Discrete Convex Analysis

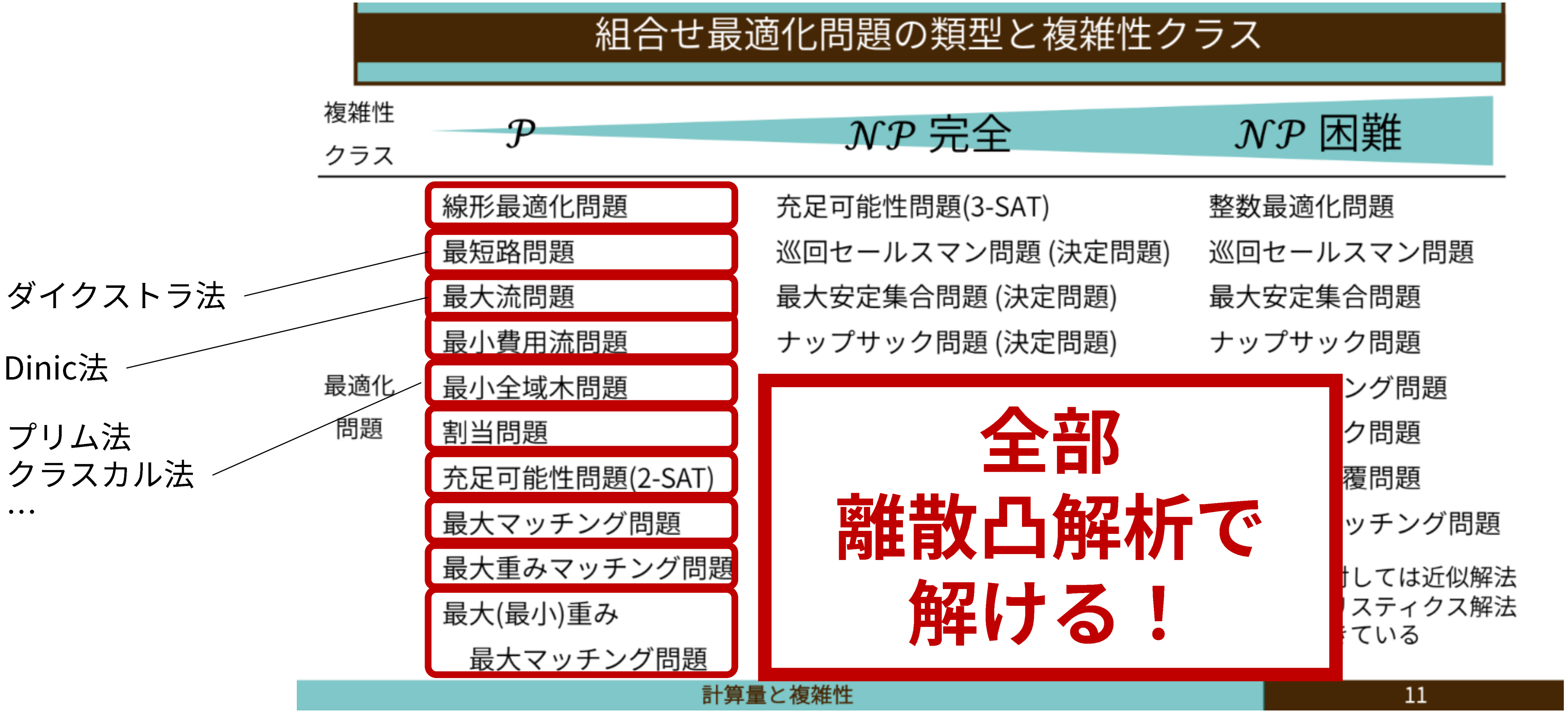
Murota, Kazuo. "Discrete convex analysis." Mathematical Programming 83 (1998): 313-371.

2023/6/7

M1 林由翔

研究のサマリー

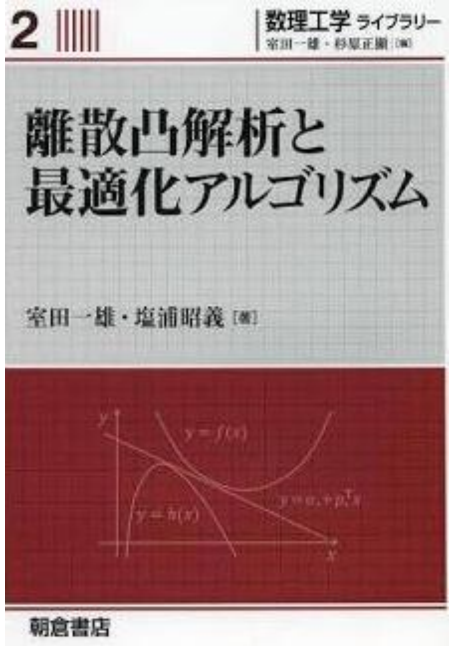
組合せ最適化問題に対する**効率的なアルゴリズムを開発するための統一的な手法**である，**Discrete Convex Analysis(離散凸解析)**という数学の一分野を開いた．



新規性/有用性/信頼度

新規性

- **組合せ最適化におけるエポックメイキングな論文**



有用性

- 様々な組合せ最適化問題に適用されてきた．
  - この論文ではアルゴリズムの話はほぼしてません．解けるということだけ示します．
- 問題が離散凸で解けるかどうか判断するにはかなりセンスがいる……

信頼性

- 数学の一分野として確立されるに至った

今日の発表内容について

- 添付されていたリンクが原論文(Murota, 1998)ではなく，その後に発展した離散凸解析の主要定理をまとめた講演資料でした．
  - Murota, Kazuo. "Discrete convex analysis." Hausdorff Institute of Mathematics, Summer School (September 21–25, 2015)
- 講演資料の構成を踏まえて，離散凸解析を概観する発表をします．

講演資料はこちらに重きを置いている

離散凸解析のモチベーション

数学：凸解析で成り立つ諸定理の離散版を確立する．
工学：組合せ最適化の統一的な計算手法を与える．

準備：連続な凸関数

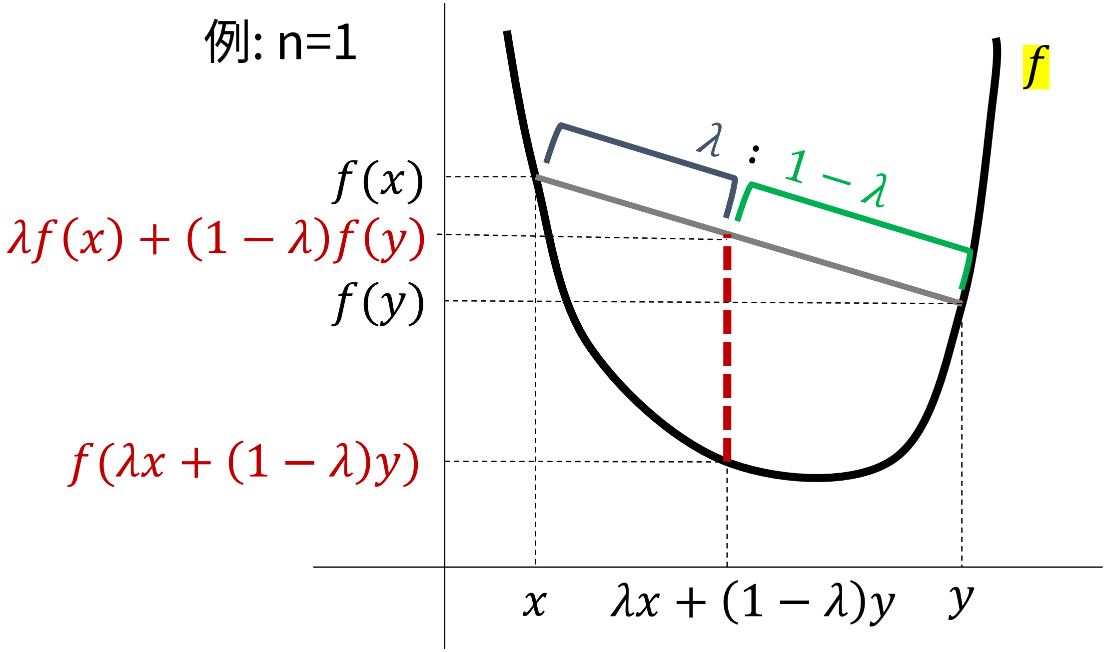
定義

$f: \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ が(連続な)**凸関数**であるとは，

N次元の 実数ベクトル　実数∩{+∞}

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \ \forall \lambda \in [0,1]$$
$$\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \geq f(\lambda x + (1-\lambda) y)$$

例: n=1



準備：連続な凸関数

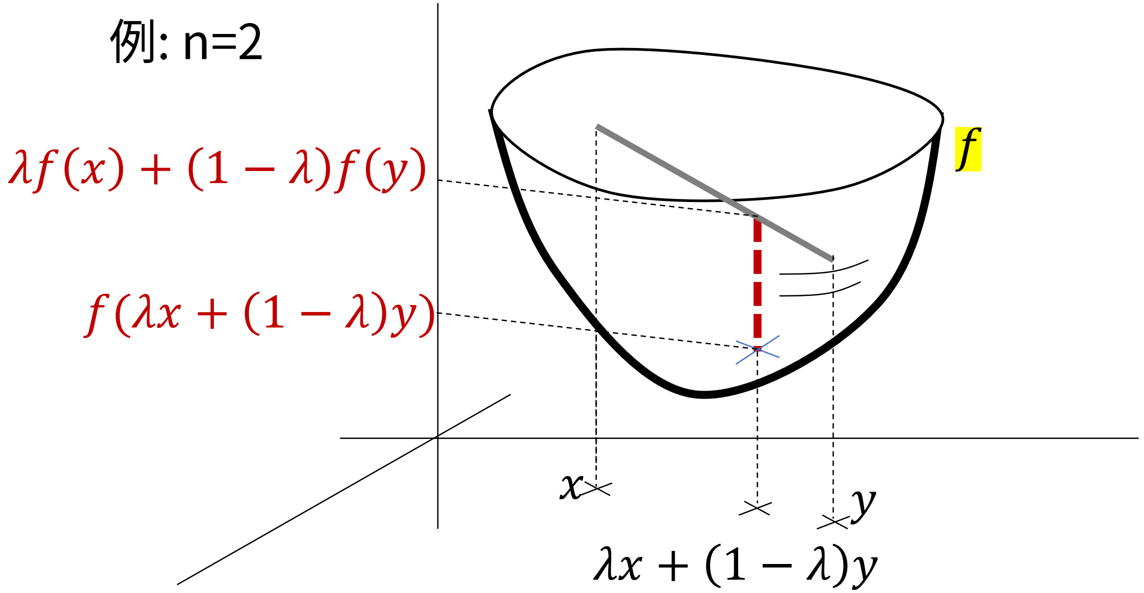
定義

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が(連続な)**凸関数**であるとは，

N次元の　実数∩{+∞}
実数ベクトル

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \ \forall \lambda \in [0,1]$$
$$\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \geq f(\lambda x + (1-\lambda) y)$$

例: n=2



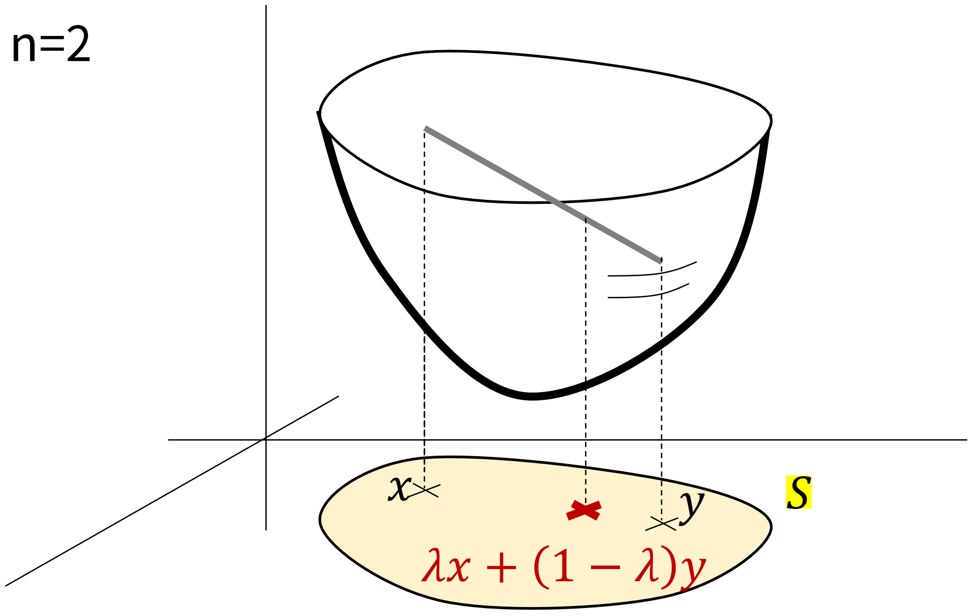
準備：連続な凸

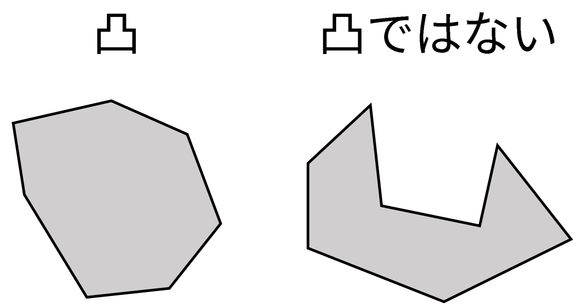
定義

集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ が**凸**であるとは,

$$\forall x, y \in S\ \forall \lambda \in [0,1]$$
$$\lambda x + (1-\lambda) y \in S$$

例: n=2





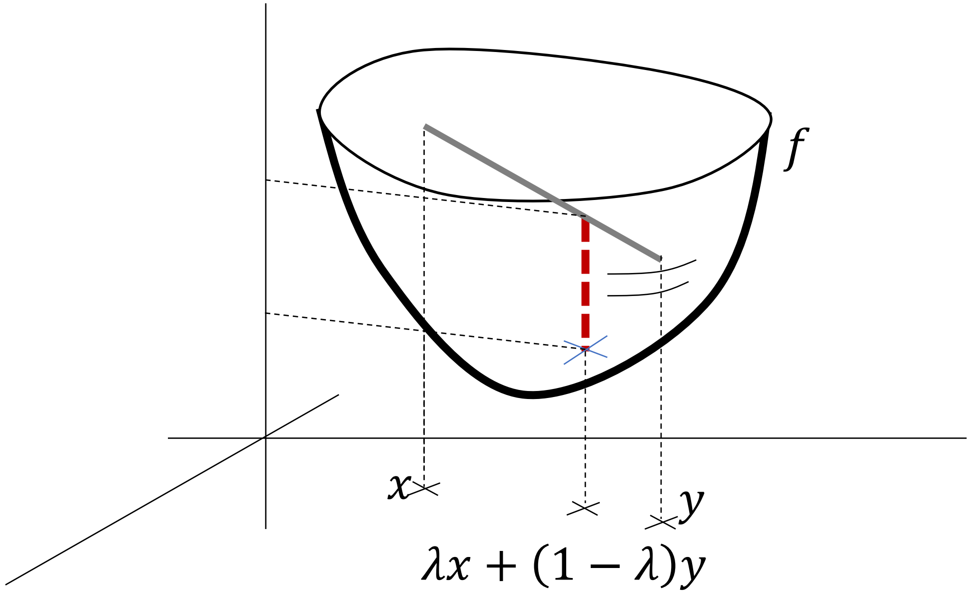
準備：連続凸関数の嬉しさ

凸集合を定義域とする(連続)凸関数は，

- $\min f$ が探しやすい：局所最適解=大域最適解
- 双対性(後述)が成り立つ

→定義域が離散的だったらどうなるか？

$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{Z}^n$ へ



離散凸関数の定義

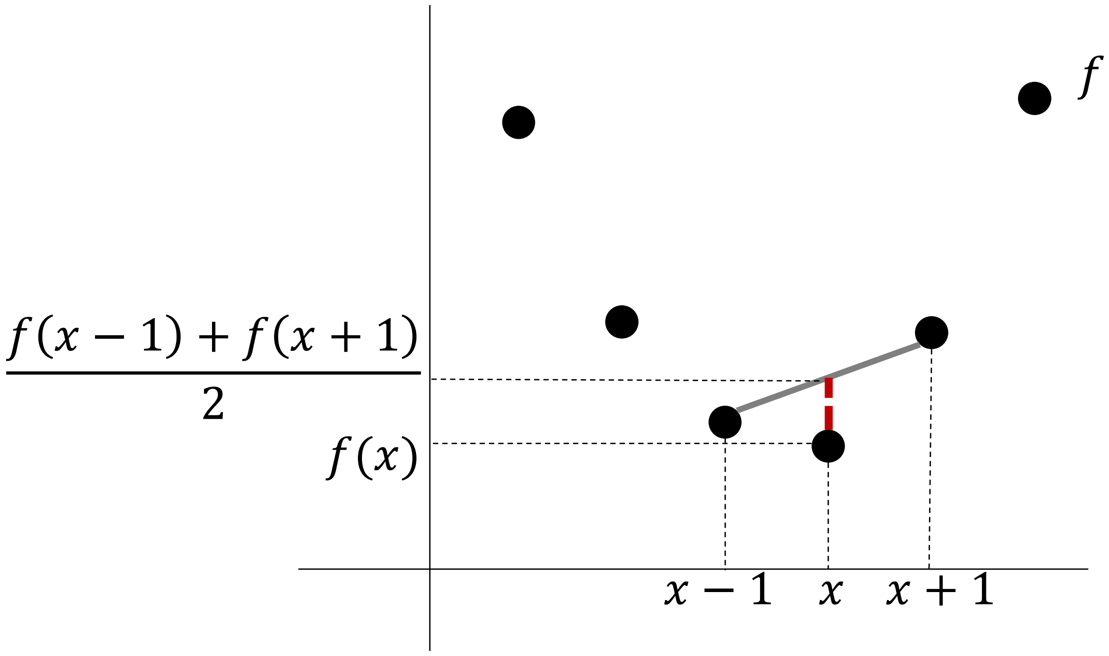
離散凸関数: n=1の場合

n=1なら簡単.

定義

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ が**離散凸関数**であるとは,

$$\forall x \in \mathbb{Z}$$
$$f(x-1) + f(x+1) \geq 2f(x)$$



離散凸関数: n=1の場合

$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ が**離散凸関数**であるとは，$\forall x\in\mathbb{Z}\; f(x-1)+f(x+1)\geq 2f(x)$ (※)

このように定義すると，以下の定理が成り立つため都合がいい．

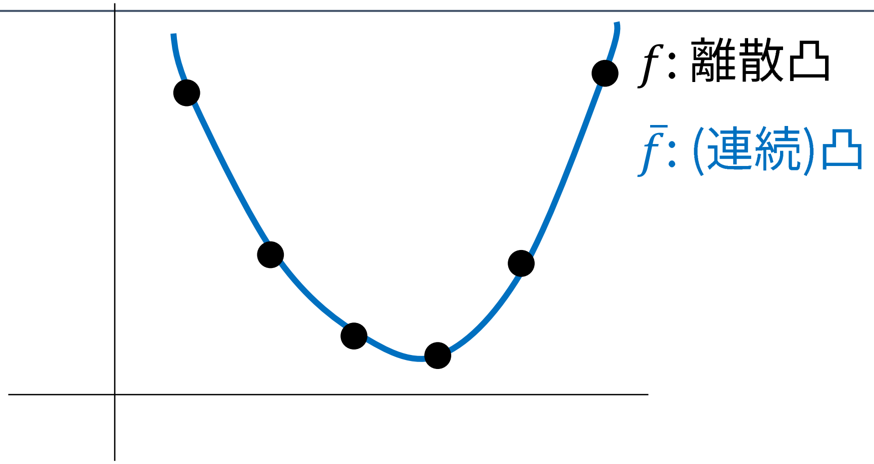
$\mathrm{dom}_{\mathbb{Z}} f$ ：$f(x)\in\mathbb{R}$ となる定義域
$f(x)=+\infty$ となる状況を除外

定理1

f が(※)式を満たす

⇔ある凸関数 $\bar{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ であって，
$\forall x\in\mathbb{R}\; \bar{f}(x)=f(x)$ を満たすものが存在する．

この性質を，f が**凸拡張**可能であるという．



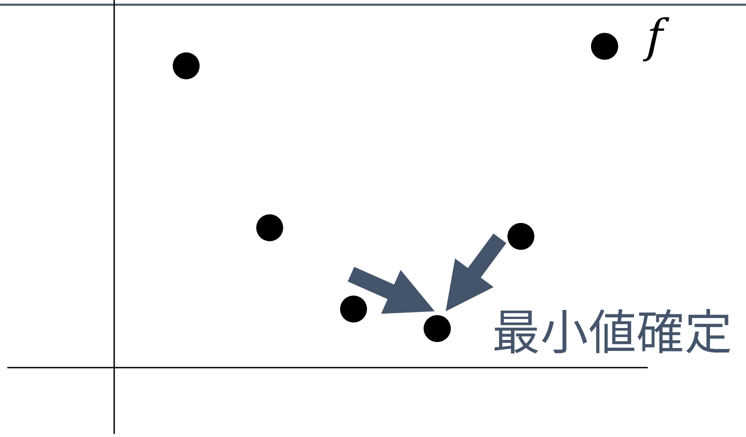
定理2

f が(※)式を満たすならば，

f が $x\in\mathrm{dom}_{\mathbb{Z}} f$ において大域的に最小になることと，局所的に最小になることが同値になる．局所的に最小とは，

$$f(x)\leq \min(f(x-1),f(x+1))$$

両隣と比較するだけで大域的に最小になることが保証！



離散凸関数

n>=2でも凸拡張可能性と大域最適性を持つように離散凸関数を定義したい.
→ **L♮関数**と**M♮凸関数**の2種類の定義が存在する.

どちらも(連続)凸関数からのアナロジーで導入できる.

L凸関数：中点凸

$\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \geq f(\lambda x + (1-\lambda) y)$
の$\lambda = 1/2$のとき

凸関数 $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は以下を満たす．

$$g(p) + g(q) \geq g\left(\frac{p+q}{2}\right) + g\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

定義 (Murota, 1998)
$g: \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$が**L♮凸関数**であるとは，

定義域が整数になるように
切り上げ/切り捨て

$$\forall p, q \in \mathbb{Z}^n \; g(p) + g(q) \geq g\left(\left\lceil \frac{p+q}{2} \right\rceil\right) + g\left(\left\lfloor \frac{p+q}{2} \right\rfloor\right)$$

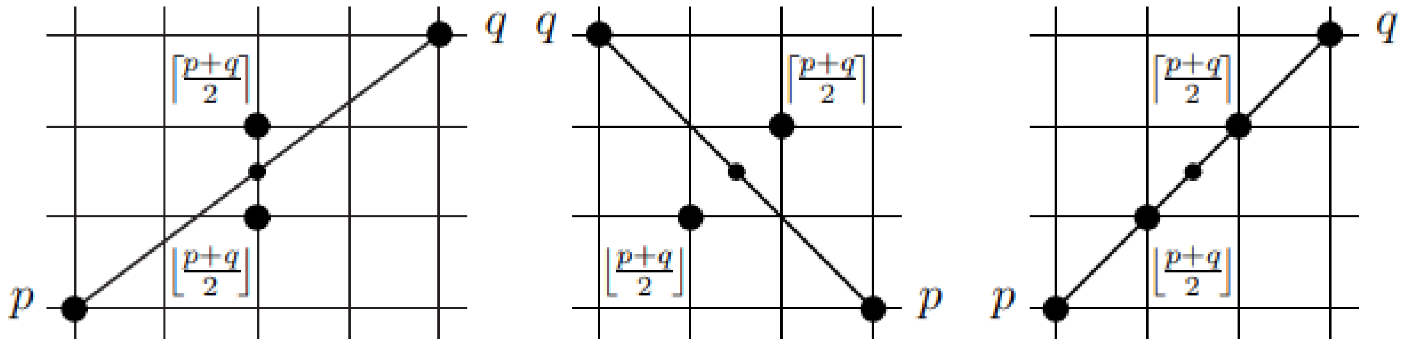


Figure 1: Discrete midpoint convexity

L凸関数：中点凸

L♮凸関数は以下の定理を満たす．

定理3

L♮凸関数gは**凸拡張**可能．

定理4

g が**L♮凸関数**ならば，

g が$x \in \mathrm{dom}_{\mathbb{Z}} g$ において大域的に最小になることと，局所的に最小になることが同値になる．局所的に最小とは，

$$g(x) \leq \min(g(p-q), g(p+q))$$

L凸関数と劣モジュラ関数

$$p \vee q = [\max(p_1, q_1), \max(p_2, q_2), \ldots, \max(p_n, q_n)]$$
$$p \wedge q = [\min(p_1, q_1), \min(p_2, q_2), \ldots, \min(p_n, q_n)]$$

とする.

定義 限界効用逓減性と関連！

$g: \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$が**劣モジュラ**であるとは,

$$\forall p, q \in \mathbb{Z}^n \ g(p) + g(q) \geq g(p \vee q) + g(p \wedge q)$$

定義

$g: \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$が**並進劣モジュラ**であるとは,

$$\forall p, q \in \mathbb{Z}^n \ \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+ \ g(p) + g(q) \geq g\big((p - \alpha\mathbf{1}) \vee q\big) + g(p \wedge (q + \alpha\mathbf{1}))$$

$\mathbb{Z}_+$: 非負整数 $\mathbf{1}$: ベクトル$[1,1,\ldots,1]$ もし$\alpha = 0$だけなら劣モジュラ

定理5

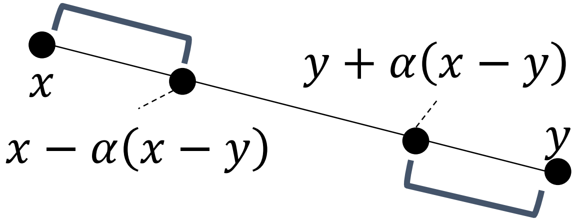
$g: \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$ がL♮凸関数 ⇔ gが並進劣モジュラ

M凸関数：等近凸

凸関数 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は以下を満たす.

$$\forall \alpha \; f(x) + f(y) \geq f\big(x - \alpha(x-y)\big) + f\big(y + \alpha(x-y)\big)$$

$\lambda = \alpha, \lambda = 1 - \alpha$ の時の定義式を足すと得られる



定義 (Murota, 1998)

$f: \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$が**M♮凸関数**であるとは,

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}^n \; \forall i \in \mathrm{supp}^+(x-y)$$
$$\exists j \in \mathrm{supp}^-(x-y) \cup \{0\}$$
$$s.t.$$
$$f(x) + f(y) \geq f\big(x - \chi_i + \chi_j\big) + f\big(y + \chi_i - \chi_j\big)$$

ただし $\mathrm{supp}^+(z) = \{i | z_i > 0\}, \mathrm{supp}^-(z) = \{i | z_i < 0\}$,

χ は基本ベクトル [0,0,1,0,0,0]のようなベクトル

特例として$\chi_0 = \mathbf{0}$

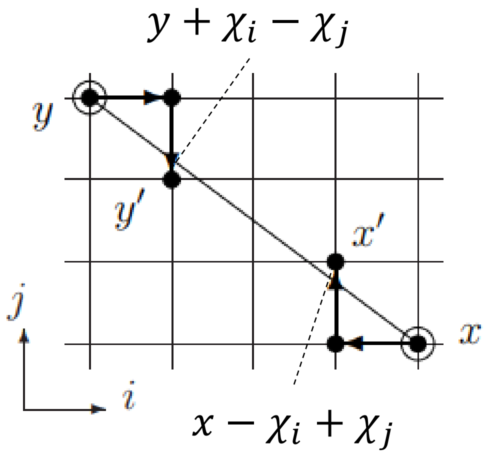


Figure 3: Nearer pair in the definition of M♮-convex functions

M凸関数：等近凸

M♮凸関数は以下の定理を満たす．

定理6

M♮凸関数fは**凸拡張**可能．

定理7

f が**M♮凸関数**ならば，

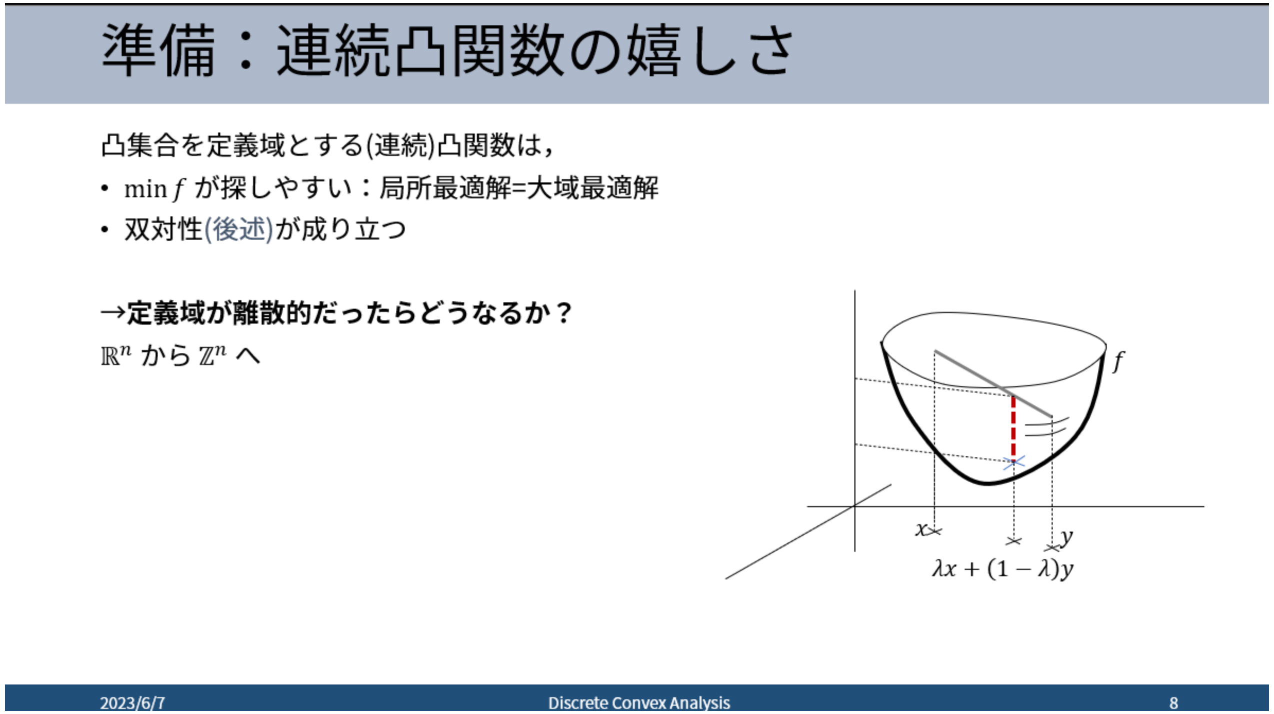
f が$x \in \mathrm{dom}_{\mathbb{Z}} f$ において大域的に最小になることと，局所的に最小になることが同値になる．局所的に最小とは，

$$f(x) \leq f(x - \chi_i + \chi_j)$$

離散凸関数の嬉しさ

離散凸集合※連続の時と同様に定義できるを定義域とする離散凸関数は，

- $\min f$ が探しやすい：局所最適解=大域最適解
- 双対性(後述)が成り立つ



例：最小木問題はM凸最小化

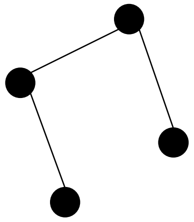
無向グラフ $G(V,E)$，リンクコスト $c(e)$ が与えられたとき，総コストを最小化するように全域木をつくる．

集合 $S \subseteq \{0,1\}^E$ を

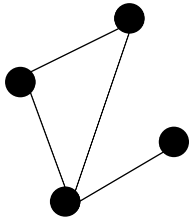
長さEの01ベクトル

$$S = \{e_X | X\text{は閉路を含まないリンク集合}\}$$

とする．



閉路を含まない



閉路を含む

$f : \mathbb{Z}^E \to \mathbb{R}$ を

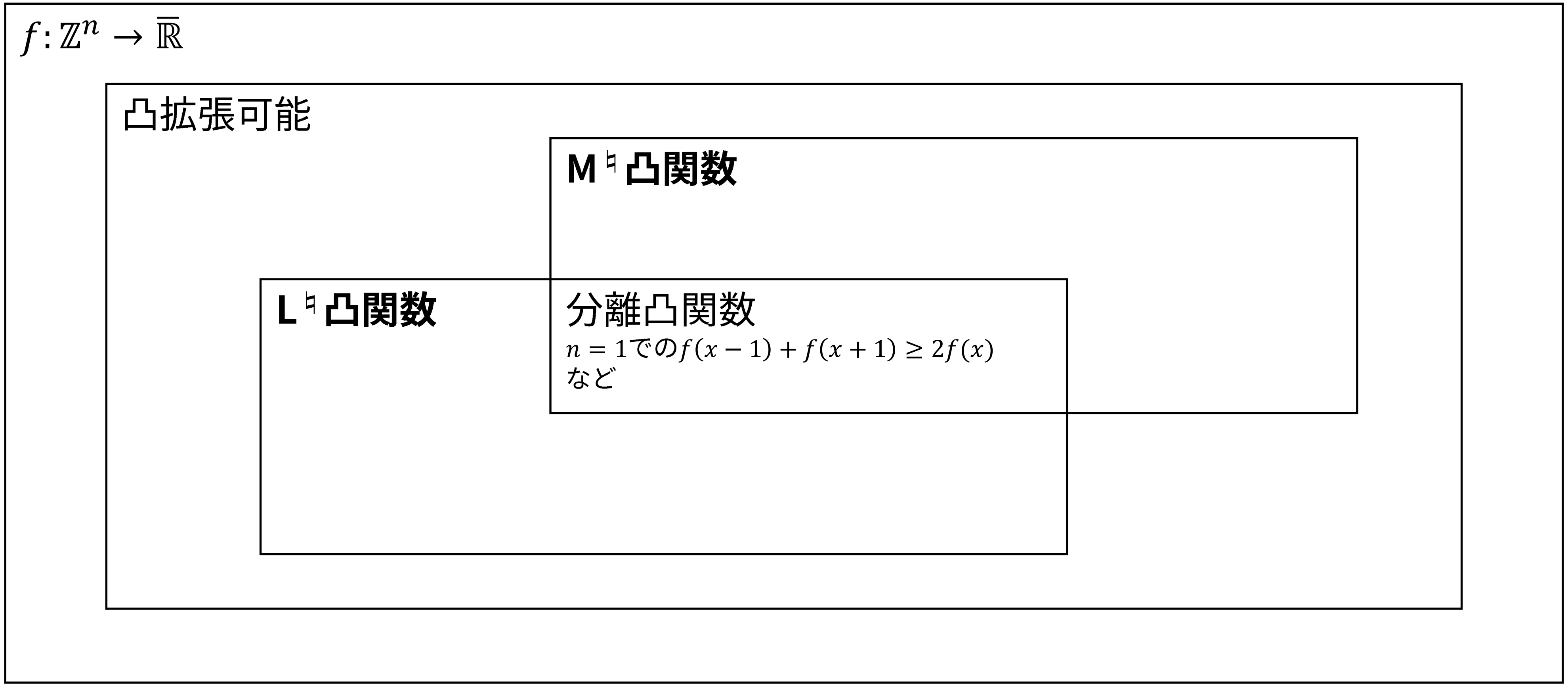
$$f(x) = \begin{cases} \sum_{e \in X} c(e) & (x \in S) \\ +\infty & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

とすると，f は**M♮凸関数**．

→**最小木問題は枝数=$|V| - 1$という制約条件付きでのM♮凸最小化になる．**

凸集合条件ではないが，効率的に解ける．
マトロイド基と関連．

離散凸関数たちの関係



※L♮凸関数・M♮凸関数の特殊ケースとして，♮がつかないL凸関数・M凸関数があるが，今回は扱わない

小結

(連続)凸関数
$f: \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$

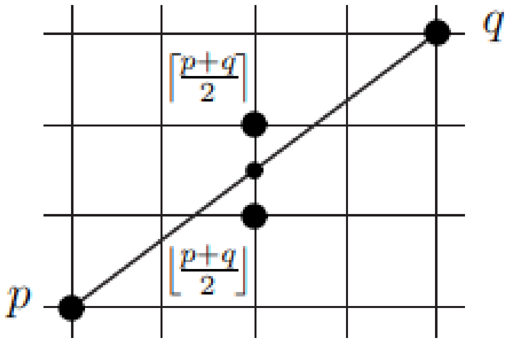
中点凸性 → L♮凸関数
等近凸性 → M♮凸関数

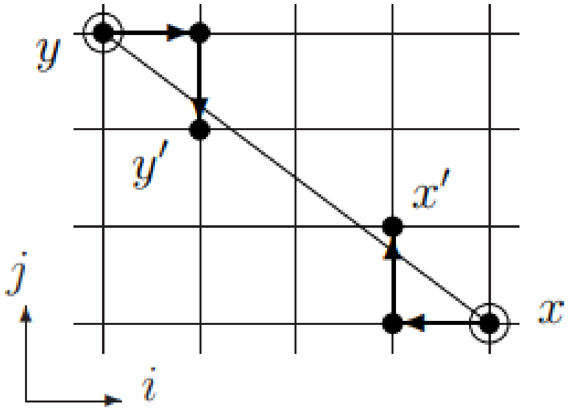
並進劣モジュラな関数
$g: \mathbb{Z}^n \to \overline{\mathbb{R}}$

同値 ↔

L♮凸関数
$g: \mathbb{Z}^n \to \overline{\mathbb{R}}$

M♮凸関数
$f: \mathbb{Z}^n \to \overline{\mathbb{R}}$





連続変数における離散凸関数

L凸関数の実数拡張

L♮凸関数は並進劣モジュラであった（**定理5**）．
すなわちL♮凸関数$g: \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$は下記を満たす：

$$\forall p, q \in \mathbb{Z}^n \ \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+ \ g(p) + g(q) \geq g\big((p - \alpha\mathbf{1}) \vee q\big) + g(p \wedge (q + \alpha\mathbf{1}))$$

このことを用いるとL♮凸関数を実数変数の場合に拡張できる．

定義

$g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$が**L♮凸関数**であるとは，

$$\forall p, q \in \mathbb{R}^n \ \forall \alpha \in \mathbb{R}_+ \ g(p) + g(q) \geq g\big((p - \alpha\mathbf{1}) \vee q\big) + g(p \wedge (q + \alpha\mathbf{1}))$$

M凸関数の実数拡張

定義(再掲)
$f: \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$が**M♮凸関数**であるとは,

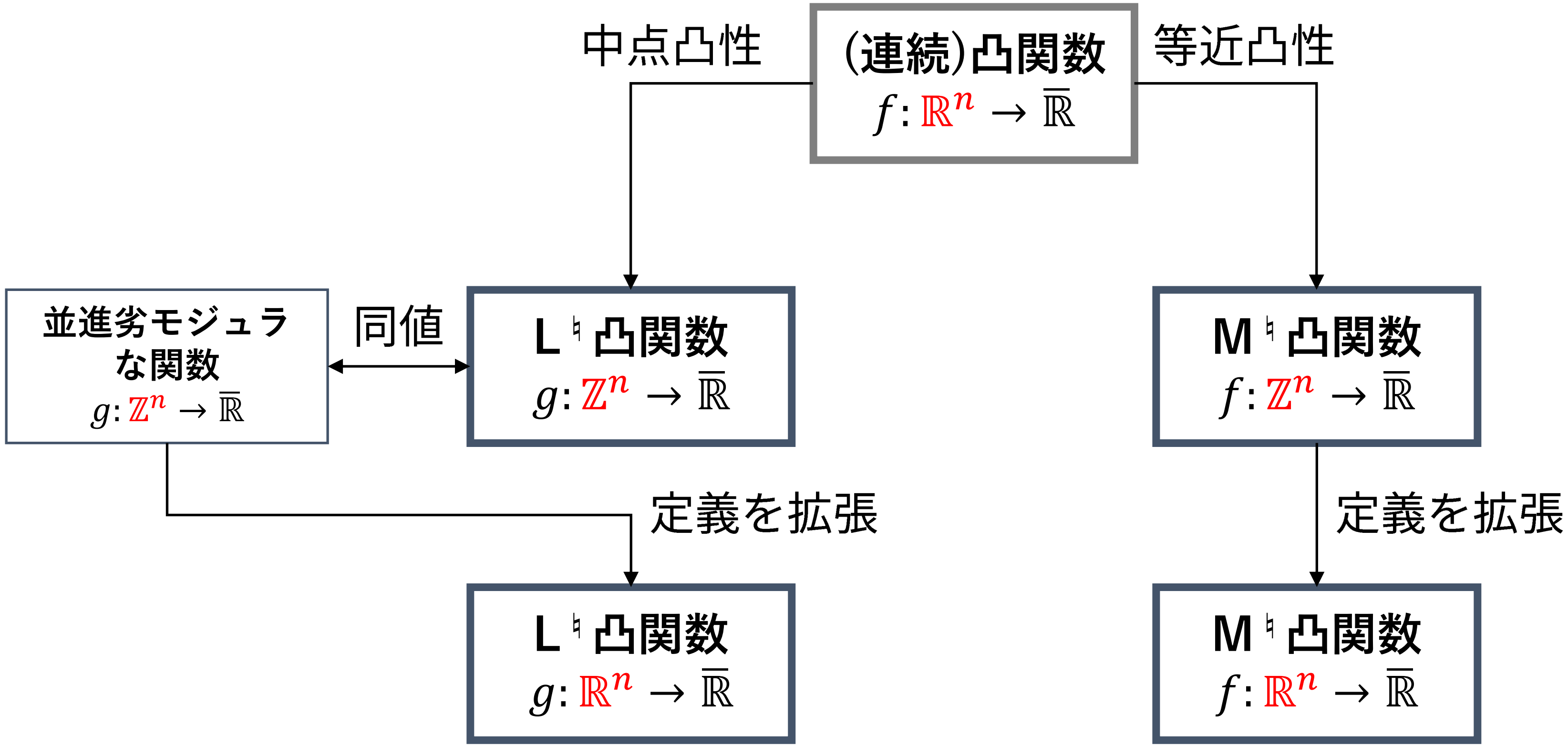
$$\forall x, y \in \mathbb{Z}^n \ \forall i \in \mathrm{supp}^+(x-y)$$
$$\exists j \in \mathrm{supp}^-(x-y) \cup \{0\}$$
$$s.t.$$
$$f(x) + f(y) \geq f\left(x - \chi_i + \chi_j\right) + f\left(y + \chi_i - \chi_j\right)$$

ただし $\mathrm{supp}^+(z) = \{i | z_i > 0\}, \mathrm{supp}^-(z) = \{i | z_i < 0\}$,
χ は基本ベクトル [0,0,1,0,0,0]のようなベクトル特例として$\chi_0 = \mathbf{0}$

定義
$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$が**M♮凸関数**であるとは,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \ \forall i \in \mathrm{supp}^+(x-y)$$
$$\exists j \in \mathrm{supp}^-(x-y) \cup \{0\}, \alpha_0 \in \mathbb{R} > 0$$
$$s.t.$$
$$\forall \alpha \in [0, \alpha_0]$$
$$f(x) + f(y) \geq f\left(x - \alpha(\chi_i - \chi_j)\right) + f\left(y + \alpha(\chi_i - \chi_j)\right)$$

小結



中点凸性
(連続)凸関数
$f: \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$
等近凸性
並進劣モジュラな関数
$g: \mathbb{Z}^n \to \overline{\mathbb{R}}$
同値
L♮凸関数
$g: \mathbb{Z}^n \to \overline{\mathbb{R}}$
M♮凸関数
$f: \mathbb{Z}^n \to \overline{\mathbb{R}}$
定義を拡張
定義を拡張
L♮凸関数
$g: \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$
M♮凸関数
$f: \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$

共役

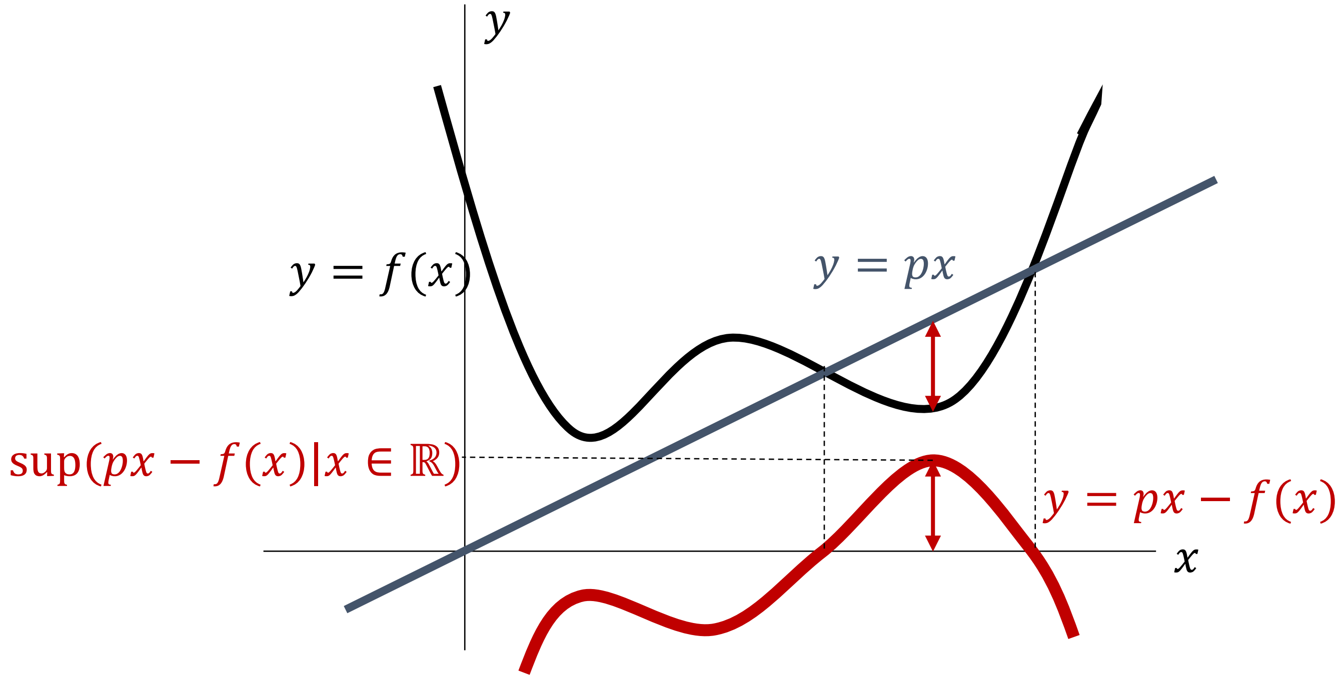
共役とは

定義：Legendre-Fenchel 変換

$f: \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ (凸とは限らない)の**凸共役** $f^\bullet: \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$とは,

$$f^\bullet(p) = \sup(\langle p, x\rangle - f(x) | x \in \mathbb{R}^n)$$

$\langle p, x\rangle$: 内積



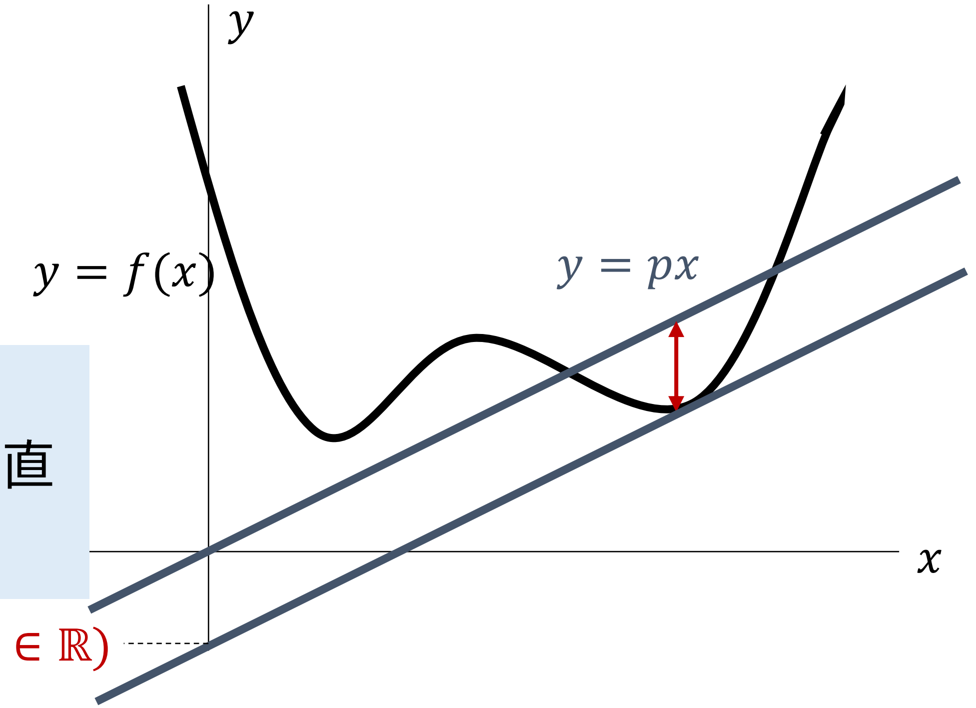
共役とは

定義：Legendre-Fenchel 変換

$f: {\color{red}\mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}$ (凸とは限らない)の**凸共役** $f^{\bullet}: {\color{red}\mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}$とは,

$$f^{\bullet}(p) = \sup(\langle p, x\rangle - f(x) \mid x \in \mathbb{R}^n)$$

$\langle p, x\rangle$: 内積



$f^{\bullet}(p)$は

「fに下側で接する傾きpの直線のy切片」に対応

共役定理：連続版

凸関数の共役定理

適切な条件が複雑なので略します**凸関数** $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ にLegendre-Fenchel 変換を2回行うと，**もとの**f**に戻る**．すなわち，

$$(f^{\bullet})^{\bullet} = f$$

実数変数の離散凸関数の共役定理 (Murota & Shioura, 2004)

- **適切なL♮凸関数**$g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$にLegendre-Fenchel 変換を1回行うと **M♮凸関数**$f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$になる．
- **適切なM♮凸関数**$f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$にLegendre-Fenchel 変換を1回行うと **L♮凸関数**$g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$になる．
- Legendre-Fenchel 変換を2回行うとそれぞれ**もとのL♮凸関数，M♮凸関数に戻る．**

$$\text{L}^\natural\text{凸関数} \underset{\text{Legendre-Fenchel 変換}}{\overset{\text{Legendre-Fenchel 変換}}{\rightleftarrows}} \text{M}^\natural\text{凸関数}$$

共役定理：離散版

定義

$f\colon \mathbb{Z}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ (凸とは限らない)の**凸共役** $f^{\bullet}\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$とは，

$$f^{\bullet}(p) = \sup(\langle p, x\rangle - f(x) | x \in \mathbb{Z}^n)$$

離散凸関数の共役定理

- **適切なL♮凸関数**$g\colon \mathbb{Z}^n \to \overline{\mathbb{R}}$にLegendre-Fenchel 変換を1回行うと**M♮凸関数**$f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$になる.
- **適切なM♮凸関数**$f\colon \mathbb{Z}^n \to \overline{\mathbb{R}}$にLegendre-Fenchel 変換を1回行うと**L♮凸関数**$g\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$になる.

定義域が変わるので2回やっても元には戻らない

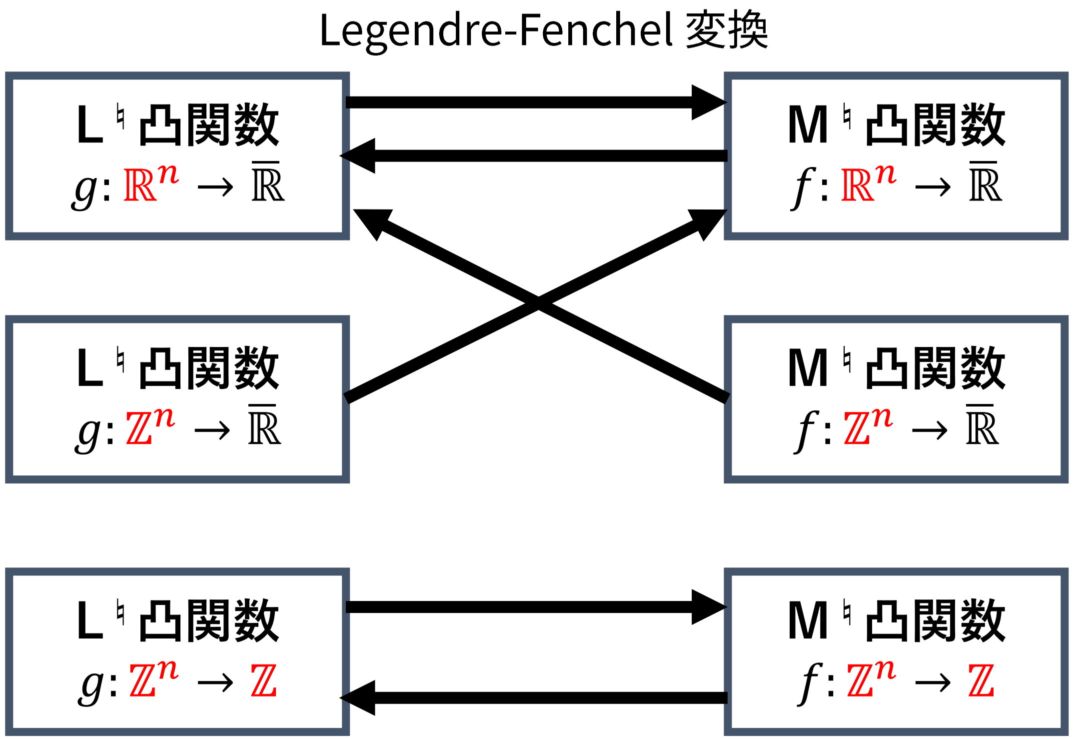
共役定理：離散版

さらに離散凸関数の定義域・値域ともに整数だった場合，より強い共役定理が成り立つ．

離散凸関数の共役定理 (Murota, 1998)

- **適切なL$^\natural$凸関数**$g: \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$にLegendre-Fenchel 変換を1回行うと **M$^\natural$凸関数**$f: \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$になる．
- **適切なM$^\natural$凸関数**$f: \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$にLegendre-Fenchel 変換を1回行うと **L$^\natural$凸関数**$g: \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$になる．
- Legendre-Fenchel 変換を2回行うとそれぞれ**もとのL$^\natural$凸関数，M$^\natural$凸関数に戻る．**

共役定理


Legendre-Fenchel 変換
L♮凸関数
$g: \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$
M♮凸関数
$f: \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$
L♮凸関数
$g: \mathbb{Z}^n \to \overline{\mathbb{R}}$
M♮凸関数
$f: \mathbb{Z}^n \to \overline{\mathbb{R}}$
L♮凸関数
$g: \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$
M♮凸関数
$f: \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$

分離定理とFenchel双対

分離定理：連続版

分離定理　　　凸関数の上下反転

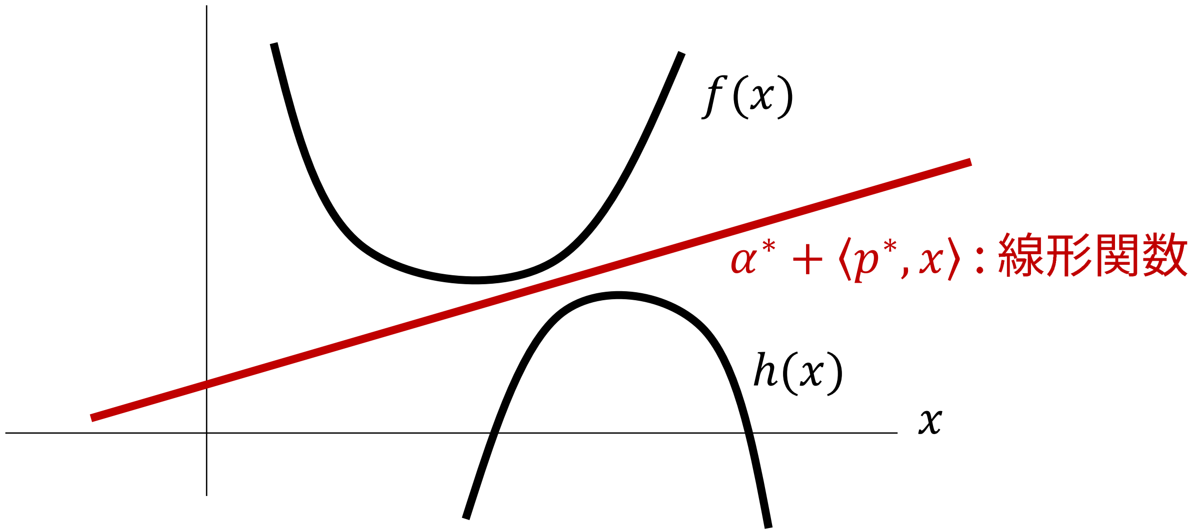
凸関数$f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$と**凹関数**$h\colon \mathbb{R}^n \to \underline{\mathbb{R}}$が，

$$\forall x \in \mathbb{R}^n\ f(x) \geq h(x)$$

を満たすとき，ある $\alpha^* \in \mathbb{R}, p^* \in \mathbb{R}^n$ であって

$$f(x) \geq \alpha^* + \langle p^*, x\rangle \geq h(x)$$

を満たすものが存在する．



分離定理：離散版

M分離定理

M♮凸関数$f: \mathbb{Z}^n \to \overline{\mathbb{R}}$と**M♮凹関数**$h: \mathbb{Z}^n \to \underline{\mathbb{R}}$が，

$$\forall x \in \mathbb{Z}^n\ f(x) \geq h(x)$$

を満たすとき，ある $\alpha^* \in \mathbb{R}, p^* \in \mathbb{R}^n$ であって

$$f(x) \geq \alpha^* + \langle p^*, x \rangle \geq h(x)$$

を満たすものが存在する．

L分離定理

L♮凸関数$g: \mathbb{Z}^n \to \overline{\mathbb{R}}$と**L♮凹関数**$k: \mathbb{Z}^n \to \underline{\mathbb{R}}$が，

$$\forall p \in \mathbb{Z}^n\ f(p) \geq h(p)$$

を満たすとき，ある $\beta^* \in \mathbb{R}, x^* \in \mathbb{R}^n$ であって

$$g(p) \geq \beta^* + \langle p^*, x \rangle \geq k(x)$$

を満たすものが存在する．

交叉定理

分離定理を用いることで次の**交叉定理**を導くことができる.

M凸交叉定理

$f_1(x), f_2(x) \in \mathbb{R}$

M♮凸関数$f_1, f_2 \colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$および$x^* \in \mathrm{dom}_{\mathbb{Z}} f_1 \cap \mathrm{dom}_{\mathbb{Z}} f_2$が,

$$\forall x \in \mathbb{Z}^n \ f_1(x^*) + f_2(x^*) \leq f_1(x) + f_2(x)$$

$x^\star$は$f_1(x) + f_2(x)$を最小化するx

を満たすことは,

$$(f_1 - p^*)(x^*) \leq (f_1 - p^*)(x)$$
$$(f_2 + p^*)(x^*) \leq (f_2 + p^*)(x)$$

を満たす$p^* \in \mathbb{R}^n$が存在することと同値.

→二つの離散凸関数の和(交わり)の最小化問題に使える

Fenchel双対：連続版

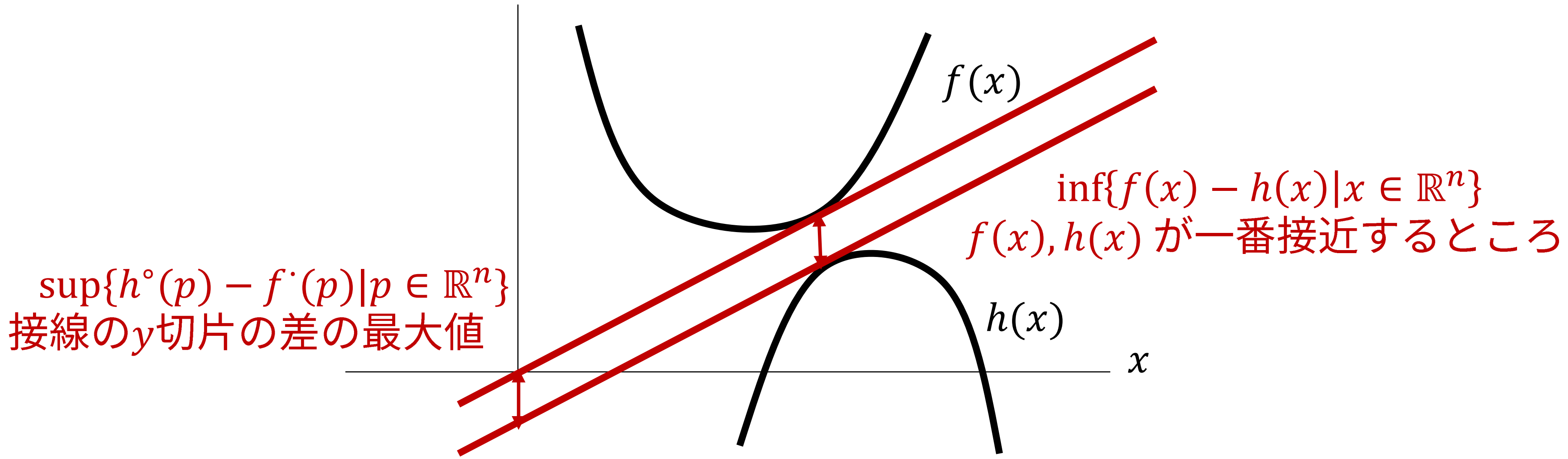
定理

凹共役$h^\circ(p) = \inf(\langle p, x\rangle - h(x) | x \in \mathbb{R}^n)$

凸関数$f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$と**凹関数**$h\colon \mathbb{R}^n \to \underline{\mathbb{R}}$は

$$\inf\{f(x) - h(x) | x \in \mathbb{R}^n\} = \sup\{h^\circ(p) - f^\bullet(p) | p \in \mathbb{R}^n\}$$

を満たす．



Fenchel双対：離散版

M♮凸関数またはL♮凸関数$f:\mathbb{Z}^n \to \overline{\mathbb{R}}$，**M♮凹関数またはL♮凹関数**$f:\mathbb{Z}^n \to \underline{\mathbb{R}}$について

条件が揃えば全て等号でつなげる

$$\inf\{f(x) - h(x) | x \in \mathbb{Z}^n\}$$
$$\geq \inf\{\bar{f}(x) - \bar{h}(x) | x \in \mathbb{R}^n\}$$
$$= \sup\{\bar{h}^\circ(p) - \bar{f}^\bullet(p) | p \in \mathbb{R}^n\}$$
$$\geq \sup\{h^\circ(p) - f^\bullet(p) | p \in \mathbb{Z}^n\}$$

↓凸拡張

連続版Fenchel双対

↑凸拡張

Fenchel双対定理

値域が整数のM♮凸関数$f:\mathbb{Z}^n \to \overline{\mathbb{Z}}$**とM♮凹関数**$h:\mathbb{Z}^n \to \underline{\mathbb{Z}}$は

$$\inf\{f(x) - h(x) | x \in \mathbb{R}^n\} = \sup\{h^\circ(p) - f^\bullet(p) | p \in \mathbb{R}^n\}$$

を満たす．

値域が整数のL♮凸関数$g:\mathbb{Z}^n \to \overline{\mathbb{Z}}$**とL♮凹関数**$k:\mathbb{Z}^n \to \underline{\mathbb{Z}}$は

$$\inf\{g(x) - k(x) | x \in \mathbb{R}^n\} = \sup\{k^\circ(p) - g^\bullet(p) | p \in \mathbb{R}^n\}$$

を満たす．

実例

(再掲)離散凸関数の嬉しさ

離散凸集合※連続の時と同様に定義できるを定義域とする離散凸関数は，

- $\min f$ が探しやすい：局所最適解=大域最適解
- 双対性(後述)が成り立つ

★ 双対を使うことで「離散凸集合を定義域とする離散凸関数」だと確かめやすくなることがある．

最小費用流と(連続)凸

有向グラフ $G(V, E)$，$\sum_{u \in V} b(u) = 0$を満たすベクトル$b \in \mathbb{Z}^V$，リンク容量 $c: \mathbb{Z}^E \to \mathbb{R}$，リンク費用$k: \mathbb{Z}^E \to \mathbb{R}$が与えられるとき，最小費用流問題とは以下の通り．

$$\min_{e \in E} \sum \phi(e)$$
$$s.t.$$
$$\partial x(u) = b(u)$$

頂点uから出るフロー-入るフロー=$b(u)$

ただし，

$$\phi(x) = \begin{cases} k(e)x(e) \ (0 \leq x(e) \leq c(e)) \\ +\infty \ (\text{otherwise}) \end{cases}$$

リンク容量制約

(連続)凸関数

Fenchel双対をとると，

$$\max_{p \in \mathbb{R}^V} \left\{ \sum_{(i,j) \in E} \phi^{\cdot}\big(p(j) - p(i)\big) + \sum_{i \in V} b(i)p(i) \right\}$$

制約条件なし

この問題で双対をとるメリット：目的関数を複雑にする代わりに制約条件をなくせる

=実行可能領域を$\mathbb{R}^V$ 全体(→凸集合)にできる

整数制約-最小費用流と離散凸

有向グラフ $G(V,E)$，$\sum_{u\in V} b(u)=0$を満たすベクトル$b\in\mathbb{Z}^V$，リンク容量 $c{:}\,\mathbb{Z}^E\to\mathbb{Z}$，リンク費用$k{:}\,\mathbb{Z}^E\to\mathbb{Z}$が与えられるとき，最小費用流問題とは以下の通り．

$$\min_{e\in E}\sum\phi(e)$$
$$s.t.$$
$$\partial x(u)=b(u)$$

頂点uから出るフロー-入るフロー=$b(u)$

ただし，

$$\phi(x)=\begin{cases}k(e)x(e)\ (0\le x(e)\le c(e)) \\ +\infty\ (\text{otherwise})\end{cases}$$

リンク容量制約

離散凸関数

(特にL♮凸？)

Fenchel双対をとると，

$$\max_{p\in\mathbb{Z}^V}\left\{\sum_{(i,j)\in E}\phi^\cdot\big(p(j)-p(i)\big)+\sum_{i\in V}b(i)p(i)\right\}$$

L♮凸の双対はL♮凹

L♮凹+L♮凹=L♮凹

{}内は**値域が整数のL♮凹関数**．

→**最小費用流問題は$\mathbb{Z}^V$上のL♮凹最大化になり，解は整数．**

↑線形緩和や完全ユニモジュラ行列と関連

[Murota&Shioura, 2005]

最短路問題と離散凸

有向グラフ $G(V,E)$，リンクコスト $c(e)$ が与えられたとき，頂点sから全頂点への最短路を同時に求める最短路問題とは以下の通り．

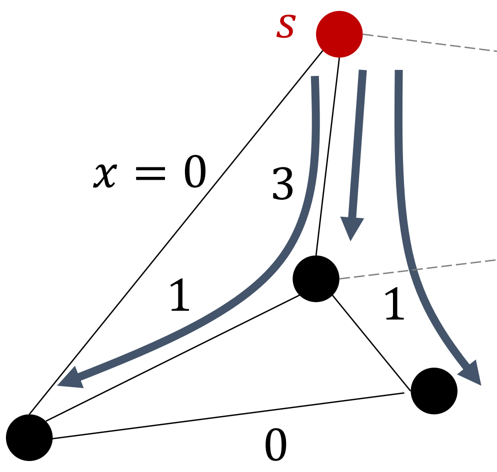
$$\min \sum_{e\in E} c(e)x(e)$$

x(e): リンクeを何回通るか

$$s.t.\ \forall v \in V$$

$$\sum_{(u,v)\in E, u\in V} x(u,v) - x(v,u) = \begin{cases} -(n-1) & (v=s) \\ 1 & (otherwise) \end{cases}$$

※全頂点への最短路を求めるにもかかわらず目的関数はひとつ！



入ってきたx-出ていくx
$= -3$

入ってきたx-出ていくx
$= 3 - 2 = 1$

最短路問題と離散凸

有向グラフ $G(V,E)$，リンクコスト $c(e)$ が与えられたとき，頂点sから全頂点への最短路を同時に求める．

前の定式化のFenchel双対をとると，

$p: \mathbb{Z}^V \to \mathbb{Z}$の関数を決定する問題

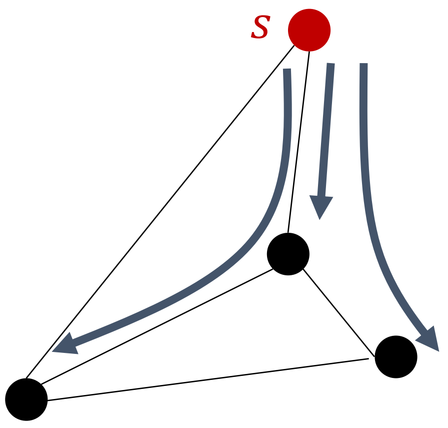
$$\max \sum_{v \in V \setminus \{s\}} p(v) - \cancel{p(s)}$$

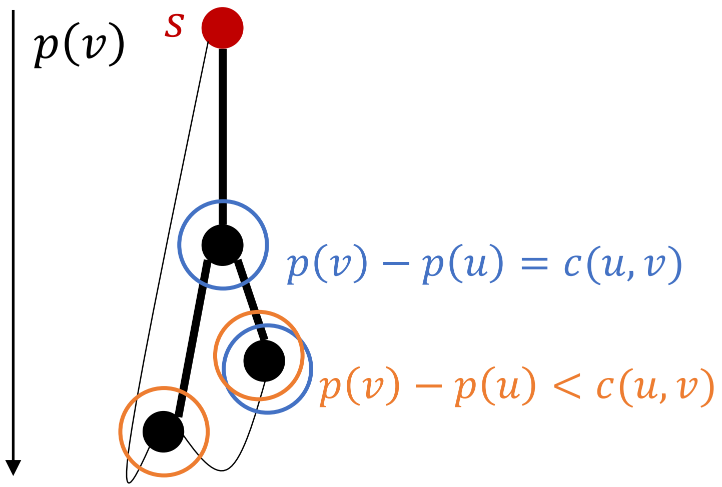
※$p(s) = 0$ と固定してよい

$$s.t.$$

$$\forall (u,v) \in E \ \ p(v) - p(u) \le c(u,v)$$

制約条件あり





紐という制約条件付きで重力に従って垂らす(=距離最大化)と解釈できる

最短路問題と離散凸

有向グラフ $G(V,E)$，リンクコスト $c(e)$ が与えられたとき，頂点sから全頂点への最短路を同時に求める．

前の定式化のFenchel双対をとると，

$p\colon \mathbb{Z}^V \to \mathbb{Z}$の関数を決定する問題

$$\max \sum_{v \in V \setminus \{s\}} p(v) - \cancel{p(s)}$$

※$p(s) = 0$ と固定してよい

$$s.t.$$

$$\forall (u,v) \in E \;\; p(v) - p(u) \leq c(u,v)$$

制約条件あり

$g\colon \mathbb{Z}^V \to \underline{\mathbb{Z}}$を

$$g(x) = \begin{cases} \sum_{v \in V \setminus \{s\}} p(v) & (p \in S) \\ -\infty & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

とする．gの実行可能領域は

$$S = \{p \in \mathbb{Z}^n \mid p(v) - p(u) \leq c(u,v) \;\; (\forall (u,v) \in E)\}$$

Sは**L♮凹集合**，gは**L♮凹関数**なので，

双対問題は**L♮凹集合上のL♮凹関数最大化**となり，効率的に解ける

ゲーム理論と離散凸

- N人のプレイヤーとM個の商品
- 各プレイヤーは**商品セット**($2^M - 1$通り)に対して評価額をもつ

プレイヤー	商品1	商品2	商品 1&2
A	¥100	¥50	¥100
B	¥0	¥150	¥0
C	¥50	¥50	¥150

1&2の評価額は、 1だけの評価額と 2だけの評価額の和とは限らない

ゲーム理論と離散凸

予め各商品(≠商品セット)の価格pが決められているとする．

プレイヤーは(商品セットの評価額 - 価格pの和)を最大化する商品セットを欲しがる．そのような商品セットの集合を$D(p)$とする．

定義：粗代替性

評価関数が粗代替性を持つとは，

$$\forall p, q \in \mathbb{R}^n \ (p < q),$$
一部の商品が値上がりするとき

$$\forall A \in D(p),$$

$$\exists B \in D(q) \ s.t. \ \{i \in A | p(i) = q(i)\} \subseteq B$$
値上がりしなかった商品は引き続き欲しがる

[Kelso&Crawford, 1982]

粗代替性を満たすならば，価格pのもとで全員が最良の財集合を得る均衡が存在

定理 [Fujishige&Yang, 2003]

評価関数$f: 2^n \to \mathbb{R}$が粗代替性を持つ⇔評価関数がM♮凹関数

様々な応用

- 待ち行列理論 **[Hajek, 1985]**
- 組合せオークション **[Fujishige&Yang, 2003]**
- 資源配分問題
- マッチング理論

……

参考文献

- Murota, K. (1998). Discrete convex analysis. Mathematical Programming, Series B, 83, 313–371. doi:10.1007/. (2005). Substitutes and complements in network flows viewed as discrete convexity. Discrete Optimization, 2, 256–268. doi:10.1016/J.DISOPT.2005.04.002
- Hajek, B. (1985). Extremal Splittings of Point Processes. Mathematics of Operations Research, 10, 543–556.
- Kelso, A. S., & Crawford, BF02680565/METRICS
- Murota, K., & Shioura, AV. P. (1982). Job Matching, Coalition Formation, and Gross Substitutes. Econometrica, 50, 1483. doi:10.2307/1913392
- Fujishige, S., & Yang, Z. (2003). A note on Kelso and Crawford’s gross substitutes condition. Mathematics of Operations Research, 28, 463–469. doi:10.1287/MOOR.28.3.463.16393
- 室田一雄. (2013). 離散凸解析のすすめ. *オペレーションズ・リサーチ: 経営の科学*, *58*(6), 311-317.