2 - x_3, \quad x_3 \leqq 50$ のとき

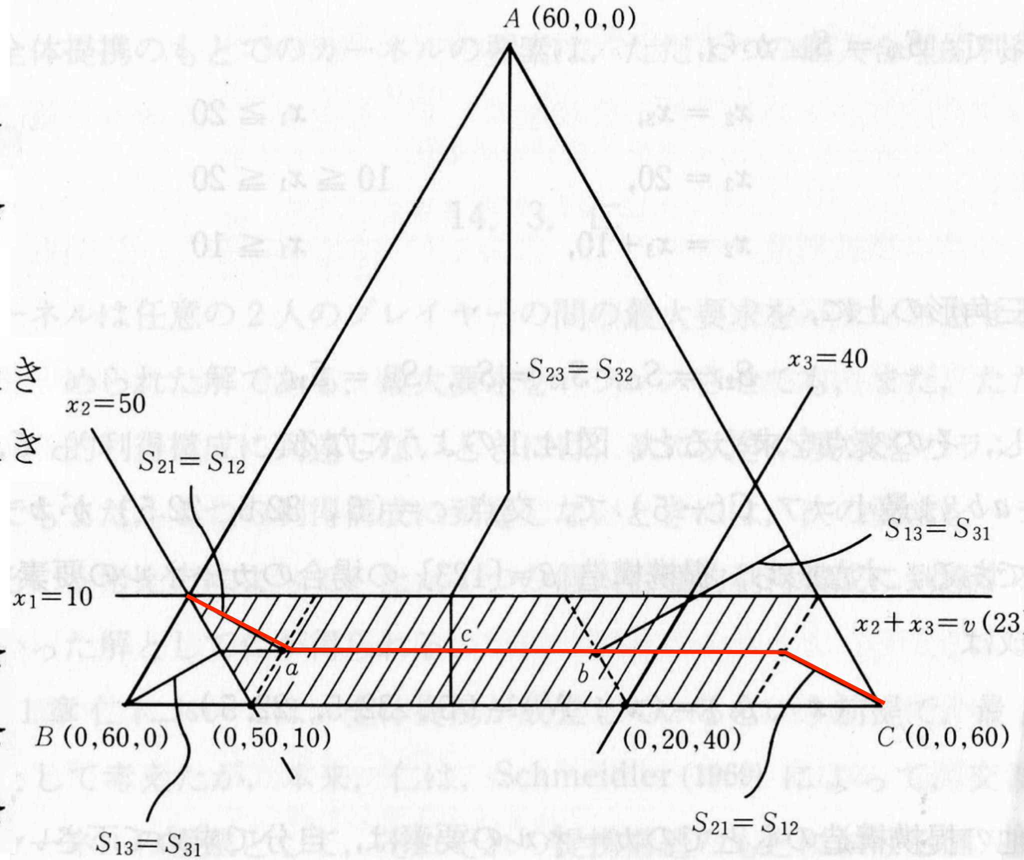
$S_{21} = e(x\ ;2) = 0 - x_2, \quad x_3 \geqq 50$ のとき

$S_{21} = S_{12}$ のときは,

$x_1 = x_2, \quad x_3 \geqq 50$ のとき

$x_1 = 5, \quad 10 \leqq x_3 \leqq 50$ のとき

$x_2 = x_1 + 40, \quad x_3 \leqq 10$ のとき



$a = (5, 45, 10),\ b = (5, 20, 35),\ c = (5, 32.5, 22.5)$

57 （例）カーネル

プレイヤー1と3

$S_{21} = S_{12}$

1→3の最大超過

$$S_{13} = e(x\ ;12) = 20 - x_1 - x_2, \qquad x_2 \leqq 20$$

$$S_{13} = e(x\ ;1) = 0 - x_1, \qquad x_2 \geqq 20$$

3→1の最大超過

$$S_{31} = e(x\ ;23) = 50 - x_2 - x_3, \qquad x_2 \leqq 50$$

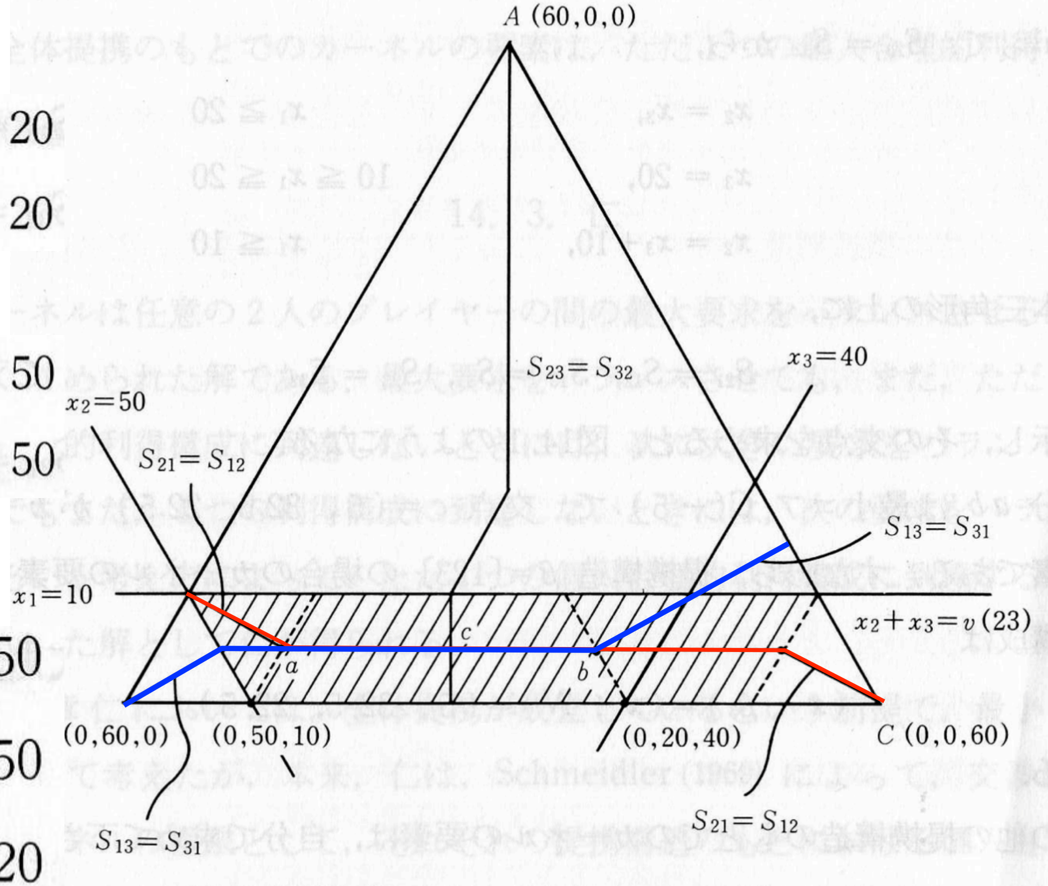
$$S_{31} = e(x\ ;3) = 0 - x_3, \qquad x_2 \geqq 50$$

$S_{31} = S_{13}$ のときは，

$$x_1 = x_3, \qquad x_2 \geqq 50$$

$$x_1 = 5, \qquad 20 \leqq x_2 \leqq 50$$

$$x_3 = x_1 + 30, \qquad x_2 \leqq 20$$



$a = (5, 45, 10)$, $b = (5, 20, 35)$, $c = (5, 32.5, 22.5)$

58 （例）カーネル

プレイヤー2と3

$S_{21} = S_{12}$ $S_{31} = S_{13}$

2→3の最大超過

$$S_{23} = e(x\ ;\ 2) = -x_2, \qquad x_1 \geqq 20$$

$$S_{23} = e(x\ ;\ 12) = 20 - x_1 - x_2, \qquad x_1 \leqq 20$$

3→2の最大超過

$$S_{32} = e(x\ ;\ 3) = -x_3, \qquad x_1 \geqq 10$$

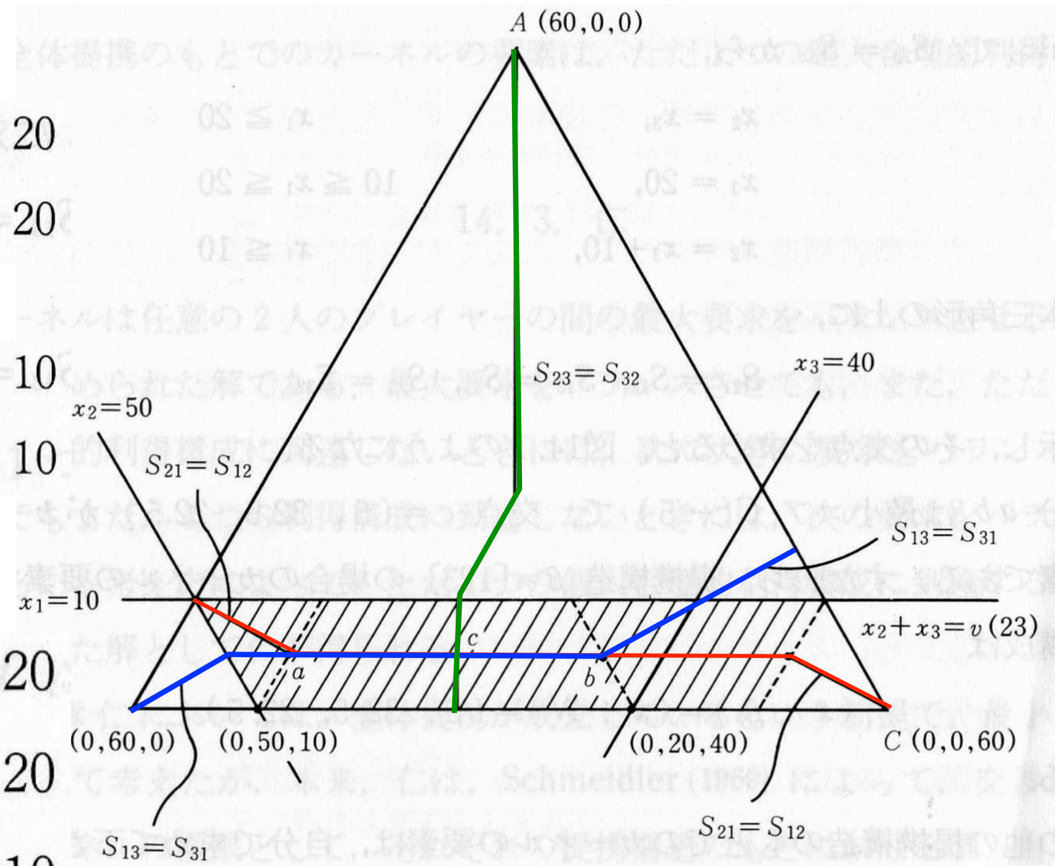
$$S_{32} = e(x\ ;\ 13) = 10 - x_1 - x_3, \qquad x_1 \leqq 10$$

$S_{32} = S_{23}$ のときは,

$$x_2 = x_3, \qquad x_1 \geqq 20$$

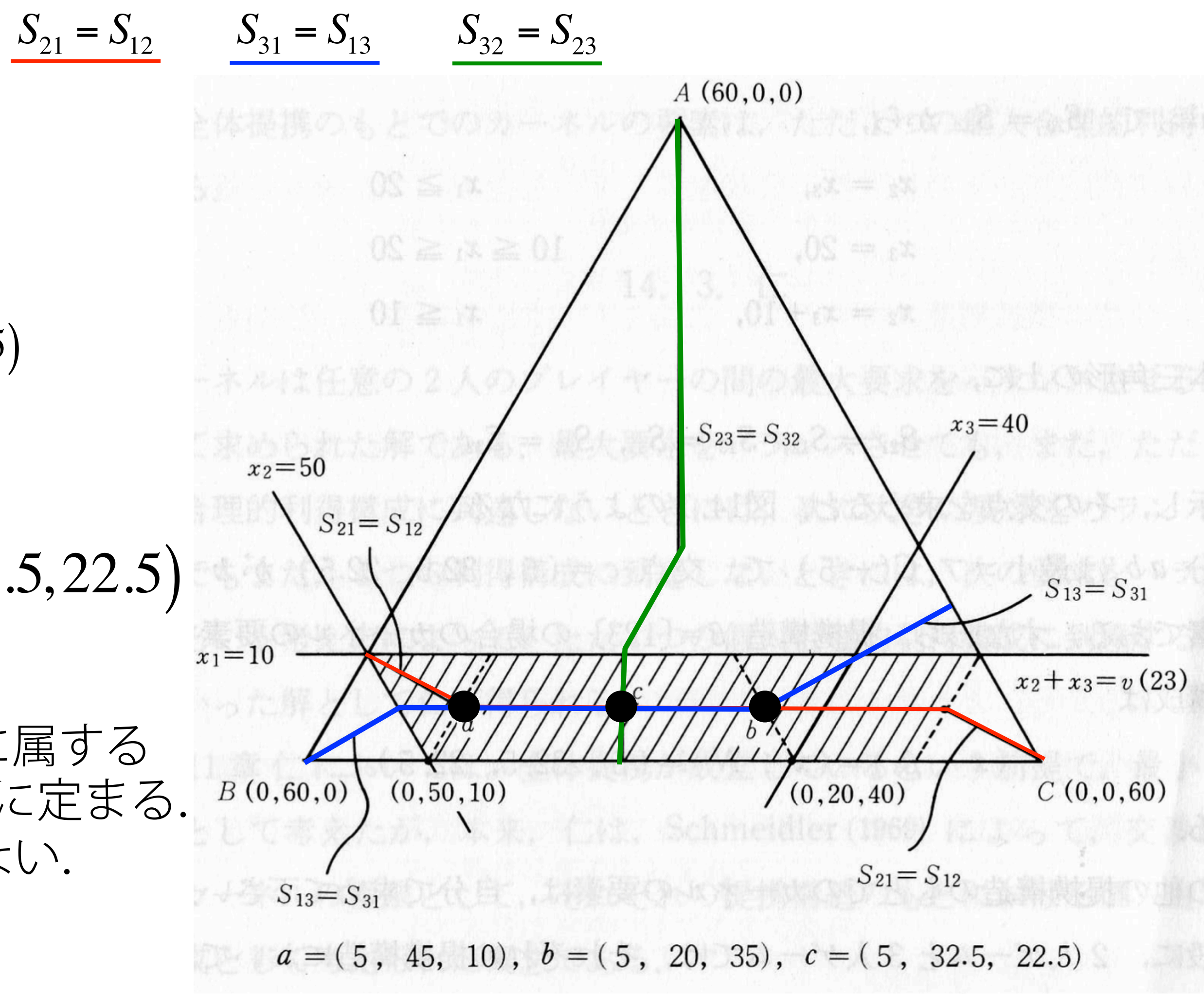
$$x_3 = 20, \qquad 10 \leqq x_1 \leqq 20$$

$$x_2 = x_3 + 10, \qquad x_1 \leqq 10$$



$a = (5,\ 45,\ 10)$, $b = (5,\ 20,\ 35)$, $c = (5,\ 32.5,\ 22.5)$

59　（例）カーネル



交点が3つ得られる.

線分abは最小コア　$C(-5)$

カーネルは，交点c

$$\left(x:\beta_5\right)=\left(x:N\right)=\left(5,32.5,22.5\right)$$

※3人ゲームではカーネルに属する個人合理的利得構成は一意に定まる.
4人以上では一意とは限らない.

60 仁

- カーネルは最大超過要求のプレイヤー間のバランスをとて求められた解．それでもまだ個人合理的利得構成に至らないときは，次に大きい要求のバランス，，，という考え方で利得構成を更新する．

  → この最終的な解が仁．

- 本来，仁は交渉集合，およびカーネルの極限として考えられた．

- 要求ベクトルは，配分に関してではなく，それぞれの提携構造のもとでの個人合理的利得構成 $(x:\beta)$ における利得ベクトル x についての要求ベクトル $\theta(x)$ として定義される．

61 仁

- 再定義：任意の提携構造 β のもとでの仁とは，(x,β) 以外のすべての個人合理的利得構成 (y,β) に対して，x が y よりも受容的である個人合理的利得構成の集合のこと．

- 「ゲームの仁」とは，すべての提携構造のもとでの仁の集合を指す．

$$\mu(v) \equiv \left\{ \mu(\beta) \quad \forall \beta \right\}$$

- 仁は交渉集合に含まれ，カーネルにも含まれる．2つの意味で安定な解である．

まとめ

- τ 値
  - 最大限度額と最小権利額を用いた，それらの間にある解
  - シャープレイ値や仁よりも不安定だが，コアの性質を知るには有効.
- フォン・ノイマン／モルゲンシュテルン解
  - 内部安定性と外部支配性を満たす解の集合
  - 対称解／差別解／交渉曲線
  - 2人のプレイヤーの結託があり得る.
- 交渉集合
  - 提携構造の形成から導かれる安定な解
  - 最大超過要求の不満の均衡からカーネルが導ける.
  - 仁は，最も需要的な個人合理的利得構成として再定義できる.