Potential Games with Continuous Player Sets

連続的プレイヤー集合を持つポテンシャル・ゲーム

William H. Sandholm (2001). Potential Games with Continuous Player Sets.
Journal of Economic Theory 97, 81-108.

理論談話会#4 (2024/05/09)

M1 三上侑希

Abstract

- 連続的プレイヤー集合をもつポテンシャル・ゲームを扱う
  - プレイヤーの数が無限で離散的でない場合のポテンシャル・ゲーム
  - 対称外部性条件により特徴づけられる
  - 例：共通の利得をもつランダム・マッチング・ゲーム，　混雑ゲーム

- 幅広い進化動学のクラスのもとでの局所的に安定な均衡の簡単な説明を与える
- ➢ すべての初期条件から，　行動がナッシュ均衡に収束することを証明する

- 進化が効率的なプレイを導くポテンシャル・ゲームのサブクラスを考える

- 連続的プレイヤー集合をもつポテンシャル・ゲームが，
  有限プレイヤーのポテンシャル・ゲーム(Monderer and Shapley(1996))の収束列の極限であることを証明する

1. Introduction－あらすじ

有限プレイヤーのポテンシャル・ゲーム (Monderer and Shapley(1996))

- ポテンシャル関数を認めるゲームのこと
  - ポテンシャル関数：純粋戦略プロファイルの空間上で定義される実数値関数で，逸脱戦略によるプレイヤーの利得の変化がポテンシャルの変化と正確に一致する関数
    - 純粋戦略：プレイヤーが特定の状況で確定的に行動する戦略のこと
    - 純粋戦略プロファイル：ゲームにおいて可能なすべての純粋戦略の組み合わせの集合
    - 逸脱戦略：あるプレイヤーが自身の戦略の変更により自得を改善できる行動

  - ナッシュ均衡はポテンシャルの局所最大化である

  - 有益な逸脱はポテンシャルを増加させる
    - ➢ Better reply adjustment processにより，均衡プレイが導かれる
    - Better reply adjustment process：
      他のプレイヤーの行動を観察して，自分の現在の戦略に関連する利得を評価し，
      より高い利得をもたらす代替戦略に行動を変化させ，他者の行動に基づき利得を最大化
      相互に繰り返されることによってナッシュ均衡に到達する

無限プレイヤーのポテンシャル・ゲーム

- ポテンシャル・ゲームの基本的な収束結果は近視眼的な調整過程に関するもの
  - プレイヤーの数が多い場合について研究・分析するのが自然
  - 前述の有限プレイヤーのポテンシャル・ゲーム(離散的)で，大規模な集団についての分析は面倒
  - 無限プレイヤーのポテンシャル・ゲーム(連続的)の方が分析しやすい

- 嬉しいこと：微積分に基づく分析が可能となり，以下の条件を導くことができる
  - 無限プレイヤーのポテンシャル・ゲームを特徴づける経済的に意味のある条件
  - 進化が効率的なプレイを導く条件

- ポテンシャル関数：利得関数のベクトルを勾配とする戦略分布空間上の実数値関数
  - 利得関数が滑らかである
  - 利得関数が対称外部性を満たす
    - 対称外部性：どの戦略iとjの組についても
      戦略iを選択するプレイヤーを加えることが戦略jを選択するプレイヤーの利得に与える影響と，
      戦略jを選択するプレイヤーを加えることが戦略iを選択するプレイヤーの利得に与える影響が等しい

均衡

- 対称外部性は，合理的な行動調整過程がナッシュ均衡に収束すること保証
  - **正の相関条件(Positive Correlation, PC)**：戦略の成長率と利得に正の相関がある
    - この条件を満たすすべての動学はポテンシャル関数の値を増加させる
  - **非現状満足条件(Non-Complacency, NC)**：プレイヤーは自己の利得を改善しきる
    - 動学のすべての静止点(ポテンシャル関数の勾配0)はナッシュ均衡である

- 有限プレイヤーと無限プレイヤーの場合の均衡の違い
  - 有限プレイヤー：すべての均衡⇔ポテンシャル関数の局所最大化，すべての均衡は局所的安定
  - 無限プレイヤー：

ナッシュ均衡･･･ポテンシャル関数の最大化に対し，Kuhn-Tucker一次条件を満たす状態

あくまで必要条件

ポテンシャル関数の最大化はナッシュ均衡であるが，ナッシュ均衡は必ずしも最大化でない

条件(PC)より，局所的最大化⇔局所的安定

局所的安定な均衡に限定することで，有限プレイヤーの場合との関連性を保つ

進化動学と効率性

進化動学

- ナッシュ均衡の完全な進化的正当化 (ナッシュ均衡にはどのように至ったのか？)
  - 大域的安定性が必要：すべての初期条件から出発する解軌道はナッシュ均衡に収束しなければならない
  - Monderer and Shapleyの大域的収束を拡張：条件(PC)と(NC)を満たす解軌道は全てナッシュ均衡に至る

効率性

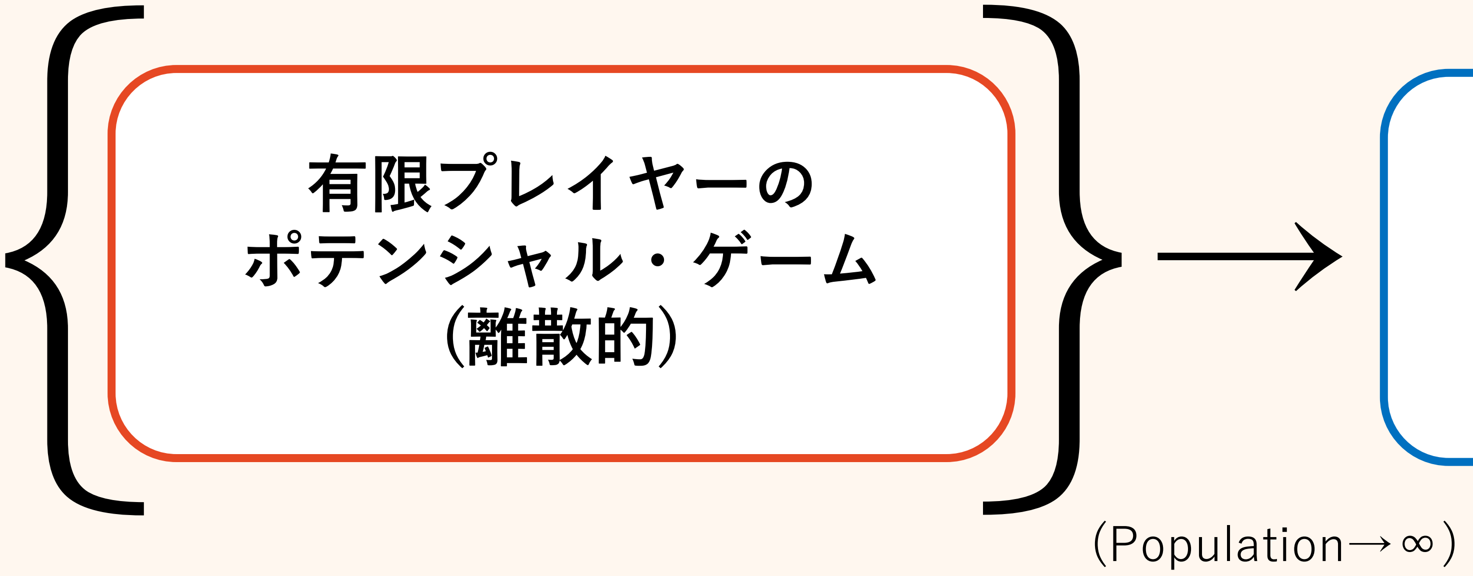
- 「同次ポテンシャル・ゲーム：各戦略の利得関数は同次関数」を考える
  - 効率性：ゲーム中の全プレイヤーの集計利得で測る
  - 同次性と対称外部性
    - ある戦略を選んだプレイヤーの利得は，その選択が集計利得に与える限界効果に比例

以下を証明

- 進化が集計利得を増加させること
- 局所的に安定な均衡は局所的に効率的な均衡であること
- 一意な均衡は大域的に安定かつ大域的に効率的であること

有限プレイヤーゲームの極限としてのポテンシャル・ゲーム

- 有限プレイヤーゲームと無限プレイヤーゲームの間のつながりの証明
  - 匿名かつ同一の有限プレイヤーのポテンシャル・ゲームを拡張したポテンシャル関数で表現
  - 集団が無制限に大きくなるゲーム列の収束の概念を定義
    - その極限が無限プレイヤーのポテンシャル・ゲームであることを証明
  - 何が嬉しいか：分析に都合よく，有限プレイヤーか無限プレイヤーかを選ぶことが可能に



先行研究など

- J. Hofbauer and K. Sigmund, “Theory of Evolution and Dynamical Systems,” Cambridge University Press, Cambridgem 1988.
  - 集団遺伝学の設定における単一集団ポテンシャル・ゲームを分析
    - レプリケーター動学はポテンシャルを増加させなければならない
    - 同次ポテンシャル関数が平均利得に比例する
  - ➢ 本研究では，多集団の場合について証明
    - 条件(PC)より，進化がポテンシャルを増加させる
    - 条件(NC)より，ナッシュ均衡への大域的収束など

- ポテンシャル関数の存在はかなり強い条件→実用的に妥当な結果か？
  - 移転支払いによりプレイヤーの利得を変えられるを仮定することが多い
  - 移転支払いによりポテンシャル関数を持つゲームを構築でき，均衡プレイへの収束を保証
  - W. H. Sandholm, “Evolutionary Implementation and Congestion Pricing,” SSRI Working Paper 9938m University of Wisconsin, 1999.
    - 実装理論への進化的アプローチの基礎として用いている

2. Potential Games

集団ゲーム，ポテンシャルゲームと対称外部性

- r個の連続なプレイヤーの集団を持つ集団ゲーム
  - 集団の集合：$P=\{1,\dots,r\}\ (r\geq 1)$，集団$p$の大きさ：$m^p$，$p$にとっての戦略集合：$S^p=\{1,\dots,n^p\}$，純粋戦略の総数：$n=\sum_p n^p$
  - $p\in P$の戦略分布集合：$X^p=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}_+^{n^p}:\sum_i x_i^p=m^p\}$，全体の戦略分布集合：$X=\{\boldsymbol{x}=(x^1,\dots,x^r)\in\boldsymbol{R}_+^n:\boldsymbol{x}^p\in X^p\}$
  - 行動がX内の点で記述されるとき，$\bar{X}=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}_+^n:m^p-\varepsilon\leq\sum_i x_i^p\leq m^p+\varepsilon\ \forall p\in P\}$($\varepsilon$は正の定数)上の利得を定義
    - $\bar{X}$には各集団の大きさがm^pからε以内に収まるときに生じうる戦略集合が含まれている
    - 新規参入者の限界効果を議論するのには有用だが，X上で定義しても同様の結果が成り立つ
  - 戦略$i\in S^p$の利得関数：$F_i^p:\bar{X}\to R$(連続を仮定)，pの利得関数$F^p:\bar{X}\to\boldsymbol{R}^{n^p}$，全体の利得関数$F:\bar{X}\to\boldsymbol{R}^n$
    - pにおける戦略の利得はpの戦略分布自体に依存する

- 条件(P)が成立するとき，Fはポテンシャルゲームである

条件(P)

任意の$\boldsymbol{x}\in\bar{X},i\in S^p,p\in P$に対して，$\dfrac{\partial f}{\partial x_i^p}=F_i^p(\boldsymbol{x})$なる$C^1$級関数$f:\bar{X}\to\boldsymbol{R}$が存在する

  - 勾配が利得関数に等しい連続で微分可能な関数(ポテンシャル関数)$f(\boldsymbol{x})$が存在するということ

集団ゲーム，ポテンシャルゲームと対称外部性

ポテンシャル関数について直感的に考えてみる

- $F_i^p(\boldsymbol{x}) > F_j^p(\boldsymbol{x})$なる状態$\boldsymbol{x} \in X$を考える→$j$を選択するプレイヤーは$i$へ戦略を変更するだろう
- 有益な戦略変更はポテンシャルの増加につながる

$$\frac{\partial f}{\partial(x_i^p - x_j^p)} \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i^p}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_j^p}(x) = F_i^p(x) - F_j^p(x) > 0$$

対称外部性(Externality Symmetry, ES)

対称外部性(ES)

任意の$i \in S^p, j \in S^q, p, q \in P$に対して，$\dfrac{\partial F_i^p}{\partial x_j^q} = \dfrac{\partial F_j^q}{\partial x_i^p}$が成り立つ

戦略iを選択するプレイヤーを加えることが戦略jを選択するプレイヤーの利得に与える限界効果

||

戦略jを選択するプレイヤーを加えることが戦略iを選択するプレイヤーの利得に与える限界効果

- 利得関数がC^1級(連続で微分可能)であれば，(P)⇔(ES)

具体例—利得が共通のランダムマッチングゲーム

- ランダムにマッチされてプレイするrプレイヤー標準型ゲーム
  - プレイヤーpの利得関数$U^p: S^1 \times \cdots \times S^r \to R$, $U^p(i^1, \dots, i^r)$
  - 任意のpについて$U^p = U$であれば，このゲームにおける利得は共通 (各純粋戦略プロファイルが全プレイヤーに同じ利得をもたらす)
  - 対称な2プレイヤーゲームの場合：
    - 任意のi, jについて$S^1 = S^2$かつ$U^1(i,j) = U^2(j,i)$：戦略集合が同じ，利得はプレイヤーと対戦相手の戦略のみに依存
    - (期待)利得　$F_i(\boldsymbol{x}) = \sum_{j \in S^2} U^1(i,j) x_j$　ポテンシャル関数　$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2} \sum_{(i,j) \in S^1 \times S^2} U(i,j) x_i x_j$
  - rプレイヤーの場合
    - 戦略$i^p \in S^p$の利得　$F_{i^p}^p = \sum_{(i^1,\dots,i^{p-1},i^{p+1},\dots,i^r) \in S^1 \times \cdots S^{p-1} \times S^{p+1} \times \cdots S^r} \left(U^p(i^1, \dots, i^r) \prod_{q \neq p} x_{i^q}^q \right)$
    - $\{U^p\}_{p \in P}$が共通の利得をもつとき　ポテンシャル関数$f(x) = \sum_{(i^1,\dots,i^r) \in S^1 \times \cdots \times S^r} \left(U(i^1, \dots, i^r) \prod_{p \in P} x_{i^p}^p \right)$
      - 利得の総和をrで割ったものに等しい
  - 線形な，あるいは多重線形な利得をもつ

- ランダムマッチングに基づかない集団ゲーム
  - 一般に，利得が非線形
  - 対称外部性が成り立っていたとしても，利得が共通であるとは限らず，効率性も直ちに得られるわけではない(追加の条件が必要)

具体例―混雑ゲーム

- 混雑モデル $\left\{P, \{m^p\}_{p\in P}, \{S^p\}_{p\in P}, \{\Phi_i^p\}_{i\in S^p, p\in P}, \{c_\phi\}_{\phi\in\Phi}\right\}$
  - 自宅と職場の組r個・・・その間を移動しなければならないプレイヤーのグループが存在
  - それぞれのプレイヤーは自宅と職場を結ぶ経路(道路の部分集合)を選択，移動時間は選択した道路の交通量に依存
    - P ：1つ以上の集団(経路選択ごと)の集合(自宅と職場の組ごとに存在)， $\Phi = \bigcup_{i\in S^p}\bigcup_{p\in P}\phi_i^p$ ：すべての利用可能な道路の集合，ϕ_i^p ：戦略$i\in S^p$を選んだ集団pの自宅と職場を結ぶ経路， $\rho^p(\phi) = \{i\in S^p: \phi\in\Phi_i^p\}$：集団$p$の道路$\phi$を通る戦略の集合，$u_\phi(\boldsymbol{x}) = \sum_{p\in S^p}\sum_{i\in\rho^p(\phi)} x_i^p$ ：道路$\phi\in\Phi$の交通量(道路ϕを通る戦略を取るプレイヤーの総量)， $c_\phi: R_+ \to R$ ：道路のコスト関数

- 混雑ゲーム
  - 利得関数　$F_i^p(x) = -\sum_{\phi\in\Phi_i^p} c_\phi\left(u_\phi(\boldsymbol{x})\right)$
  - ある戦略についての利得は道路のコストの和で表される
  - 集団pのプレイヤーの経路iを利用する割合が増えると，$\phi_i^p\cap\phi_j^q$内の道路の交通量が増加し，集団qの経路jを利用するプレイヤーに影響
  - ポテンシャル・ゲームであることを確認する
    - c_ϕが微分可能であるとき，$\frac{\partial F_i^p}{\partial x_j^q} \equiv \frac{\partial F_j^q}{\partial x_i^p} = -\sum_{\phi\in\Phi_i\cap\Phi_j} c'_\phi$ →(ES)の成立⇒(P)の成立
    - c_ϕが微分可能ではないとき，$f(\boldsymbol{x}) = -\sum_{\phi\in\Phi}\int_0^{u_\phi(\boldsymbol{x})} c_\phi(z)\,dz$ がFのポテンシャル関数であることを確認

具体例—2戦略ゲーム

- 単一集団がプレイするゲームが2つの戦略しか持たない場合→すべての戦略分布は直線状に存在
  - 直線状の連続的な動学は分析が容易→進化ゲームの文献では2戦略ゲームがよく見られる
  - すべてポテンシャル・ゲームである
  - 任意の連続な利得関数$F_1, F_2 : X \to R$が与えられたときの条件(P)を満たすポテンシャル関数

$$f(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} F_1(z, 1-z)\, dz + \int_0^{x_2} F_2(1-z, z)\, dz$$

3. Equilibrium

ナッシュ均衡とKuhn-Tucker条件

- ポテンシャル・ゲームのナッシュ均衡とポテンシャルの局所的最大化の関係
  - 有益な戦略変更はポテンシャルの増加につながる⇔ポテンシャルが増加しないとき有益な戦略変更はない
  - ポテンシャル関数の最大化問題：ラグランジアン

$$L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\lambda}) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{p\in P} \mu^p \left(m^p - \sum_{i\in S^p} x_i^p \right) + \sum_{p\in P}\sum_{i\in S^p} \lambda_i^p x_i^p$$

  - Kuhn-Tuckerの一次必要条件

集団pの均衡利得に等しい

$$\frac{\partial f}{\partial x_i^p}(\boldsymbol{x}) = \mu^p - \lambda_i^p \quad (KT1)$$

$$\lambda_i^p x_i^p = 0 \quad (KT2)$$

$$\lambda_i^p \geq 0 \quad (KT3)$$

Proposition(命題) 3.1
状態$\boldsymbol{x} \in X$は，ある$\boldsymbol{\lambda} \in R^n, \boldsymbol{\mu} \in R^r$に対し，$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\lambda})$が(KT1)，(KT2)，(KT3)を満たすとき，かつその時に限り，ポテンシャル・ゲームFのナッシュ均衡である

  - 集合Xは制約条件を満たすので，KKT条件が満たされることはポテンシャルの局所的最大化に必要だが十分でない
  - ポテンシャルの局所最大化は全てナッシュ均衡だが，ナッシュ均衡すべてがポテンシャルの局所最大化ではない

有限プレイヤーゲーム(Monderer and Shapley)の場合

- 均衡のみがポテンシャルの局所最大化である

1, 1	0, 0
0, 0	1, 1

- 例：ランダムにマッチングされて上図の協調ゲームをプレイする　(期待)利得　$F_1(x_1, x_2) = x_1, F_2(x_1, x_2) = x_2$
- N人のプレイヤーがマッチされてこのゲームをプレイする場合，すべてのプレイヤーが同じ純粋戦略を選ぶ2つの均衡が存在
- ちょうど$\frac{N}{2}$人のプレイヤーがそれぞれの戦略を選ぶとき，それぞれの利得は$\frac{1}{2}$となる(半分が協調し，半分は協調しない)
- あるプレイヤーが戦略を変更すると，自分が切り替えた戦略に有利なように，集団の戦略分布を$\frac{1}{N}$変化させる
- ➢ 協調していなかったプレイヤーが協調するようになるので，利得が増加 (つまり，半々に分かれている状態は均衡でない)
- ポテンシャル関数　$P^N\left(\frac{k_1}{N}, \frac{k_2}{N}\right) = \sum_{a=0}^{k_1} \frac{a}{N} + \sum_{b=0}^{k_2} \frac{b}{N}$

無限プレイヤーゲームの場合

- 集団の戦略分布を変化させられず有益な逸脱が生じない→2つの戦略間で集団が均等に分割されるのも均衡

1, 1	0, 0
0, 0	1, 1

- ポテンシャル関数　$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}((x_1)^2 + (x_2)^2)$
- 均衡$(1, 0), (0, 1)$は集合$X = \{(x_1, x_2) \in R_+^2 : x_1 + x_2 = 1\}$状のポテンシャル関数の最大化
- 均衡$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$はポテンシャルの最小化であるが，KKT条件を満たしてしまっている

➢ 連続であることで，ポテンシャルの局所最大化でないナッシュ均衡が存在してしまう(勾配が0であるというだけ)

4. Evolutionary Dynamics

正の相関条件と非現状満足条件

- 進化動学は，ベクトル場$V: X \to R^n$で記述され，運動方程式$\dot{\boldsymbol{x}} = V(\boldsymbol{x})$　条件(LC)，(FI)が必要

リプシッツ連続性(Lipschitz Continuity, LC)
Vはリプシッツ連続である
前方不変性(Forward Invariance, FI)
任意の$p \in P$に対し，$x_i^p = 0$かつ$\sum_{i \in S^p} V_i^p(\boldsymbol{x}) = 0$であるときは常に$V_i^p(\boldsymbol{x}) \geq 0$である

  - 条件(LC)，(FI)は，Xから離れない一意な解軌道の存在を保証

- 正の相関条件(Positive Correlation, PC)

正の相関条件(PC)
$V(\boldsymbol{x}) \neq 0$であるときは常に，$V(\boldsymbol{x}) \cdot F(\boldsymbol{x}) = \sum_{p \in P} \sum_{i \in S^p} V_i^p(\boldsymbol{x}) F_i^p(\boldsymbol{x}) = \sum_p n^p \mathrm{Cov}(V^p, F^p) \in > 0$である

  - 各集団の成長率と利得の間に正の相関(共分散の重みづけ和が正)があるかという条件
  - $F(\boldsymbol{x}) = \nabla f(\boldsymbol{x})$より，利得関数$F(\boldsymbol{x})$はポテンシャル関数の最急増加方向を表す
  - 集団が動いているときはいつもポテンシャル関数の上り勾配を登っているということ

正の相関条件と非現状満足条件

Global Lyapunov関数

- すべての解軌道$\{\boldsymbol{x}_t\}_{t\geq 0}$が,
  - 任意の**t**に対し$\frac{d}{dt}f(\boldsymbol{x}_t)\geq 0$：関数$f$がすべての解軌道に沿って広義単調増加
  - $\frac{d}{dt}f(x_t)=0$は$V(x_t)=0$を意味する：fが静止点を除いて狭義単調増加
- とき，C^1級関数$f:X\to R$は動学系$\dot{x}=V(x)$に対するGlobal Lyapunov関数

> Lemma(補題)4.1
> Fがポテンシャル・ゲーム，かつVが条件(PC)を満たすとき，Fのポテンシャル関数は$\dot{x}=V(x)$に対するGlobal Lyapunov関数である

非現状満足条件(Non-Complacency, NC)

- 動学のどの状態が静止点になりうるかを規定
- 有益な逸脱があるのならば，その機会を利用するプレイヤーの存在が期待される(現状に満足せず利得を増やそうとする)

> 非現状満足条件(NC)
> $V(\boldsymbol{x})$=0は，$\boldsymbol{x}$がFのナッシュ均衡であることを意味する

正の相関条件と非現状満足条件

Brown-von Neumann-Nash動学(BNN)

- 運動方程式 $\dot{x}_i^p = m^p k_i^p - x_i^p \sum_{j\in S^p} k_j^p$
  - 集団の平均利得に対する戦略iの超過利得 $k_i^p = \max\left\{F_i^p(\boldsymbol{x}) - \frac{1}{m^p}\sum_{j\in S^p} x_j^p F_j^p(\boldsymbol{x}), 0\right\}$

Proposition(命題)4.2
BNN動学は条件(LC)，(FI)，(PC)，(NC)を満たす

- どのような短い時間間隔でも，集団内のすべてのプレイヤーが戦略を切り替える可能性が等しくあり，集団内の超過利得の合計に比例した割合で切り替える
- 戦略を切り替えるプレイヤーは，平均以上の利得をもつ戦略を選び，その戦略の超過利得に比例した確率でそれぞれの戦略を選ぶ

進化的安定性

- 動学Vの静止点とゲームFのナッシュ均衡の比較

Proposition(命題)4.3
(i)　Vが条件(PC)を満たすとき，Fの全てのナッシュ均衡は$\dot{x} = V(x)$の静止点である
(ii)　Vが条件(NC)も満たすとき，Fのナッシュ均衡と$\dot{x} = V(x)$の静止点は一致する
ポテンシャル関数の存在に依存せず，任意の集団ゲームに対して有効である

- 局所安定性
  - リアプノフ安定：行動の小さな変化が集団を均衡から遠ざけることがない
  - 漸近安定性：リアプノフ安定である上に，集団が最終的に均衡に戻る
  - 局所最大化集合$A \subset X$：
    - (i)　Aが連結である，(ii)　fがA上で一定である
      (iii)　任意の$\boldsymbol{y} \in B - A$と$\boldsymbol{x} \in A$に対して$f(\boldsymbol{y}) < f(\boldsymbol{x})$となるような$A$の近傍$B$が存在する

Theorem(定理)4.4
Fをポテンシャル関数fをもつポテンシャル・ゲームとする．このとき，
(i)　Vが条件(PC)を満たすとき，どの局所最大化集合もリアプノフ安定である
(ii)　Vが条件(NC)も満たすとき，
　(a) どの孤立した局所最大化集合も最小漸近安定集合である
　(b) 滑らかに連結された最小漸近安定集合は，孤立した局所最大化集合である

進化的安定性

- 局所安定性(続き)

Theorem(定理)4.4
Fをポテンシャル関数fをもつポテンシャル・ゲームとする．このとき，
(i)　Vが条件(PC)を満たすとき，どの局所最大化集合もリアプノフ安定である
(ii)　Vが条件(NC)も満たすとき，
　(a) どの孤立した局所最大化集合も最小漸近安定集合である
　(b) 滑らかに連結された最小漸近安定集合は，孤立した局所最大化集合である

- (i)：正の相関条件を満たす動学のもとでは，ポテンシャルの最大化すべてがリアプノフ安定である
- ➢ 行動における小さな摂動は，集団をポテンシャルの局所最大化から遠ざけるのに十分でない
- (ii)：非現状満足条件も満たす動学のもとでは，ポテンシャルの局所最大化集合と漸近安定集合が一致する

- 集団が均衡に達した後に重要なお話：均衡が持続することを期待してもよいかを決めるため
- 均衡に達することを保証するものではない
  - 解軌道が常に静止点の近傍を回避するような，閉じた軌道やカオス的振る舞いを示すことがある

進化的安定性

- ポテンシャル・ゲームでは確実にナッシュ均衡に収束
  - 初期状態$\boldsymbol{x}_0$を持つ解軌道：$\{\boldsymbol{x}_t\}_{t\geq 0}$
  - 解軌道の極限点の集合：$\omega(\boldsymbol{x}_0) = \left\{\boldsymbol{z} \in X : \lim_{k\to\infty} x_{t_k} = 0 \text{ for some } t_k \to \infty\right\}$

Theorem(定理)4.5
Fをポテンシャル・ゲームとする．このとき，
(i)　Vが条件(PC)を満たすとき，解軌道の極限点の集合$\omega(x)$はそれぞれ，Vの静止点の閉じた連結集合である
(ii)　Vが条件(NC)も満たすとき，　$\omega(x)$はナッシュ均衡のみを含む

- (i)：条件(PC)のもとでは，各初期条件から出発する解軌道は静止点に収束しなければならない
- (ii)：解軌道の極限点はすべてナッシュ均衡でなければならない

5. Efficiency

効率性

- ナッシュ均衡は社会的に最適であるとは限らない
  - プレイヤーは自分の行動が相手の利得にどのような影響を与えるか考慮しない(自分さえよければいい)→均衡は非効率的なことがある
  - 例：囚人のジレンマ

	自白	黙秘
自白	(5, 5)	(0, 10)
黙秘	(10, 0)	(3, 3)

  - 同次ポテンシャル・ゲームでは，個人の利得と社会的利得が完全に一致し，利己的な選択が効率的なプレイにつながる
  - ➢ 以降では，同次ポテンシャルゲーム(Homogenous Potential Games)を考える

- 同次ポテンシャル・ゲーム
  - あるポテンシャル・ゲームFの利得関数が，$F_i^p: \bar{X} \to R$がC^1級かつ$k(\neq -1)$次同次関数であるとき，k次同次ポテンシャル・ゲーム

同次ポテンシャル・ゲーム—具体例

- 利得が共通のランダムマッチングゲーム
  - 単一集団の場合の利得関数：$F_i(x) = \sum_{j \in S^2} U(i,j)x_j$，各戦略の利得は集団の状態に線形$(k = 1)$
    - 1次同次ポテンシャル・ゲームである
  - 複数集団の場合の利得関数$(x^1, \ldots, x^{p-1}, x^{p+1}, \ldots, x^r)$に対して多重線形$(k = r - 1)$
    - $r - 1$次同次ポテンシャル・ゲームである

- 等弾力性混雑ゲーム
  - 混雑ゲームの利得関数：$F_i^p(\boldsymbol{x}) = \sum_{\phi \in \Phi_i^p} c_\phi \left(u_\phi(\boldsymbol{x}) \right)$，$c_\phi$は道路のコスト関数
  - 道路fのコスト弾力性：$\eta_\phi(u) = \dfrac{u c'_\phi(u)}{c_\phi(u)}$ $(c_\phi(u) \neq 0)$
  - 任意の$\phi \in \Phi$に対して，$\eta_\phi \equiv \eta$ (コスト弾力性がすべて等しい)である場合(すべての道路がすべての利用水準において同様に混雑に敏感),混雑ゲームを弾力性ηを持つ等弾力性混雑ゲームという

Proposition(命題)5.1
弾力性ηをもつ等弾力性混雑ゲームはη次同次ポテンシャル・ゲームである

進化と効率性

- 効率性を集計利得で捉える
  - 集計利得関数$\bar{F}: X \to R$: $\bar{F}(\boldsymbol{x}) = \sum_{p\in P} \sum_{i\in S^p} x_i^p F_i^p(\boldsymbol{x})$

Lemma(補題)5.2
ポテンシャル・ゲームFがk次同次であるとき， 関数$\frac{1}{1+k}\bar{F}(\boldsymbol{x})$は$F$のポテンシャル関数である

- 同次性がなぜ効率的なプレイを導くのか？
  - 戦略iを選択する新しいプレイヤーがゲームに加わることで集計利得に与える効果

$$\frac{\partial}{\partial x_i^p}\bar{F}(\boldsymbol{x}) = \underbrace{\boxed{\sum_{q\in \mathrm{P}} \sum_{j\in S^p} x_j^q \frac{\partial F_j^q}{\partial x_i^p}(\boldsymbol{x})}}_{\text{新たなプレイヤーが既存プレイヤーの集計利得に与える効果}} + \underbrace{\boxed{F_i^p(\boldsymbol{x})}}_{\text{新たなプレイヤー自身の利得}}$$

  - 同次ポテンシャル・ゲームでは， 上記2つの効果のバランスが取れている(比率が一定だということ？)
    - プレイヤーが戦略を選ぶことで得る利得は， その選択による社会的な影響に正比例
    - 利己的な行動は社会的に望ましいプレイをもたらす

進化と効率性

- 同次ポテンシャル・ゲームは，すべての進化経路で集計利得が増加しなければならない
  - 4. Evolutionary Dynamicsより，進化は常にポテンシャルを増加させる
  - 同次ポテンシャル・ゲームでは，ポテンシャルは集計利得によるもの

Theorem(定理)5.3
ポテンシャル・ゲームFが$k(>-1)$次同次，かつ動学Vが条件(PC)を満たすとき，
$\dot{x}=V(x)$の全ての解は$\frac{d}{dt}\bar{F}(x_t)\geq 0$を満たし，$V$の静止点でのみ等しい
$K<-1$のときは，$\frac{d}{dt}\bar{F}(x_t)\leq 0$を満たす

- 局所最大化，局所安定均衡と局所的効率の関係

Theorem(定理)5.4
Fが$k(>-1)$次同次ポテンシャル・ゲームであるとする
(i)　Vが条件(PC)を満たすとき，すべての局所的に効率的な状態は局所的に安定である
(ii)　Vが条件(NC)も満たすとき，すべての局所的に安定な状態は局所的に効率的である

進化と効率性

大域的安定性と大域的効率性

- 一般に，同次性は局所的な安定性しか保証しない
  - 利得が共通の協調ゲームでは，複数の安定均衡があるが，利得最大の均衡のみが大域的に効率的
- ゲームの均衡が唯一であれば，その均衡は大域的に安定かつ効率的

Theorem(定理)5.5
Fをk次同次ポテンシャル・ゲームとする．Fが唯一のナッシュ均衡を持つ場合，条件(PC)と(NC)を満たすすべての動学のもとで，そのナッシュ均衡は大域的に安定かつ効率的である

混雑ゲームへの適用

- 渋滞ゲームを用いて交通流やその他負の外部性を持つ設定をモデル化
  - 道路のコスト関数$c_\phi(u_\phi)$は利用水準u_ϕに対して単調増加であると仮定
  - 均衡の一意性と大域的安定性が保証される
  - コストが等弾力的であるならば，大域的安定が保証される

Corollary(系)5.6
Fをコスト関数が$c_\phi' > 0$を満たす混雑ゲームであるとし，動学Vが条件(PC)，(NC)を満たすとする
このとき，Fは唯一の大域的に安定な均衡を持ち，Fが等弾力的であるならば，この均衡は大域的に効率的である

6. Potential Games as Limits of Finite Player Games

無限プレイヤーポテンシャル・ゲームと有限プレイヤーポテンシャル・ゲーム(FPP Games)の関係について

有限プレイヤーポテンシャル・ゲーム(FPP Games)

Nプレイヤーの標準形ゲームにおいて

- S^α：プレイヤー$\alpha \in \{1,\dots,N\}$にとっての戦略集合，$U^\alpha : \prod_\alpha S^\alpha \to R$：プレイヤー$\alpha \in \{1,\dots,N\}$にとっての効用関数，
  $S^{-\alpha} = \prod_{\beta \neq \alpha} S^\beta$：$\alpha$の対戦相手の戦略プロファイルの集合
- 任意の$\hat{\imath}^\alpha, i^\alpha \in S^\alpha, i^{-\alpha} \in S^{-\alpha}, \alpha \in \{1,\dots,N\}$に対して，$U^\alpha(\hat{\imath}^\alpha, i^{-\alpha}) - U^\alpha(i^\alpha, i^{-\alpha}) = U(\hat{\imath}^\alpha, i^{-\alpha}) - U(i^\alpha, i^{-\alpha})$であるようなポテンシャル関数$U : \prod_\alpha S^\wedge\alpha \to R$が存在するとき，有限プレイヤーポテンシャル・ゲーム(FPP Games)と呼ぶ
- 逸脱戦略は逸脱者の利得とポテンシャルの両方に同じ効果を与える
- ポテンシャル関数は対戦相手の戦略を固定したときの各プレイヤーの利得関数として機能

$$U^\alpha(i^\alpha, i^{-\alpha}) = U(i^\alpha, i^{-\alpha}) + \boxed{A^\alpha(i^{-\alpha})}$$

対戦相手の戦略プロファイル$S^{-\alpha}$から実数直線への関数

有限プレイヤーポテンシャル・ゲーム(AFP Games)

- プレイヤーが同一で匿名，全プレイヤーが同じ戦略集合Sと利得関数$\{u_i\}_{i \in S}$の集合を共有
- 利得関数　$u_i(\boldsymbol{x}) = \boxed{P(\boldsymbol{x})} + a\left(\boxed{\boldsymbol{x}} - \frac{\boxed{e_i}}{N}\right)$

R^nの基本ベクトル

ポテンシャル関数

現在の戦略分布

無限プレイヤーポテンシャル・ゲームと有限プレイヤーポテンシャル・ゲーム(FPP Games)の関係について

有限プレイヤーポテンシャル・ゲーム(AFP Games) (続き)

- 利得関数 $\boxed{u_i(\boldsymbol{x})} = \boxed{P(\boldsymbol{x})} + \boxed{a\left(\boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{e}_i}{N}\right)}$

定義域X_i^N

$X_i^N = \{\boldsymbol{x} \in X^N : x_i \neq 0\}$

少なくとも1プレイヤーが戦略iを選ぶような戦略分布の集合

定義域X^N

$$X^N = \left\{\boldsymbol{x} \in R_+^N : \sum_j x_j = 1, \text{and } Nx_j \in Z \text{ for all } i \in S\right\}$$

集団の大きさがNであるときの全ての可能な戦略分布の集合

定義域X_d^N

$$X_d^N = \left\{\boldsymbol{x} \in R_+^N : \sum_j x_j = \frac{N-1}{N}, \text{and } Nx_j \in Z \text{ for all } j \in S\right\}$$

減少戦略分布の集合：1プレイヤーが不在の部分集団における戦略分布の集合

- 任意の$\boldsymbol{y} \in X_d^N$に対して，$P(\boldsymbol{y}) = -a(\boldsymbol{y})$とすると，Pの定義域は$X^N \cup X_d^N$に拡張され，

$$u_i(\boldsymbol{x}) = P(\boldsymbol{x}) - P\left(\boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{e}_i}{N}\right)$$

- 拡張されたポテンシャル関数が利得に関するすべての情報を集約している
- 戦略分布が$\boldsymbol{x}$であるときに戦略iを選ぶプレイヤーの利得は，
現在の戦略分布$\boldsymbol{x}$とプレイヤーが集団から離れたときに生じる減少戦略分布$\boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{e}_i}{N}$のポテンシャルの差→無限集団では偏微分になりそう

無限プレイヤーポテンシャル・ゲームと有限プレイヤーポテンシャル・ゲーム(FPP Games)の関係について

AFP Gamesの収束

条件(C)
$X^N \cup X_d^N$における任意のx, yとすべてのNについて，関数$P: \to \bar{X} \to R$と，

$$\left|\left(\frac{1}{N}P^N(\boldsymbol{x}) - P(\boldsymbol{x})\right) - \left(\frac{1}{N}P^N(\boldsymbol{y}) - P(\boldsymbol{y})\right)\right| \leq K^N||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||$$

であるような実数の消失列$\{K^N\}_{N=N_0}^{\infty}$が存在するとき，AFP Gamesの列$\left\{\{u_i^N\}_{i\in S}, P^N\right\}_{N=N_0}^{\infty}$は収束する

- 各Nについて，$\frac{1}{N}P^N$とPの差がリプシッツ連続関数であることが必要
- リプシッツ定数K^NはNが大きくなるにつれて消失しなければならない

- 有限プレイヤーゲームでは，ポテンシャル関数はオーダーNの大きさを持つ→Nで割ってリスケールしたポテンシャル関数を考える
- $\bar{X}$は有界なので関数$\frac{1}{N}P^N(x) - c^N \equiv \frac{1}{N}P^N(x) - \left(\frac{1}{N}P^N(e_1) - P(e_1)\right)$が$P(x)$に一様収束
- 各固定されたNに対して，xが少し変化しても$\frac{1}{N}P^N(\boldsymbol{x}) - P(\boldsymbol{x})$はほとんど変化しない
  - Nが大きくなるほど，差の変化は小さくなる

無限プレイヤーポテンシャル・ゲームと有限プレイヤーポテンシャル・ゲーム(FPP Games)の関係について

無限プレイヤー(連続)のポテンシャル・ゲームの定義

- AFP Gamesのポテンシャル関数が収束すれば，利得関数も収束する→無限プレイヤーポテンシャル・ゲーム

Theorem(定理) 6.1

$\left\{\{u_i^N\}_{i\in S}, P^N\right\}_{\mathrm{N}=\mathrm{N}_0}^{\infty}$ をポテンシャル関数の極限Pを持つAFP Gamesの収束列とする．このとき，

(i) 利得関数の列は一様収束：それぞれの$i \in S$について，

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{x\in x_i^N} \left|u_i^N(x) - u_i(x)\right| = 0$$

であるようなC^0級関数$u_i : \bar{X} \to R$が存在する

(i) 利得関数とポテンシャル関数の極限は無限プレイヤーのポテンシャル・ゲームを定義する．すなわち，任意の$x \in X, i \in S$について，$u_i(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial P}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})$である．

- 有限プレイヤーのポテンシャル・ゲームの定義の極限を考えると，それが無限プレイヤーのポテンシャル・ゲームの定義になる

➢ 本質的には同じ，有限プレイヤー(離散)か無限プレイヤー(連続)かは分析に都合の良い方を選べばよい

所感など

- 難しかった
  - 一度通読しただけではあまり理解できず，スライドを作りながら全体で言いたいことはなんとか理解できたと勝手に思っている
  - 抽象的な数学的議論がなかなか重い：今後，登場した数学的概念もちゃんと理解していきたい
  - タイトルのContinuousが，有限(離散)vs無限(連続)の文脈であることに気づくのがミソではないか

- 研究とのつながり
  - ポテンシャル・ゲームの有限(離散)の世界と無限(連続)の世界を極限でつないでいた
  - 離散最適化は難しいので，本論文の内容を用いて連続最適化に問題を読み替えられるということ？(分析の便宜上の問題らしいので)
  - 混雑ゲームの具体例が出てきたが，ネットワーク上の交通量配分の話
  - 交通量配分でも，交通量(人数，台数)は離散的なのに，連続最適化として計算している
  - 対象が大規模であれば，離散的なものを連続的に見て良いとしている？

  - 仮テーマ：「駐車場-目的地選択モデルによる最適歩行空間」において，
経路選択も考えるので，本論文の手法でモデリングできる？ or 既にもう先行研究で取り入れられている？←まだよくわかってない