

# Iterative Methods in Combinatorial Optimization

## chap.5 Matroids

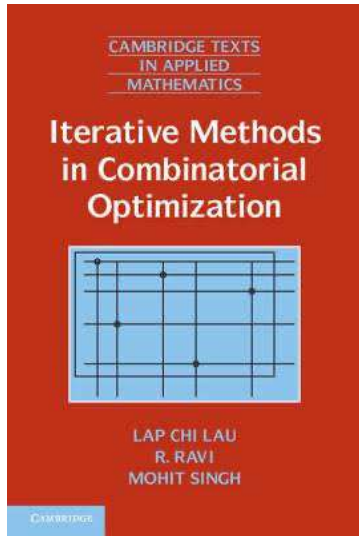
---

Lap Chi Lau, R. Ravi and Mohit Singh.

Published 2011 by Cambridge University Press.

# 文献紹介

- 2011年出版
- 組み合わせ最適化問題において、厳密/近似最適化における反復手法を説明
- 学部上級~大学院初級レベルの組み合わせ最適化の入門書に適している
- 著者は、みなComputer Scienceの研究者で、組合せ最適化などが専門



## 章立て

1. Introduction
2. Preliminaries
3. Matching and Vertex Cover in Bipartite Graphs
4. Spanning Trees
- 5. Matroids**
6. Arborescence and Rooted connectivity
7. Submodular Flows and Applications
8. Network Matrices
9. Matchings

# マトロイド

スタートアップゼミ 最適化課題2023解説

## 最小全域木とマトロイド

最小全域木問題が効率的に解けるのは、マトロイドという都合のいい構造のおかげ。

### マトロイド

マトロイドとは、有限集合 $E$ とその部分族 $F \subset 2^E$ の組であって、以下を満たすもの。

1.  $\emptyset \in F$
2.  $X \in F$  かつ  $Y \subseteq X$  ならば  $Y \in F$
3.  $X, Y \in F$  かつ  $|X| > |Y|$  ならば、ある  $e \in X - Y$  であって  $Y \cup \{e\} \in F$  となるものが存在する。

要するに、マトロイドは、集合と部分集合の中で特定の性質を持つものを扱う数学的な道具です。  
これは、最適化問題や組み合わせ問題を解く際に非常に便利です。

## ChatGPT

H 初学者に対し、なるべくわかりやすくマトロイドを説明して

マトロイドは、集合とその部分集合の組み合わせに関する特別な構造を持つ数学的な対象です。これを理解するために、まずは「独立性」と「交換性」の概念から始めましょう。

独立性とは、集合の要素の組み合わせで構成される部分集合の中で、どの要素も他の要素に依存していない状態を指します。例えば、あるグラフの頂点集合からなる部分集合で、その頂点同士が辺で結ばれていない場合、その部分集合は独立であるといえます。

交換性とは、ある操作を行っても結果が変わらない性質を指します。具体的には、2つの部分集合AとBがあり、AがBの要素を全て含んでいる場合、Bが独立であるならば、AにBを追加しても独立性が保たれます。つまり、BをAに追加しても、新しい部分集合も独立となります。

マトロイドでは、集合とその部分集合の中で、独立性と交換性の特性を持つものを扱います。マトロイドは、それらの特性に基づいて最適化問題や組み合わせ問題を解くための道具として使われます。

例えば、グラフの最小全域木問題を考えてみましょう。最小全域木とは、グラフ内の全ての頂点を含む木構造で、辺の重みの総和が最小となるものです。この問題を解くために、マトロイドを使うことができます。

具体的には、グラフの頂点集合を要素とする集合を考えます。そして、その部分集合が独立かどうかを判定します。ここで、独立な部分集合は、辺の重みの合計が最小となる最小全域木を構成する可能性がある部分集合と対応します。

マトロイドの特性を利用することで、最小全域木問題を効率的に解くアルゴリズムを設計することができます。同様に、マトロイドは他の最適化問題や組み合わせ問題にも適用することができます。

マトロイドは、数学的な抽象概念であり、初学者にとって

# マトロイド

マトロイドに対しては、貪欲アルゴリズムが必ず最適解を出力する

非空な有限集合 $E$ ，独立集合族 $\mathcal{F} \subseteq 2^E$

**定理** 次の2つは同値.

1. 任意の重み関数 $w : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  に対して，貪欲アルゴリズムが最適解を出力する
2. 独立集合族 $\mathcal{F}$ がマトロイドである

# 「第5章 マトロイド」

マトロイドの性質を利用して、重要な組み合わせ問題を抽象化し、効率的な解法を提供する

1. Preliminaries

2. Maximum Weight Basis

最大重み基問題

3. Matroid Intersection

最大重み交差マトロイドを求める問題

4. Duality and Min-Max Theorem

2.と3.の双対問題と最小最大定理

5. Minimum Bounded Degree Matroid Basis

次数制約つき最小コスト基問題

6. k Matroid Intersection

K個マトロイドの交差問題

‘最も重要な多項式時間解可能な問題’  
→解が整数となることを示す

それぞれ拡張

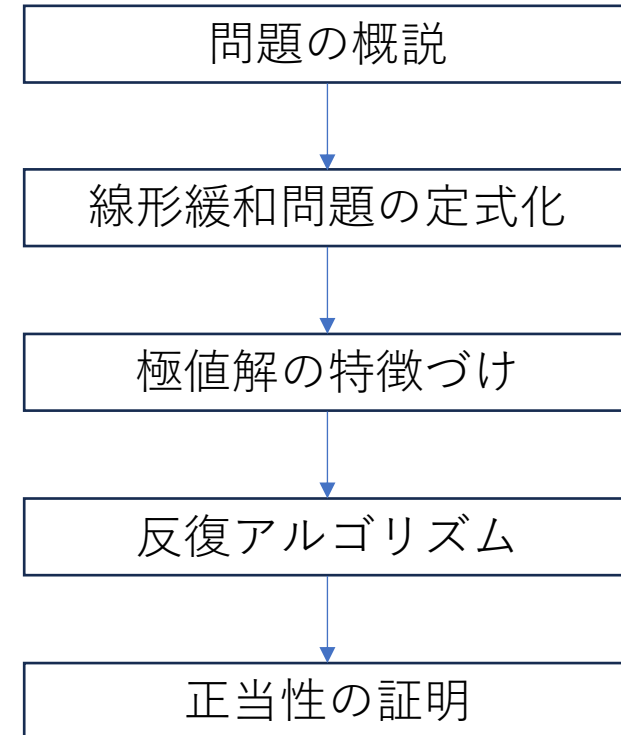
‘NP困難なマトロイド最適化問題’  
→近似アルゴリズムを示す

# 「第5章 マトロイド」構成

## 4種類の問題

1. Preliminaries
2. Maximum Weight Basis  
**最大重み基問題**
3. Matroid Intersection  
**最大重み交差マトロイドを求める問題**
4. Duality and Min-Max Theorem  
**2.と3.の双対問題と最小最大定理**
5. Minimum Bounded Degree Matroid Basis  
**次数制約つき最小コスト基問題**
6. k Matroid Intersection  
**K個マトロイドの交差問題**

## 説明の流れ



# 良かった点・悪かった点

## 良かった点

- アルゴリズムの正当性が担保されている, またそのことを理解しやすい構成
- 応用例が都度示されている点

## 悪かった点(全て発表者の実力不足に依るものだが…)

- 前置きが十分でないので, 初学者には向かない
  - マトロイドの概念自体が高度に抽象化されておりとっつきにくいものであるため, 具体例がもっと欲しかった
  - その点, 先ほど紹介した授業資料は大変分かりやすい
- 5章単体では理解が難しい
  - 全域木やネットワーク行列などの定理を多く証明に使用
  - 本来なら, 1冊全部読み通して発表すべきだった

# 有用性

- 多くの組み合わせ最適化を一般/抽象化できる
- 効率的な求解アルゴリズムをの正当性を証明

交通分野への応用：グラフ・ネットワークの多くの問題に対応(ネットワークフロー・マッチング)

- ネットワーク最適化
- 交通流最適化
- 輸送計画最適化

最小全域木  
二部グラフ





# 本日の発表の方針

1. Preliminaries

「マトロイド」について概観

2. Maximum Weight Basis

3. Matroid Intersection

4. Duality and Min-Max Theorem

目標：  
利用されているマトロイドの性質を理解した上で  
「問題」と「定式化」と「アルゴリズム」を理解  
→アルゴリズムの正当性を理解

5. Minimum Bounded Degree Matroid Basis

6. k Matroid Intersection

本日の発表内容のうち、1.Preliminariesには、岡本吉央先生の[電気通信大学「離散最適化基礎論」2015年講義資料](#)に準拠した内容を含みます。マトロイドの基礎について、証明などより詳細かつ丁寧な理解のために、適宜リンク先資料を参照して下さい。（本発表では、時間の都合上証明は省略）

「集合族」とは、「部分集合からなる集合」

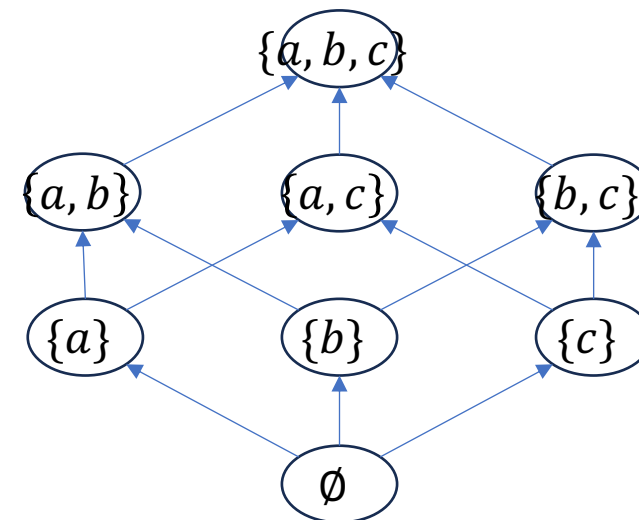
- 集合 $S$ のすべての部分集合の族( $S$ の冪集合)を $2^S$ と記す.
- $S$ 上の集合族 $\mathcal{F}$ とは,  $2^S$ の部分集合

冪集合

$$2^S = \{E \mid E \subseteq S\}$$

例)  $A = \{a, b\}$ の冪集合は,  $2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

$B = \{a, b, c\}$ の冪集合は,  $2^B = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$



# マトロイドの定義

## 定義 マトロイド

$\mathcal{J}$ が次の性質を持つ非空部分集合族であるとき、 $\mathcal{M} = (S, \mathcal{J})$ はマトロイドである。

(1)  $\emptyset \in \mathcal{J}$

(2)  $A \in \mathcal{J}$ かつ $B \subseteq A$ ならば、 $B \in \mathcal{J}$

(3)  $A, B \in \mathcal{J}$ かつ $|B| > |A|$ ならば、ある $x \in B \setminus A$ が存在して、 $A \cup \{x\} \in \mathcal{J}$

•  $S$ : マトロイド $\mathcal{M}$ の**台集合**(*ground set*) –非空な有限集合

•  $\mathcal{J}$ : 独立集合族

•  $S$ の部分集合 $A (A \subseteq S)$ が、

$\mathcal{J}$ の要素であるとき( $A \in \mathcal{J}$ )、 $A$ は**独立**(*independent*)である

$\mathcal{J}$ の要素でないとき( $A \notin \mathcal{J}$ )、 $A$ は**従属**(*dependent*)である

例

$$S = \{1, 2, 3, 4\},$$

$$\mathcal{J} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}\}$$

# マトロイドの基

## マトロイドの基 (*basis*)

マトロイド  $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$  の基とは、次を満たす独立集合  $B \in \mathcal{I}$

任意の  $x \in S \setminus B$  に対して、 $B \cup \{x\} \notin \mathcal{I}$

- 極大な独立集合

## マトロイドの性質

$B, B'$  がマトロイド  $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$  の基であるとして、以下の性質を持つ

I.  $X \subseteq B$  ならば、 $X \in \mathcal{I}$

II.  $|B| = |B'|$  同濃度性 –all bases have the same cardinality

III. 任意の  $x \in B$  に対して、ある  $x' \in B'$  が存在して、 $(B - \{x\}) \cup \{x'\}$  も  $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$  の基 基交換定理

1. Graphic Matroid – グラフ的マトロイド
2. Uniform Matroid – 一様マトロイド
3. Partition Matroid – 分割マトロイド
4. Linear Matroid – 線形マトロイド
5. Matroid Restriction – マトロイドの制限

# グラフ的マトロイド

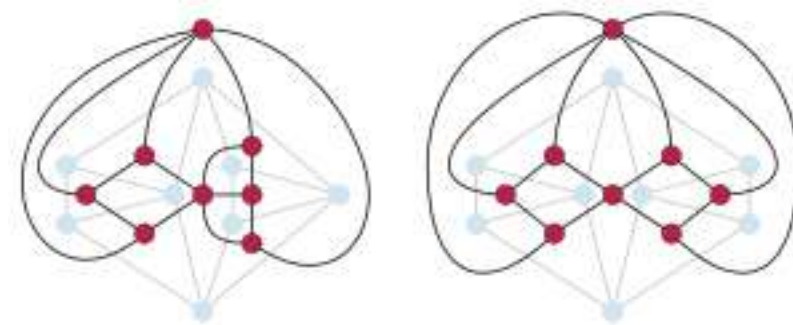
点集合 $V$ , 枝集合 $E$ を持つ無向グラフ $G = (V, E)$ を考える.

$G$ のグラフ的マトロイドは, 以下のように定義される.

$$\mathcal{M}_G = (E, \mathcal{J}_G)$$

where  $\mathcal{J}_G = \{F \subseteq E \mid F \text{ contains no cycles}\}$

$\mathcal{J}_G$  : 枝集合の部分集合のうち, 閉路を含まないのもの全体



[引用元](#)

# 一様マトロイド

有限集合 $S$ と非負整数 $k$ を考える.

階数 $k$ がである一様マトロイドは, 以下のように定義される.

$$\mathcal{M}_S^k = (S, \mathcal{I}^k)$$

where  $\mathcal{I}^k = \{T \subseteq S : |T| \leq k\}$

例

$S = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $k = 2$  のとき

$\mathcal{I}^k = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$

## マトロイドの打ち切りと一様マトロイド (1)

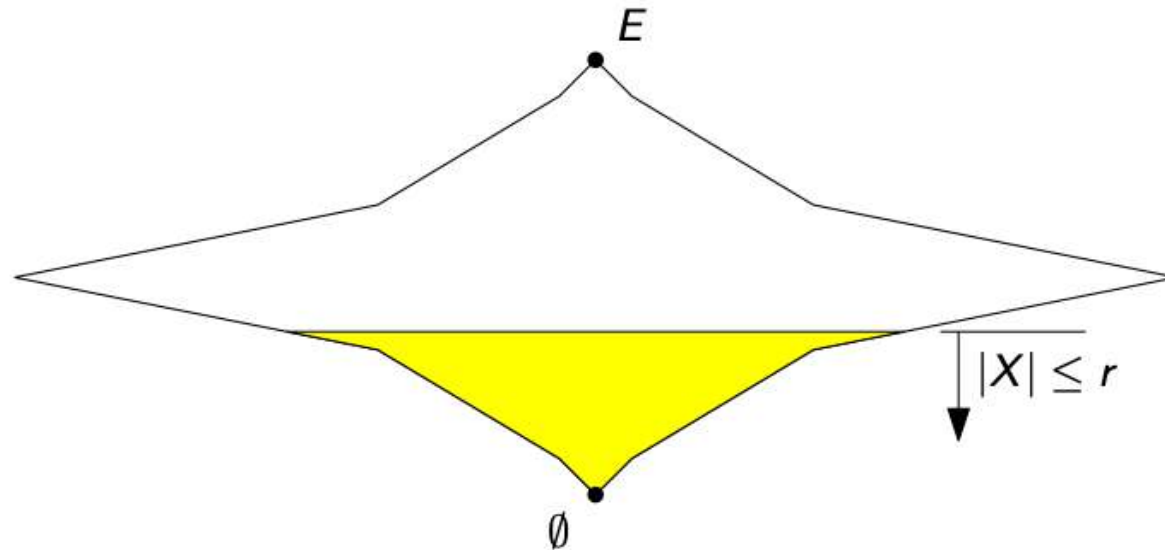
非空な有限集合  $E$ , 自然数  $r \geq 0$

### 一様マトロイドの定義 (復習)

有限集合族  $\mathcal{I}$  を

$$\mathcal{I} = \{X \subseteq E \mid |X| \leq r\}$$

と定義すると,  $\mathcal{I}$  は  $E$  上のマトロイド (一様マトロイドと呼ばれる)





マトロイド  $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$  と集合  $T \subseteq S$  について,

集合  $T$  に対するマトロイド  $\mathcal{M}$  の制限とは以下の通り

$$\mathcal{M}_T = (T, \mathcal{I}_T)$$

where  $\mathcal{I}_T = \{R : R \in \mathcal{I}, R \subseteq T\}$

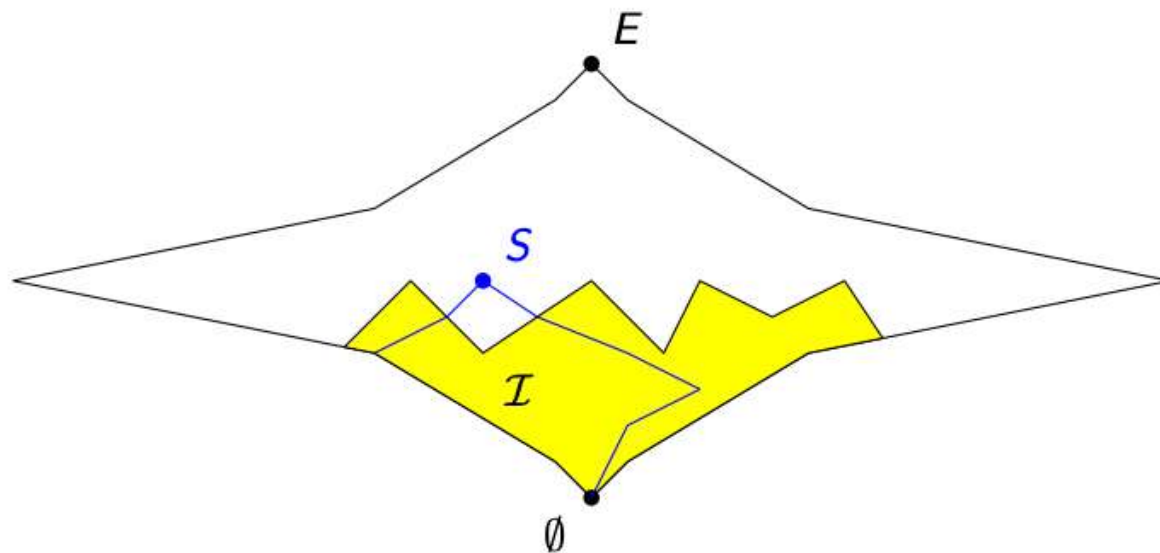
## マトロイドの制限

非空な有限集合  $E$ , マトロイド  $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ , 部分集合  $S \subseteq E$

マトロイドの制限 (restriction) とは？

$\mathcal{I}$  の制限とは, 次の集合族  $\mathcal{I}|S$

$$\mathcal{I}|S = \{X \mid X \in \mathcal{I}, X \subseteq S\}$$



# マトロイドの階級関数

## 定義 階級関数

マトロイド  $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$  について,  $M$  の階級関数  $r_M: 2^S \rightarrow \mathbb{Z}$  は次のように定義される.

$$r_M(T) = \max_{U \subseteq T, U \in \mathcal{I}} |U|$$

以降, 簡単のため添字  $M$  は省略

マトロイドの階級関数の性質-(1)

I.  $A \subseteq S$  ならば,  $r(A) \leq |A|$

II.  $A \in \mathcal{I}$  であることは,  $r(A) = |A|$  であることと同値

III.  $A \subseteq B$  ならば,  $r(A) \leq r(B)$

単調性

IV.  $A \subseteq S$  かつ,  $x \in S$  ならば,  $r(A \cup \{x\}) \leq r(A) + 1$

単位増加性

# マトロイドの階級関数

## 定義 階級関数

マトロイド  $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$  について,  $M$  の階級関数  $r_M: 2^S \rightarrow \mathbb{Z}$  は次のように定義される.

$$r_M(T) = \max_{U \subseteq T, U \in \mathcal{I}} |U|$$

以降, 簡単のため添字  $M$  は省略

## 補題 マトロイドの階級関数の性質 劣モジュラ性 (submodular)

$$r(A) + r(B) \geq r(A \cup B) + r(A \cap B)$$

劣モジュラ不等式

# マトロイドの操作

## 定義 除去(*deletion*)

マトロイド  $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$  と  $x \in S$  について,  $\mathcal{M}$  から  $x$  を除去して得られるマトロイド  $\mathcal{M} \setminus x$  は次のように定義される.

$$\mathcal{M} \setminus x = (S \setminus \{x\}, \mathcal{I}')$$

$$\text{ただし, } \mathcal{I}' = \{T \setminus \{x\} : T \in \mathcal{I}\}$$

$S \setminus \{x\}$  の部分集合  $T$  について,

マトロイド  $\mathcal{M} \setminus x$  の階級関数  $r_1$  は  $\mathcal{M}$  の階級関数を  $r$  として, 次の式で表される

$$r_1(T) = r(T)$$

# マトロイドの操作

## 定義 縮約 (*contraction*)

マトロイド  $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$  と  $x \in S$  について,  $\mathcal{M}$  から  $x$  を縮約して得られるマトロイド  $\mathcal{M}/x$  は次のように定義される.

$$\mathcal{M}/x = (S \setminus \{x\}, \mathcal{I}'')$$

ただし,  $\{x\}$  が独立のとき,  $\mathcal{I}'' = \{T \subseteq S \setminus \{x\} : T \cup \{x\} \in \mathcal{I}\}$

$\{x\}$  が従属のとき,  $\mathcal{I}'' = \mathcal{I}$

$S \setminus \{x\}$  の部分集合  $T$  について,

マトロイド  $\mathcal{M}/x$  の階級関数  $r_2$  は  $\mathcal{M}$  の階級関数を  $r$  として, 次の式で表される

$$r_2(T) = r(T \cup \{x\}) - r(\{x\})$$

$\{x\}$  が従属のとき,  $\mathcal{M} \setminus x = \mathcal{M}/x$

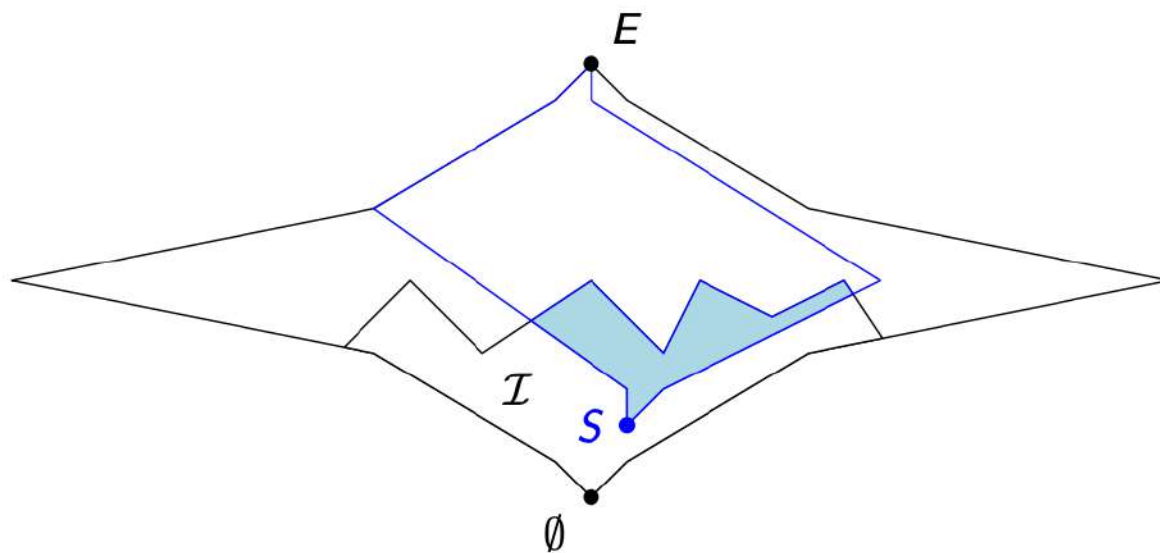
## マトロイドの縮約

非空な有限集合  $E$ , マトロイド  $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ , 独立 集合  $S \in \mathcal{I}$

### マトロイドの縮約 (contraction) とは？

$\mathcal{I}$  の縮約とは, 次の集合族  $\mathcal{I}/S$

$$\mathcal{I}/S = \{X \mid X \cup S \in \mathcal{I}, X \subseteq E - S\}$$



$S \notin \mathcal{I}$  のときにも縮約は定義できるが, 上とは違う式で行われる

# 最大重み基問題

マトロイド  $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$  と重み関数  $w: S \rightarrow \mathbb{R}$  について、最大の重みを持つマトロイド  $\mathcal{M}$  の基を求める

具体例：

最小全域木問題： 連結グラフの全ての頂点を含み、辺の重みの総和が最小となるような木

グラフ的マトロイドにおいて、エッジのコストを重みの負の値とすることで求解可能

○連結グラフにおける全域森(閉路を含まない：spanning forest)は、グラフ的マトロイドにおける「独立集合」に相当

○連結グラフにおける全域木(連結かつ閉路を含まない：spanning forest)は、グラフ的マトロイドにおける「基」に相当



## 線形計画法での定式化

変数 $x$ の整数条件を緩和した $LP_{mat}(M)$ の定式化, ただし

$$x_e = \begin{cases} 1, & e \text{ is in the solution} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad x(T) = \sum_{e \in T} x_e \quad T \text{は台集合 } S \text{の任意の部分集合}$$

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \sum_{e \in S} w_e x_e \\ \text{subject to} & x(S) = r(S) \\ & x(T) \leq r(T) \quad \forall T \subseteq S \\ & x_e \geq 0 \quad \forall e \in S \end{array}$$

解法：指数関数的なサイズであるため、各 $T \subseteq S$ について $x(T) \leq r(T)$ を確認する制約分離が必要

# 極値解の特徴づけ

$$\begin{array}{ll}
 \text{maximize} & \sum_{e \in S} w_e x_e \\
 \text{subject to} & x(S) = r(S) \\
 & x(T) \leq r(T) \quad \forall T \subseteq S \\
 & x_e \geq 0 \quad \forall e \in S
 \end{array}$$

解法：指数関数的なサイズであるため、各  $T \subseteq S$  について  $x(T) \leq r(T)$  を確認する制約分離が必要

## 定義2.1 チェーン(chain)

ある部分集合  $\mathcal{L} \subseteq 2^S$  の任意の  $A, B \in \mathcal{L}$  に対して、 $A \subseteq B$  または  $B \subseteq A$  が成り立つとき、  
 $\mathcal{L}$  はチェーンである。

→ 「線形独立な制約条件の集合がチェーンを形成するように選ぶことができる」ということを示す

(制約条件の集合を包含関係で結ぶことができるチェーンの特性を利用することで、線形計画問題の極値解を特定する)

# 極値解の特徴づけ

**目標：線形独立な制約条件の集合がチェーンを形成するように選ぶことができる,ということを示す**

$LP_{mat}(M)$ の極値解 $x$ について,  $\mathcal{F} = \{T \subseteq S : x(T) = r(T)\}$ をタイトな制約の集合であるとする

集合 $T \subseteq S$ について,  $\mathbb{R}^{|S|}$ における特徴ベクトルを $\chi(T)$ と定める.  $\chi(T)$ は各要素 $e$ について,  $e \in T$ のとき1, それ以外で0をとる

→  $\mathcal{F}$ が共通部分と和集合について閉じていることを示す

**補題2.2**  $U, V \in \mathcal{F}$ であるとき,  $U \cap V$ と $U \cup V$ はともに $\mathcal{F}$ に含まれる.

さらに

$$\chi(U) + \chi(V) = \chi(U \cap V) + \chi(U \cup V)$$

(証明略)

※タイトな制約

解が制約条件の等号 (厳密に一致) を満たす場合に発生する制約

解が制約条件の境界に位置している状態を表す → 解の可能な範囲を制限し、最適解の特性を特定する上で重要

# 極値解の特徴づけ

補題2.2より以下が導かれる

$span$  : ベクトルの張る空間

**補題2.3**  $\mathcal{L}$ が $\mathcal{F}$ の最大チェーン部分族である場合、 $span(\mathcal{L}) = span(\mathcal{F})$ となる。

(証明略)

意味：極値解をより単純な構造であるチェーンによって特徴付けることができることを示す

ここから、以下の補題が導かれる

**補題2.4**  $x$ が各要素 $e \in S$ に対して $x_e > 0$ である $LP_{mat}(M)$ の極値解であるとき、以下を満たすようなチェーン $\mathcal{L}$ が存在する。

- I. 各 $T \subseteq \mathcal{L}$ に対して、 $x(T) = r(T)$
- II.  $\{x(T) : T \subseteq \mathcal{L}\}$ に含まれるベクトルは線形独立である
- III.  $|\mathcal{L}| = |S|$

(証明略)

# 反復アルゴリズム

線形計画法から整数解を導く反復アルゴリズムと、線形計画法の定式化が整数解を持つことを示す

## 最大重みマトロイド基の反復アルゴリズム

1. 初期化： $B \rightarrow \emptyset$
2.  $B$ が基でない限り，(a)(b)を実行
  - (a)  $LP_{mat}(M)$ の極値解 $x$ を見つけ， $\mathcal{M}$ から $x_e = 0$ である各 $e$ を削除する： $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \setminus e$
  - (b)  $x_e = 1$ である要素 $e$ が存在すれば， $B$ を $B \leftarrow B \cup \{e\}$ で更新し， $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} / e$ とする
3.  $B$ を返す

→アルゴリズムが終了することを証明する補題

**補題2.5**  $LP_{mat}(M)$ の極値解 $x$ について、すべての要素 $e$ に対して $x_e > 0$ が成り立つ場合、少なくとも1つの要素 $e$ が $x_e = 1$ を満たす。

証明

方針：背理法

すべての  $e \in S$  に対して  $0 < x_e < 1$  であると仮定する。補題2.4から、チェーンである  $\mathcal{L}$  が存在し、 $|\mathcal{L}| = |S|$ 。

ここで、 $x_e$  は整数ではないため、チェーンには単一の要素が存在しない。したがって、チェーン内の連続する2集合は少なくとも2要素で異なり、 $|L| \leq |S|/2$  となる。ここに矛盾が生じる。

→返された解が最大重み基であることを証明する定理

**定理2.6** 最大重みマトロイド基の反復アルゴリズムは、多項式時間で最大重み基を返す

証明

方針：アルゴリズムの反復回数に関する帰納法

仮定：

現在の反復におけるマトロイドを  $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$  とする。

アルゴリズムが  $x_e = 0$  となる要素  $e$  を見つけた場合、マトロイドを  $\mathcal{M} \setminus e$  に更新。

ここで、 $S \setminus \{e\}$  に制限された  $x$  である  $x'$  は、線形計画問題  $LP_{mat}(\mathcal{M} \setminus e)$  の実行可能解である。これは、 $\mathcal{M} \setminus e$  の階級関数が、 $e$  を含まない集合上の  $\mathcal{M}$  の階級関数と同一であることから確認できる。

帰納法により、重みが少なくとも  $w \cdot x'$  である  $\mathcal{M} \setminus e$  の基  $B$  を見つけることができる。  $B$  はまた  $\mathcal{M}$  の基でもあり、少なくとも  $w \cdot x' = w \cdot x$  のコストを持つ。したがって、仮定は真である。

アルゴリズムが  $x_e = 1$  となる要素  $e$  を選択した場合、マトロイド  $\mathcal{M}$  を  $\mathcal{M} / e$ 、 $B$  を  $B \cup \{e\}$  に更新。

$\mathcal{M}$  の階級関数を  $r$ 、 $\mathcal{M} / e$  の階級関数を  $r'$  とする。任意の集合  $T \subseteq S \setminus \{e\}$  に対して、 $x'(T) = x(T \cup \{e\}) - x_e = x(T \cup \{e\}) - 1 \leq r(T \cup \{e\}) - 1 = r'(T)$  であることから、 $x$  は  $S \setminus \{e\}$  上に制約された解として適切な解  $x'$  である。帰納法の仮定により、 $\mathcal{M} / e$  の重みが少なくとも  $w \cdot x'$  である基  $B'$  を得ることができる。  $B' \cup \{e\}$  は重みが少なくとも  $w \cdot x' + we = w \cdot x$  である  $\mathcal{M}$  の基となる。したがって、仮定は真である。

→アルゴリズムが終了することを証明する補題

**補題2.5**  $LP_{mat}(M)$ の極値解 $x$ について、すべての要素 $e$ に対して $x_e > 0$ が成り立つ場合、少なくとも1つの要素 $e$ が $x_e = 1$ を満たす。

→返された解が最大重み基であることを証明する定理

**定理2.6** 最大重みマトロイド基の反復アルゴリズムは、多項式時間で最大重み基を返す

→  $LP_{mat}(M)$ が最大重み基問題の厳密な定式化であることが示される

**定理2.7**  $LP_{mat}(M)$ の極値解はマトロイド $\mathcal{M}$ の基である



# マトロイドの交差

## マトロイドの交差(*intersection*)

マトロイド  $\mathcal{M}_1 = (S, \mathcal{I}_1)$  と  $\mathcal{M}_2 = (S, \mathcal{I}_2)$  について、マトロイドの交差とは、次の集合族  $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$

$$\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \{X \mid X \in \mathcal{I}_1, X \in \mathcal{I}_2\}$$

- マトロイドの交差がマトロイドであるとは限らない

## マトロイドの合併(*union*)

マトロイド  $\mathcal{M}_1 = (S, \mathcal{I}_1)$  と  $\mathcal{M}_2 = (S, \mathcal{I}_2)$  について、マトロイドの合併とは、次の集合族  $\mathcal{I}_1 \vee \mathcal{I}_2$

$$\mathcal{I}_1 \vee \mathcal{I}_2 = \{X_1 \cup X_2 \mid X_1 \in \mathcal{I}_1, X_2 \in \mathcal{I}_2\}$$

- マトロイドの合併はマトロイド

# 最大重みマトロイド交差問題

マトロイド  $\mathcal{M}_1 = (S, \mathcal{I}_1)$  と  $\mathcal{M}_2 = (S, \mathcal{I}_2)$ , 重み関数  $w: S \rightarrow \mathbb{R}$  が与えられたとき,

最大の重みを持つ,  $\mathcal{M}_1$  と  $\mathcal{M}_2$  の両方で独立な集合  $T \subseteq S$  を求める問題

つまり,

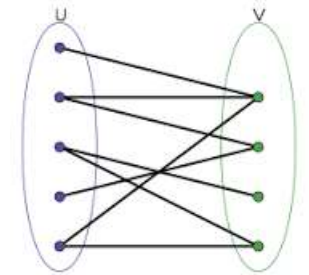
$$\max_{T \subseteq S, T \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2} w(T) = \sum_{e \in T} w_e$$

※対象は「2個のマトロイドの交差」.(3個以上の問題は一般的にNP-hard)

具体例:

- 二部グラフにおける最大重みマッチング

二部グラフとは、頂点が2つのグループに分かれており、辺は片方のグループから他方のグループへの接続を表すグラフ。最大重みマッチングでは、各辺に重みが割り当てられており、全体の重みが最大となるような辺の集合を見つける。



[引用元](#)

- 最大重み有向木問題

有向木とは、ある頂点を根とし、他の頂点への有向辺だけを含む木。最大重み有向木問題では、各辺に重みが割り当てられており、根から葉への経路の重みの総和が最大となるような有向木を見つける。

## 線形計画法での定式化

変数 $x$ の整数条件を緩和した $LP_{int}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ の定式化, ただし

$$x_e = \begin{cases} 1, & e \text{ is in the common independent set} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad r_i(T) \quad \text{マトロイド } \mathcal{M}_i \text{ における } T \text{ の階数関数}$$

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \sum_{e \in S} w_e x_e \\ \text{subject to} & x(T) \leq r_1(T) \quad \forall T \subseteq S \\ & x(T) \leq r_2(T) \quad \forall T \subseteq S \\ & x_e \geq 0 \quad \forall e \in S \end{array}$$

解法：分離オラクル(候補解を与えられた際に、その解が特定の制約を満たすかどうかを判定する手続き)を得るためには、 $LP_{int}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ の不等式を分離すればよい

←各マトロイド $\mathcal{M}_1$ と $\mathcal{M}_2$ に対して独立オラクルが与えられる場合に可能

# 極値解の特徴づけ

$$\begin{array}{ll}
 \text{maximize} & \sum_{e \in S} w_e x_e \\
 \text{subject to} & x(T) \leq r_1(T) \quad \forall T \subseteq S \\
 & x(T) \leq r_2(T) \quad \forall T \subseteq S \\
 & x_e \geq 0 \quad \forall e \in S
 \end{array}$$

方針：タイトな制約集合が，2個のチェーンの合併として選ぶことができることを示す

与えられた  $LP_{int}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$  の極値解に対して，タイトな制約集合をそれぞれ  $\mathcal{F}_1 = \{T \subseteq S : x(T) = r_1(T)\}$ ,  $\mathcal{F}_2 = \{T \subseteq S : x(T) = r_2(T)\}$  とする

# 極値解の特徴づけ

**補題3.1**  $C_1, C_2$ という2個のチェーンが存在し,  $\text{span}(C_1 \cup C_2) = \text{span}(F_1 \cup F_2)$ かつ $C_1$ と $C_2$ に含まれる制約は線形独立である

(証明略)

ここから, 以下の補題が導かれる

**補題3.2**  $x$ を各要素 $e \in S$ に対して $x_e > 0$ である $LP_{int}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ の極値解とすると, 以下を満たすような2個のチェーン $C_1, C_2$ が存在する.

- I. 各 $T \subseteq C_i$ に対して,  $x(T) = r_i(T)$ .  $i = \{1, 2\}$
- II.  $\{\chi(T) : T \subseteq C_1\} \cup \{\chi(T) : T \subseteq C_2\}$ に含まれるベクトルは線形独立である
- III.  $|C_1| + |C_2| = |S|$

(証明略)

# 反復アルゴリズム

線形計画法から整数解を導く反復アルゴリズムと、線形計画法の定式化が整数解を持つことを示す

## マトロイド交差の反復アルゴリズム

1. 初期化： $I \rightarrow \emptyset$
2.  $S \neq \emptyset$ である限り、(a)(b)を実行
  - (a)  $LP_{int}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ の極値解 $x$ を見つけ、 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ から $x_e = 0$ である各 $e$ を削除する  
i.e.,  $\mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_1 \setminus e$  and  $\mathcal{M}_2 \rightarrow \mathcal{M}_2 \setminus e$
  - (b)  $x_e = 1$ である要素 $e$ が存在すれば、 $I$ を $I \leftarrow I \cup \{e\}$ で更新し、 $\mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_1 / e, \mathcal{M}_2 \rightarrow \mathcal{M}_2 / e$ とする
3.  $I$ を返す

**補題3.3**  $LP_{int}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ の極値解 $x$ について、すべての要素 $e$ に対して $x_e > 0$ が成り立つ場合、少なくとも1つの要素 $e$ が $x_e = 1$ を満たす。

証明

方針：背理法

すべての  $e \in S$  に対して  $0 < x_e < 1$  であると仮定

↓

補題3.2を利用し,  $LP_{int}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ の極値解 $x$ に対して存在する2個のチェーン $C_1, C_2$ を得る

↓

場合ごとの数え上げを利用して,  $|S| = |C_1| + |C_2|$  に矛盾することを示す

→アルゴリズムが終了することを証明する補題

**補題3.3**  $LP_{int}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ の極値解 $x$ について、すべての要素 $e$ に対して $x_e > 0$ が成り立つ場合、少なくとも1つの要素 $e$ が $x_e = 1$ を満たす。

→返された解が最適であることを確認(定理2.6と同様の証明で導出できる)

**定理3.4** マトロイド交差の反復アルゴリズムは、両マトロイドの交差において独立した最大重み集合を返す

(証明略)

→  $LP_{int}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ が最大重みマトロイド交差の厳密な定式化であることも示す

**定理3.5**  $LP_{int}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ の極値解は、マトロイド $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ の交差における独立集合である



## 目標：

- 最大重み基問題と最大重みマトロイド交差問題の双対問題について考え、その整数性を示す
- マトロイド交差の最小最大定理を証明する

# 最大重み基問題の双対問題

$LP_{mat}(M)$ の双対問題を $LP_{dmat}(M)$ と呼ぶ

部分集合 $T$ の双対変数を $y(T)$ とする. 重み $w_e$ は非負整数であるとする.

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \sum_{T \subseteq S} r(T)y(T) \\ \text{subject to} & \sum_{T: e \in T} y(T) \geq w_e \quad \forall e \in S \\ & y(T) \geq 0 \quad \forall T \subseteq S \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \sum_{e \in S} w_e x_e \\ \text{subject to} & x(S) = r(S) \\ & x(T) \leq r(T) \quad \forall T \subseteq S \\ & x_e \geq 0 \quad \forall e \in S \end{array}$$

# 最大重み基問題の双対問題

**命題4.1**  $LP_{dmat}(M)$ には、最適解 $y$ が存在し、集合 $C = \{T \subseteq S : y(T) > 0\}$ が $S$ のチェーンである

(証明略)

これは、次の制限付き線形計画問題 $LP_{rdmat}(M)$ が、 $LP_{dmat}(M)$ と同じ目的関数を持つことを意味する。

$LP_{rdmat}(M)$

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \sum_{T \in C} r(T)y(T) \\ \text{subject to} & \sum_{T \in C: e \in T} y(T) \geq w_e \quad \forall e \in S \\ & y(T) \geq 0 \quad \forall T \in C \end{array}$$

$LP_{dmat}(M)$

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \sum_{T \subseteq S} r(T)y(T) \\ \text{subject to} & \sum_{T: e \in T} y(T) \geq w_e \quad \forall e \in S \\ & y(T) \geq 0 \quad \forall T \subseteq S \end{array}$$

$C$ がチェーンである $\rightarrow LP_{rdmat}(M)$ の制約行列がネットワーク行列である $\rightarrow LP_{rdmat}(M)$ は整数解を持つ

**命題4.2**  $LP_{dmat}(M)$ の線形計画問題定式化はintegralである。(整数解を持つ)

$LP_{int}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$  の双対問題を  $LP_{dint}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$  と呼ぶ

部分集合  $T$  の双対変数を  $y(T)$  とする. 重み  $w_e$  は非負整数であるとする.

$$\begin{array}{ll}
 \text{minimize} & \sum_{T \subseteq S} r_1(T)y_1(T) + r_2(T)y_2(T) \\
 \text{subject to} & \sum_{T: e \in T} (y_1(T) + y_2(T)) \geq w_e \quad \forall e \in S \\
 & y_i(T) \geq 0 \quad \forall T \subseteq S, 1 \leq i \leq 2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{maximize} & \sum_{e \in S} w_e x_e \\
 \text{subject to} & x(T) \leq r_1(T) \quad \forall T \subseteq S \\
 & x(T) \leq r_2(T) \quad \forall T \subseteq S \\
 & x_e \geq 0 \quad \forall e \in S
 \end{array}$$

**命題4.3**  $LP_{dint}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ には、最適解 $y$ が存在し、集合 $C_1 = \{T \subseteq S : y_1(T) > 0\}$ 及び $C_2 = \{T \subseteq S : y_2(T) > 0\}$ がともに $S$ のチェーンである

(証明略)

これは、次の制限付き線形計画問題 $LP_{rdint}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ が、 $LP_{dint}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ と同じ目的関数を持つことを意味する。

<p><math>LP_{rdint}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)</math></p> <p>minimize <math>\sum_{T \in C_1} r_1(T)y_1(T) + \sum_{T \in C_2} r_2(T)y_2(T)</math></p> <p>subject to <math>\sum_{T \in C_1: e \in T} y_1(T) + \sum_{T \in C_2: e \in T} y_2(T) \geq w_e \quad \forall e \in S</math></p> <p style="text-align: center;"><math>y_i(T) \geq 0 \quad \forall T \in C_i, 1 \leq i \leq 2</math></p>	<p><math>LP_{dint}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)</math></p> <p>maximize <math>\sum_{e \in S} w_e x_e</math></p> <p>subject to <math>x(T) \leq r_1(T) \quad \forall T \subseteq S</math></p> <p style="text-align: right;"><math>x(T) \leq r_2(T) \quad \forall T \subseteq S</math></p> <p style="text-align: right;"><math>x_e \geq 0 \quad \forall e \in S</math></p>
--	---

$C_1, C_2$ がチェーンである $\rightarrow LP_{rdint}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ の制約行列がネットワーク行列である $\rightarrow LP_{rdint}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ は整数解を持つ

**命題4.2**  $LP_{rdint}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ の線形計画問題定式化はintegralである。(整数解を持つ)

定理3.5と定理4.4から、マトロイド $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ の共通独立集合における、最大最小定理(定理4.5)を得ることができる

**命題4.5** 階数関数がそれぞれ $r_1, r_2$ であるマトロイド $\mathcal{M}_1 = (S, \mathcal{I}_1)$ と $\mathcal{M}_2 = (S, \mathcal{I}_2)$ が与えられた時、 $\mathcal{I}_1$ と $\mathcal{I}_2$ における最大共通独立集合は次の式で与えられる。

$$\max_{I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2} |I| = \min_{T \subseteq S} (r_1(T) + r_2(S \setminus T))$$

**定理3.5**  $LP_{int}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ の極値解は、マトロイド $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ の交差における独立集合である

**命題4.2**  $LP_{rdint}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ の線形計画問題定式化は*integral*である。(整数解を持つ)

# 最大最小定理

**命題4.5** 階数関数がそれぞれ $r_1, r_2$ であるマトロイド $\mathcal{M}_1 = (S, \mathcal{I}_1)$ と $\mathcal{M}_2 = (S, \mathcal{I}_2)$ が与えられた時,  $\mathcal{I}_1$ と $\mathcal{I}_2$ における最大共通独立集合は次の式で与えられる.

$$\max_{I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2} |I| = \min_{T \subseteq S} (r_1(T) + r_2(S \setminus T))$$

マトロイドの交差における双対性を示す

→これを満たすような $I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ と $T \subseteq S$ が必ず存在し,  $I$ の最適性を保証できる

# おわりに

- 自分の研究への適用
  - ポート(拠点)配置最適化
  - 配車におけるマッチング
- 研究で「最適化をやっている」という以上，こういう理論をしっかりと理解しなければいけないなと感じた
- 当たり前だが，一朝一夕(実際は三朝三夕くらい)で理解できるものではなく，基礎力の欠如を感じたのでしっかり勉強したい
- 質疑応答を通して，理解度を上がられるといいなと思っています，よろしくお願いします



# 参考文献

- 岡本吉央. 「離散最適化基礎論」 講義資料. 電気通信大学大学院情報理工学研究科情報・通信工学専攻. 2015年後学期. <http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/lect/2015/matroid/>
- 岩田覚. 「『知識の森』 12群(電子情報通信基礎)- 2 編(離散数学)-5章マトロイド理論」 2009. 電子情報通信学会. [https://www.ieice-hbkb.org/files/12/12gun\\_02hen\\_05.pdf](https://www.ieice-hbkb.org/files/12/12gun_02hen_05.pdf)
- 室田一雄. 「基礎数理」 講義資料. 2014年冬学期. <http://www.misojiro.t.u-tokyo.ac.jp/~murota/lect-kisosuri/kisosuri14.html>