

2024.05.07
理論談話会#3

Departure Time Choice Models in Urban Transportation Systems Based on Mean Field Games

平均場ゲームに基づく都市交通システムにおける出発時刻選択モデル

Ameli, M., Faradonbeh, M. S. S., Lebacque, J. P., Abouee-Mehrzi, H., & Leclercq, L. Departure time choice models in urban transportation systems based on mean field games. *Transportation Science*, Vol.56 No.6, pp.1483-1504, 2022.

交通・都市・国土学研究室
M1 松永隆宏

Abstract

- 出発時刻選択の均衡問題を平均場ゲーム理論の枠組みでモデル化・分析
- 従前考慮が不十分だった到着希望時刻やトリップ長の異質性を考慮しつつ均衡の存在を実証
- 従来モデル比で収束の高速化, 計算コストの削減を実現

- **Model and analyze the Departure Time User Equilibrium (DTUE) problem within the framework of Mean Field Game Theory (MFG).**
- Demonstrate the existence of equilibrium points while considering **the heterogeneity of desired arrival times and trip lengths**, which was inadequately addressed in previous DTUE models.
- Achieve **faster convergence and reduced computational costs** compared to traditional models.

Novelty, Usefulness, Reliability

Novelty/新規性

- The first study to develop an MFGs-based framework for DTUE
- Relax all assumptions regarding heterogeneities of desired arrival time and trip length
- New heuristic method to speed up calculations

Usefulness/有用性

- established a new DTUE model considering infinite users on a macroscopic network
- 従来モデルの仮定を緩和しより現実に即した現象を考慮可能

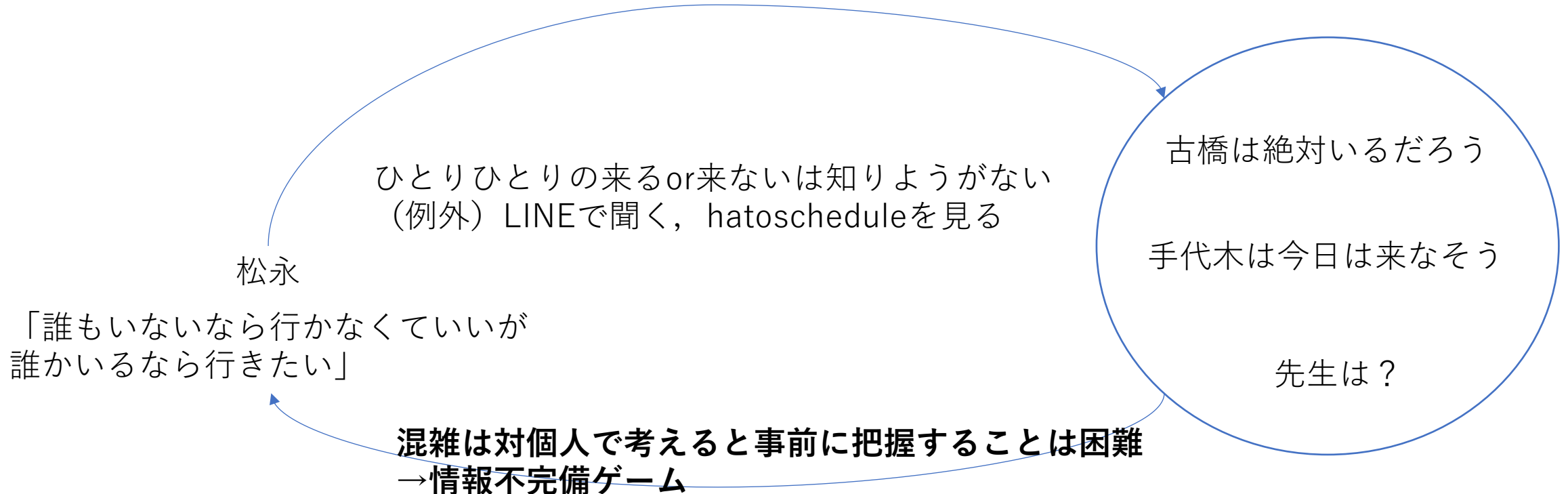
Reliability/信頼性

- Conducted careful numerical experiments including a case study using real data in Lyon, France.
- 数値実験 + 実データを使った検証

1. Introduction

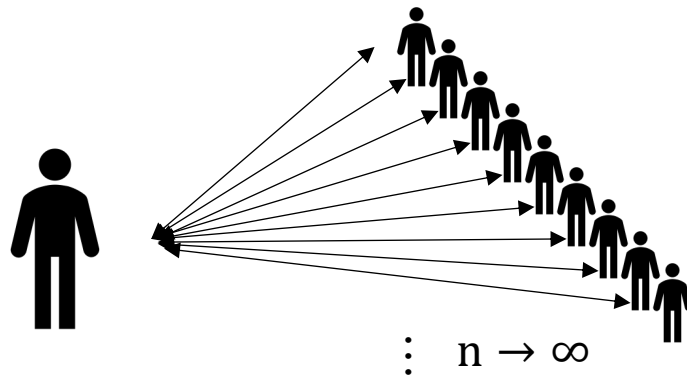
Main idea

- 都市交通システムNW上の混雑を考慮した出発時刻選択は「(情報不完備) ゲーム」である [柳沼・福田(2008)]
- **Departure Time Choice Problem (DTCP), or Morning Commute Problem, is a game of imperfect information**



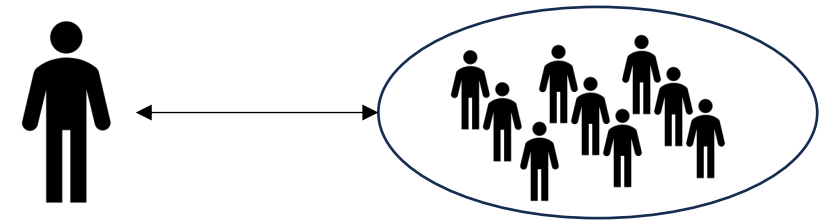
Introduction of “Mean Field”

プレイヤーが多すぎる（均衡も存在しない）



too many players

個別のプレイヤーは考えず，それらを平準化した集合体（平均場：Mean Field）として考える



treat as a single mass, ‘Mean Field’

assumptions

1. the impact of each player on the system vanishes
2. each player only reacts to a “mass”

The core idea of MFGs is to exploit the “smoothing” effect of large numbers of interacting players.

Introduction of “Mean Field”

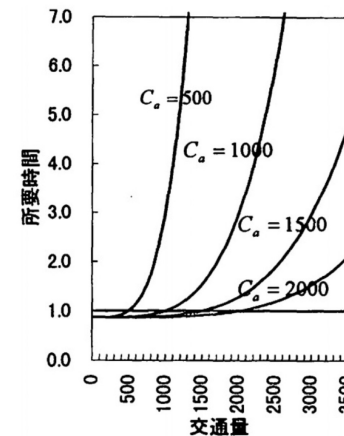
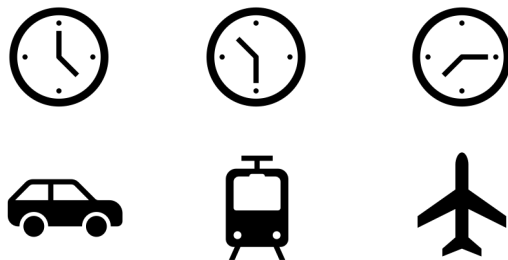
- 平均場の導入で、より現実に即した考え方になる
- 交通「システム」と移動者の間のゲーム

traveler's
decision making

iterative interactions

System Dynamics

- what time to depart
- which modes to take

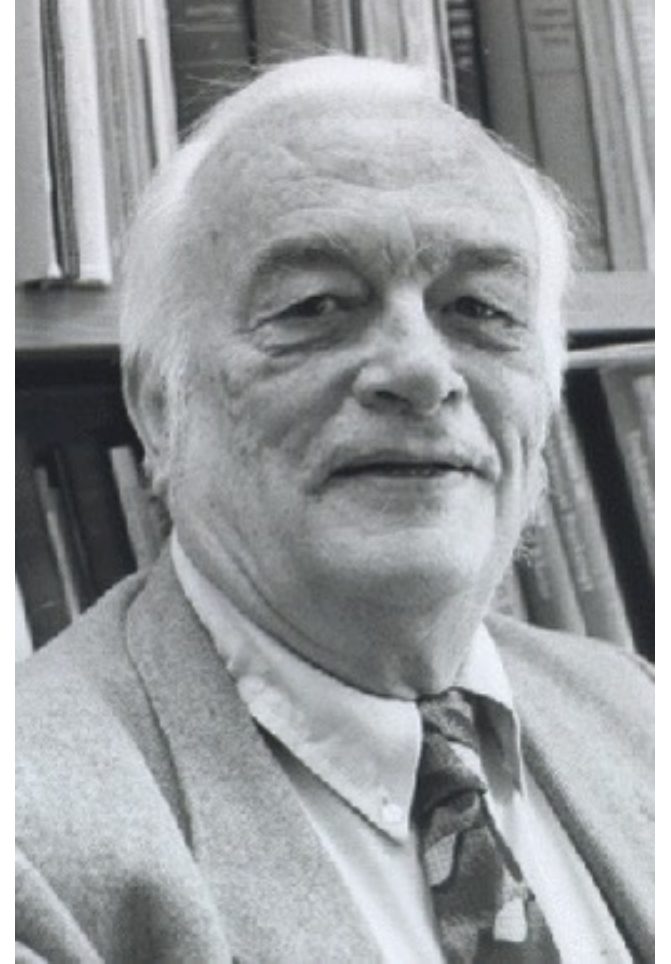


<https://www.shimotsuke.co.jp/articles/gallery/891075?ph=1>

BPR型リンクパフォーマンス関数
交通ネットワークの均衡分析 (土木学会, 1998)
スタートアップゼミ増田さん資料より

heavy congestion, traffic jams

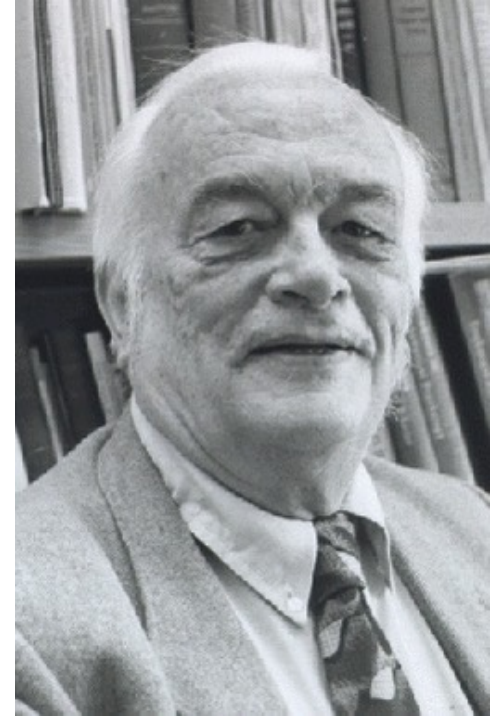
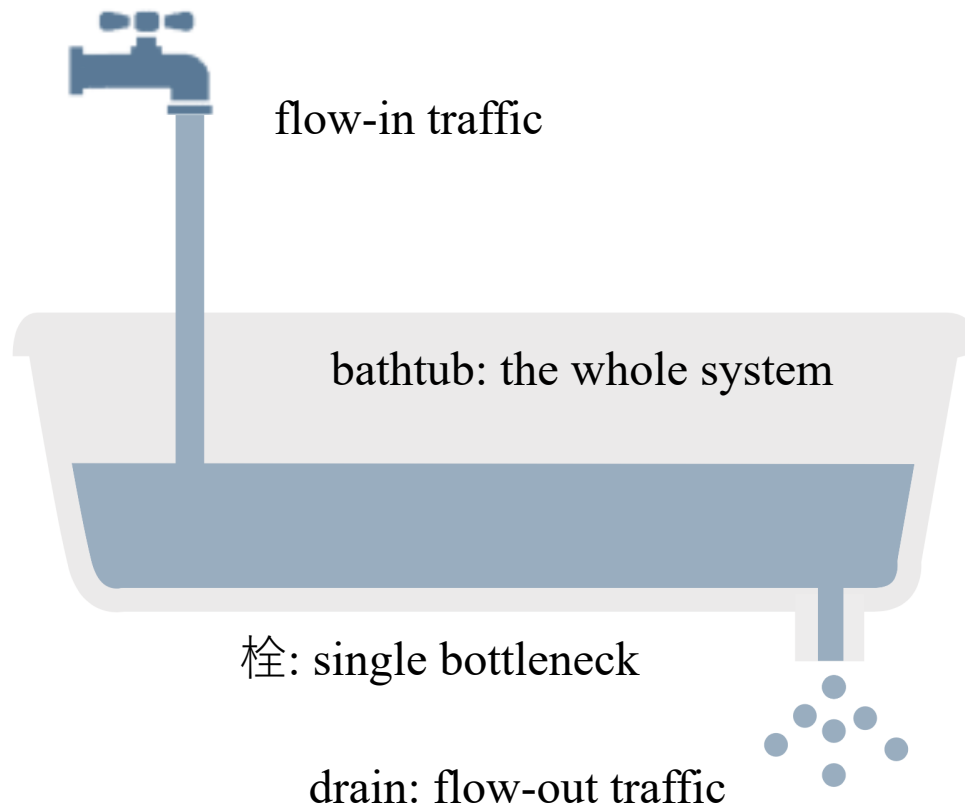
1-2. Literature on the DTUE



William Vickrey (1914-1996)
“the father of congestion pricing”

Bathtub Model [Vickrey, 1991, 2020]

- 都市における自動車流の流入・流出を風呂（バスタブ）の注水・貯水・排水に例えた



William Vickrey (1914-1996)

“the father of congestion pricing”

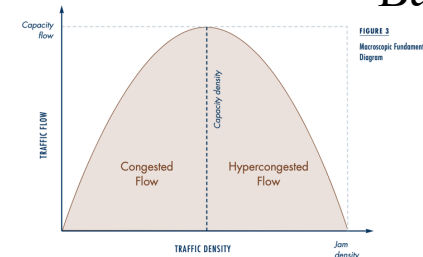
DTCPに関する研究

Departure Time Choice Problem (Morning Commute Problem)

- Point-queue problem(Vickrey, 1969)
- **Bathtub model** (Vickrey, 1991)
- **MFD** (Daganzo, 2007)



Bathtub model



MFD

Two strong assumptions

1. trip length is constant

2. single distributed preferred arrival time



few studies...



heterogeneous trip length
(Lamotte and Gerolimins, 2018)

generalized bathtub
model (Jin, 2020)

+

DTUE has been addressed by
population game theory
...assumption of '**Myopia**'

Objective

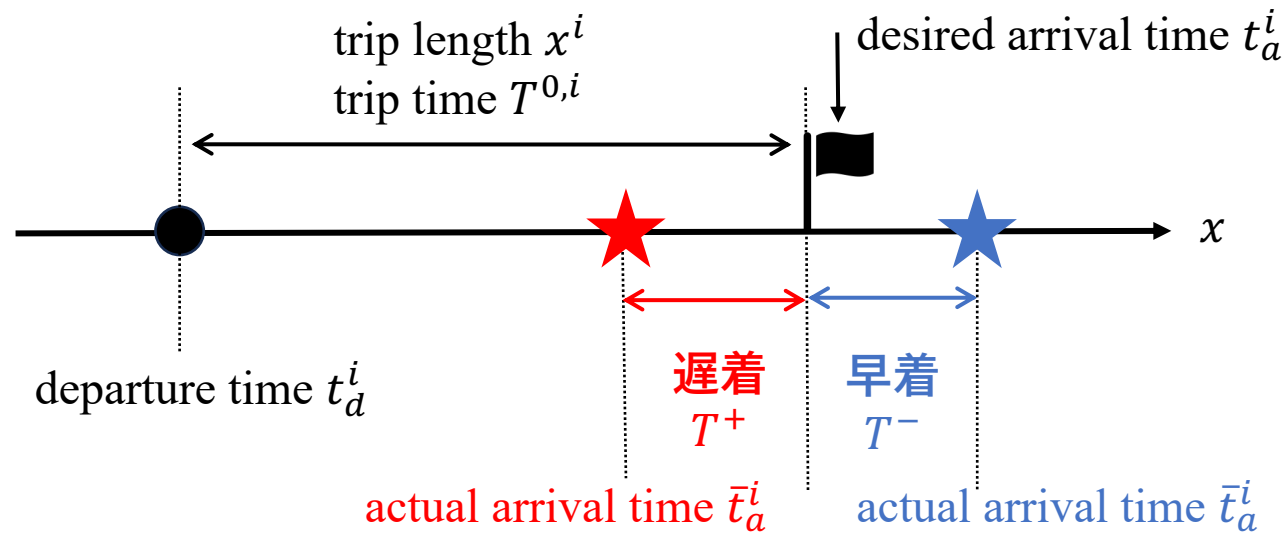
Address the **heterogeneity of users** and **investigate DTUE** employing MFGs framework

平均場ゲームの導入により**個人のトリップ長・到着希望時刻の異質性**を考慮しつつ、**均衡**を探る

2. Problem Definition

Preparations (1)

設定：距離 x^i ，希望到着時刻 t_a^i をもつ個人 i が時刻 t_d^i に出発し時刻 \bar{t}_a^i に到着することを考える



- 目的関数：移動コスト = 移動時間項 + 希望と実際の到着時刻の差分（ペナルティ）項

$$J = \alpha T^0 + \beta (T^-)_+ + \gamma (T^+)_+$$

Preparations (2)

設定

(1) demand profile 移動距離 x_i , 希望到着時刻 t_a^i をもつ移動需要

$$m_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta(x^i, t_a^i) \quad m_n \Rightarrow m \text{ as } n \rightarrow \infty \quad m \text{は確率測度}$$

(2) congestion (fraction of traveling users) 混雑度 (アクティブユーザ割合)

$$c_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{[t_d^i, \bar{t}_a^i)}(t) \quad \mathbf{1}_{[t_d^i, \bar{t}_a^i)} = \begin{cases} 1 & \text{if } t \in [t_d^i, \bar{t}_a^i) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(3) velocity, travel distance, trip time 速度, トリップ長, トリップ時間

$$v_t = V(c_t) \quad z(t) := \int_0^t v_s ds = \int_0^t V(c_s) ds. \quad T(t_d^i, x^i) = z^{-1}(x^i + z(t_d^i)) - t_d^i.$$

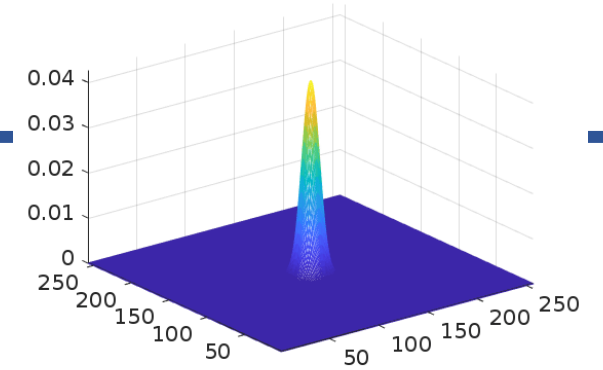
v_t はNWで一定

Assumption. 1

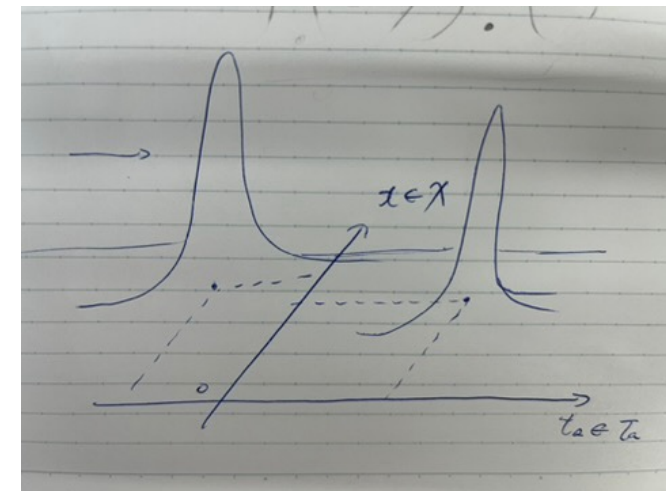
ボレル集合 $B(\mathcal{X})$, ルベーク測度 λ のとき, 次のような定数 M_m が存在

$$m(B, \mathcal{T}_a) \leq M_m \lambda(B)$$

long-range part of the Dirac delta



δ : ディラック関数. 該当箇所のみ大きな値をとる
cf) クロネッカのデルタ



各需要点が上に突き出ており, これを均すと m になるイメージ

DTCP definition

- Cost Function $J_i(t_d^i, t_a^i | t_d^{-i}, x^{-i}) = \underbrace{\alpha T(t_d^i, x^i)}_{\text{trip time}} + \underbrace{\beta(t_a^i - t_d^i - T(t_d^i, x^i))_+}_{\text{early arrival penalty}} + \underbrace{\gamma(t_d^i + T(t_d^i, x^i) - t_a^i)_+}_{\text{late arrival penalty}}$

- Nash Equilibrium $J_i(\hat{t}_d^i, \hat{t}_d^{-i}, x^{-i}) \leq J_i(t, \hat{t}_d^{-i}, x^{-i}), \quad \forall t \in T_d.$

全プレイヤー i に対して、戦略（出発時刻 t_d^i ）をどのように変えても利得が改善されない状況

- **Departure Time Choice Problem**

$$\begin{aligned} \min_{t_d^i \in T_d} J_i(t_d^i, t_a^i, t_d^{-i}, x^{-i}) \\ = \alpha T(t_d^i, x^i) + \beta(t_a^i - t_d^i - T(t_d^i, x^i))_+ + \gamma(t_d^i + T(t_d^i, x^i) - t_a^i)_+ \quad \forall i \end{aligned}$$

$$\text{s.t.} \quad c_t = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n 1_{[t_j^d, t_j^d + T(t_j^d, x^j)]}(t),$$

$$z(t) = \int_0^t V(c_s) ds,$$

$$T(t_d^i, x^i) = z^{-1}(x^i + z(t_d^i)) - t_d^i.$$

出発時刻選択問題が左のような**制約条件付きのコスト関数最小化問題**として定式化された

DTCP has been formulated as a minimization problem of the cost function J with constraint conditions

3. MFGs Framework

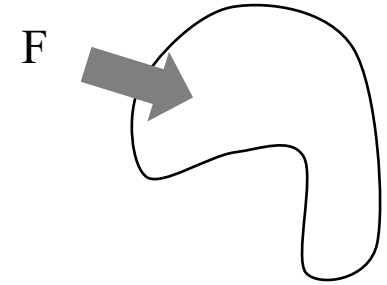
Preparations

設定：個人*i*から見たときの，他プレイヤー $j \in [n] \setminus i$ の流入を考える

- F : 流入測度, in-flow measure

$$F_n^i := \frac{1}{n-1} \sum_{j \in [n] \setminus i} \delta_{t_d^i, x^j}, \quad F := \lim_{n \rightarrow \infty} F_n^i,$$

$$E_n^i := \frac{1}{n-1} \sum_{j \in [n] \setminus i} \delta_{t_d^i, x^j, t_a^j}, \quad E := \lim_{n \rightarrow \infty} E_n^i.$$



E は F を t_a^i について周辺化したもの

- F が既知とすると，個人*i*は F の下でコスト関数を最小化するように t_b^i を選ぶ

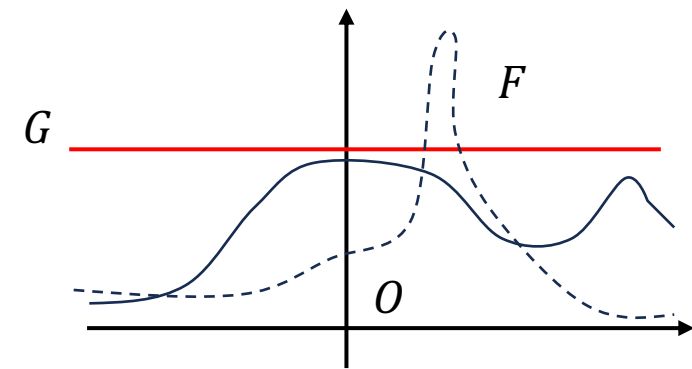
$$J_i(t_d^i; x, t_a^i; \underline{F}) = \alpha T(t_d^i, x^i) + \beta (t_a^i - t_d^i - T(t_d^i, x^i))_+ + \gamma (t_d^i + T(t_d^i, x^i) - t_a^i)_+$$

Assumption. 2

定数 G ，ルベーク可測集合 $B \in (\mathcal{T}_d \times \mathcal{X})$ ，ルベーク測度 λ は次を満たす

$$F(B) \leq G\lambda(B)$$

出発時刻やトリップ長に関して F が滑らかであるように G で抑えている



F は大きな変化ができない

Dynamics of the System

目的： z_F の動学を導く

- 時刻0に移動を開始した仮想旅行者の移動距離: z

$$z(t) := \int_0^t v_s ds = \int_0^t V(c_s) ds.$$

常にシステム内のactive tripの影響を受けるので、システムの動学を反映しているとして扱う

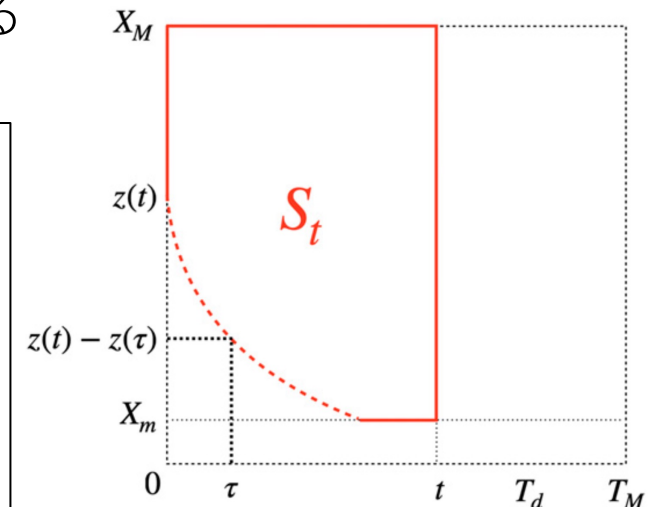
- 需要 m , 定数 G の下, Appendix 2 に従う流入 $F \in \mathcal{P}(\mathcal{T}_d \times \mathcal{X})$ を $\mathcal{P}_{m,G}$ とする

Proposition. 1

速度関数 V , 流入測度 $F \in \mathcal{P}_{m,G}$ のとき z_F は次を満たす (z_F と F の関係)

$$\begin{cases} z_F(t) = \int_0^t V(F(S_s(z_F))) ds, \\ S_t(z_F) := \{(\tau, \xi) \mid \tau \in [0, t] \cap \mathcal{T}_d, \xi \in (z_F(t) - z_F(\tau), \infty) \cap \mathcal{X}\}. \end{cases}$$

- $S_t(z_F)$: システム状態 z_F のときの出発時刻とトリップ長の組の集合
- このとき z_F は唯一性をもつ (Proposition. 2)



S_t の解空間はオレンジの枠内

MFGs-DTCP formulation & relaxation

DTCPの定式化

$$\min_{t_d \in \mathcal{T}_d} J(t_d; x, t_a; F) = \alpha T(t_d, x) + \beta(t_a - t_d - T(t_d, x))_+ + \gamma(t_d + T(t_d, x) - t_a)_+$$

$$\text{s.t. } \begin{cases} z(t) = \int_0^t V(F(S_s(z))) ds, \\ S_t(z) := \{(\tau, \xi) \mid \tau \in [0, t] \cap \mathcal{T}_d, \xi \in (z(t) - z(\tau), \infty) \cap \mathcal{X}\}, \end{cases}$$

$$T(t_d, x) = z^{-1}(x + z(t_d)) - t_d.$$

- 解くのは難しいのでBounded Rational User Equilibrium (BRUE) に基づいて ε で緩和する

Definition of ε -MFE

$\varepsilon > 0$, $F \in \mathcal{P}_{m,G}$ のとき

$$E^* (\{ (t_d, x, t_a) \in \mathcal{T}_d \times \mathcal{X} \times \mathcal{T}_a \mid J(t_d; x, t_a; \mathcal{F}(E^*)) \leq J(t_d^0; x, t_a; \mathcal{F}(E^*)) + \varepsilon, \forall t_d^0 \in \mathcal{T}_d \}) = 1.$$

E^* は不動点: $H(\hat{E}) := \{ E \in \mathcal{M}_{m,G} \mid E(\{ (t_d, x, t_a) \in \mathcal{T}_d \times \mathcal{X} \times \mathcal{T}_a \mid J(t_d; x, t_a; \mathcal{F}(\hat{E})) \leq J(t_d^0; x, t_a; \mathcal{F}(\hat{E})) + \varepsilon, \forall t_d^0 \in \mathcal{T}_d \}) = 1 \}.$

DTCPの目的はコスト関数の最小化 $\min J$
ここにMFGsの思想が混じる

z の存在・一意性は確認済み

BRUE: 有界合理的利用者均衡

Existence of the Equilibrium

MFGs-DTCPには均衡が存在する

- コスト関数 J は同時連続 jointly continuous (Proposition. 5)
- 任意の ε に対して ε -MFE $\in \mathcal{P}_{m,G}$ が存在するような G が存在する (Proposition. 6)
- $G > 0$ のとき次が成り立てば ε -MFE $\in \mathcal{P}_{m,G}$

$$\varepsilon \geq \frac{M_m \text{Lip}(J)}{2G}$$

$\text{Lip}(J)$: コスト関数が一 Lipschitz 連続
(Proposition 6)

MFEは個人の意思決定の代理モデル (proxy) になっている

- 得られたMFEを基に個人はコスト関数を最小化する最適出発時刻 t_d^* を選択する

4. MFGs Model for MFGs-DTCP

Optimal Behavior (1)

目的：Fを知っているとき，Optimal departure time 最適出発時刻 t_d^* の定式化

- DTUEが達成されるとき，最適な t_d^* がある
- コスト関数に t_d^i についての最大値条件を適用する（偏微分）と，次を得る。

$$\frac{v_{t_d^*}}{v_{t_d^*+T(t_d^*,x)}} = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha - \beta'}, & t_d > t_d + T(t_d, x), \\ \frac{\alpha}{\alpha + \gamma'}, & t_d < t_d + T(t_d, x). \end{cases}$$

早着 earlier than the desired time

遅着 later than the desired time

Proposition. 7

コスト関数 α, β, γ の下で，最適出発時刻 t_d^* は以下を満たす

$$\frac{\alpha}{\alpha + \gamma} \leq \frac{v_{t_d^*}}{v_{t_d^*+T(t_d^*,x)}} \leq \frac{\alpha}{\alpha - \beta}$$

平均場の情報を持つとき，到着時刻と到着時刻におけるシステム速度の比から，最適な t_d^* がわかる

- また希望到着時刻とトリップ長から最適出発時刻を得る関数 D を次のように定める

$$t_d^* = D(t_d, x)$$

D を直接は計算することはできない

Optimal Behavior (2)

目的：需要 m , 流入 F , 関数 D の関係性を明らかにする

Proposition. 8

D は t_a で微分可能で $\partial_t D(t_a, x) > 0$. E が確率密度関数 e を持つとして

$$e(D(t_a, x), x, t_a) = \frac{m(dx, dt_a)}{\partial_t D(t_a, x)}$$

(F と m を繋ぐ方程式になっている)

- 以上でMFGs-DTCPが定式化された

一般的なプレイヤー個人の最適な意思決定に関する部分→

$$\frac{\alpha}{\alpha + \gamma} + \mathbf{1}_{t_a > \bar{t}_a} \left(\frac{\alpha}{\alpha - \beta} - \frac{\alpha}{\alpha + \gamma} \right) \leq \frac{v_{t_d}}{v_{\bar{t}_a}} \leq \frac{\alpha}{\alpha - \beta} + \mathbf{1}_{t_a < \bar{t}_a} \left(\frac{\alpha}{\alpha + \gamma} - \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \right) \text{ with solution } t_d = D(t_a, x),$$

プレイヤー全体の意思決定分布→

$$e(D(t_a, x), x, t_a) = \frac{m(dx, dt_a)}{\partial_t D(t_a, x)}, f(D(t_a, x), x) = \int_{\mathcal{T}_a} e(D(t_a, x), x, t_a) dt_a, F = \int f(t_d, x) dt_d dx,$$

その他の橋渡し役の式↓

$$z(t) = \int_0^t V(F(S_s(z))) ds, S_t(z) = \{(\tau, \xi) \mid \tau \in [0, t] \cap \mathcal{T}_d, \xi \in (z(\tau), \infty) \cap \mathcal{X}\}, T(t_d, x) = z^{-1}(x + z(t_d)) - t_d, F \in \mathcal{P}_{m, G}.$$

Equilibrium Calculation

目的：均衡問題の求解

- MFGs-DTCPを離散化する→右図に更新
- 不動点を収束計算によって求める。

手順：

個人は p ($F \in \mathcal{P}_{m,G}$ の確率密度関数, 平均場の情報) の下で

1. (54), (55)から移動距離と旅行時間を決定 (56を用いる)
2. (52)から最適出発時刻を決定しDを得る
3. (53)から \hat{p} を得る
4. $\hat{p} - p$ の収束判定
これをくりかえす

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha}{\alpha + \gamma} + \mathbf{1}_{\tau_a > \bar{\tau}_a} \left(\frac{\alpha}{\alpha - \beta} - \frac{\alpha}{\alpha + \gamma} \right) \leq \frac{v_{\tau_d}}{v_{\bar{\tau}_a}} \leq \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \\ + \mathbf{1}_{\tau_a < \bar{\tau}_a} \left(\frac{\alpha}{\alpha + \gamma} - \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \right) \text{ with solution } \tau_d = D(\tau_a, \kappa), \quad (52) \\ \mu(D(\tau_a, \kappa, \tau_a), \kappa) = \frac{\pi(\tau_a, \kappa)\Delta t}{D(\tau_a + 1, \kappa) - D(\tau_a, \kappa)}, p(\tau_d, \kappa) \\ = \sum_{\tau_a} \mu(\tau_d, \kappa, \tau_a), \quad (53) \\ \zeta(\theta) := \Delta t \sum_{\tau=0}^{\theta-1} V \left(\sum_{(\tau_d, \kappa) \in \Gamma_\tau(\zeta)} p(\tau_d, \kappa) \right), \quad (54) \\ \Gamma_\theta(\zeta) := \{(\tau_d, \kappa) \mid \kappa > \zeta(\theta) - \zeta(\tau)\}, \quad (55) \\ T(\tau_d, \kappa) := \zeta^{-1}(\kappa + \zeta(\tau_d)) - \tau_d, \quad (56) \\ \sum_{\tau_d} p(\tau_d, \kappa) = \sum_{\tau_a} \pi(\tau_a, \kappa), \quad \forall \kappa. \quad (57) \end{array} \right.$$

5. Numerical Experiments

Model Validation

Grid Search method[Lamotte and Gerolimins, 2016]との比較

1. 計算性の向上

- iteration数が87%減少
- iteration毎の計算速度は3.5倍，全体の計算時間も54%短縮

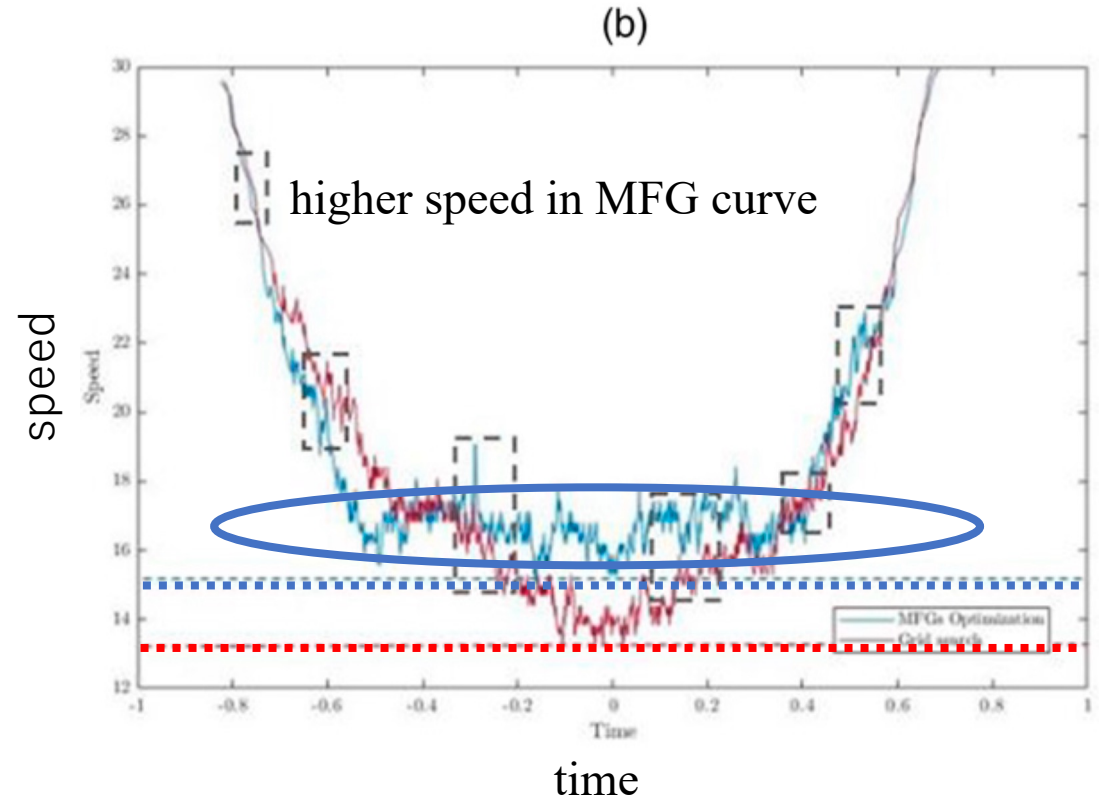
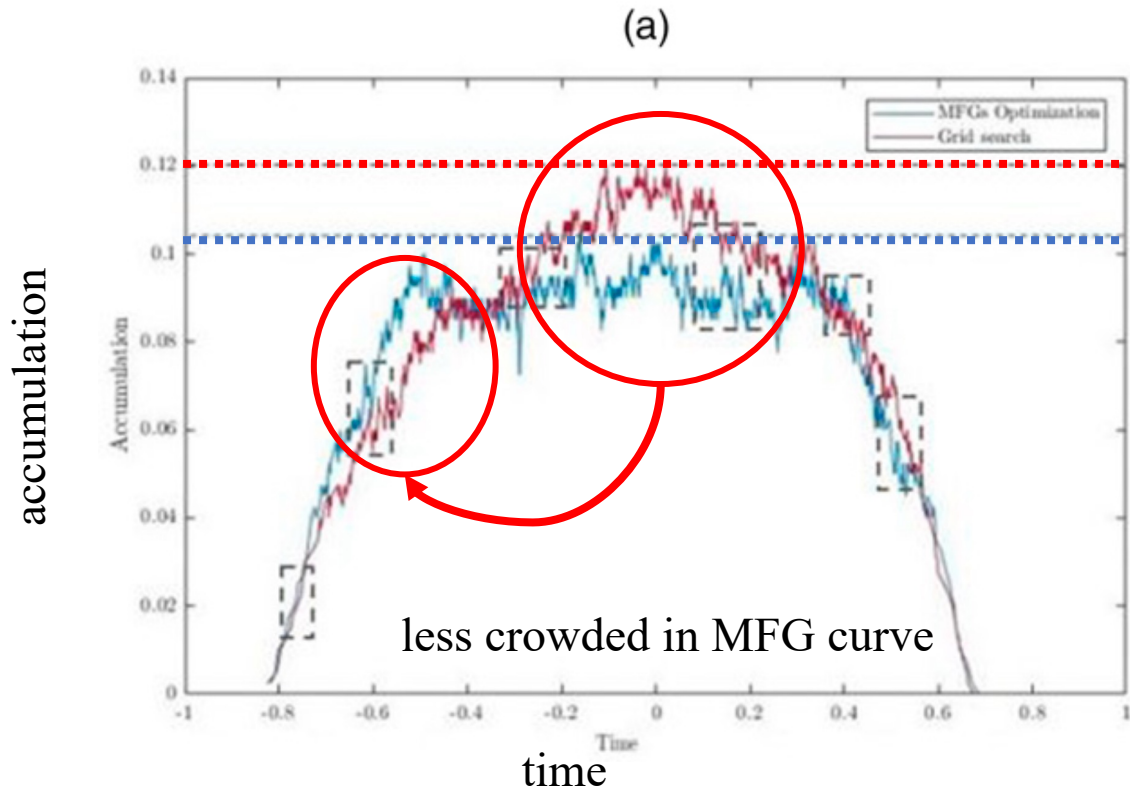
2. 均衡解の性質の変化

- 系全体の総コストが削減された（より好ましい均衡）
- ←最高スピードの向上，最大混雑度（active trip数）の減少（次頁）

Table 2. The Quality of the Equilibrium Approximation

Solution method	Total number of iterations	Convergence indicator (relative cost)	Average cost	Total travel time, s
MFGs method	259	3.37E-03	12.01	26,984
Lamotte and Gerolimins (2018)	2,000	3.57E-03	12.66	27,362
Improvement, %	87.05	5.61	5.13	1.38

Model Validation

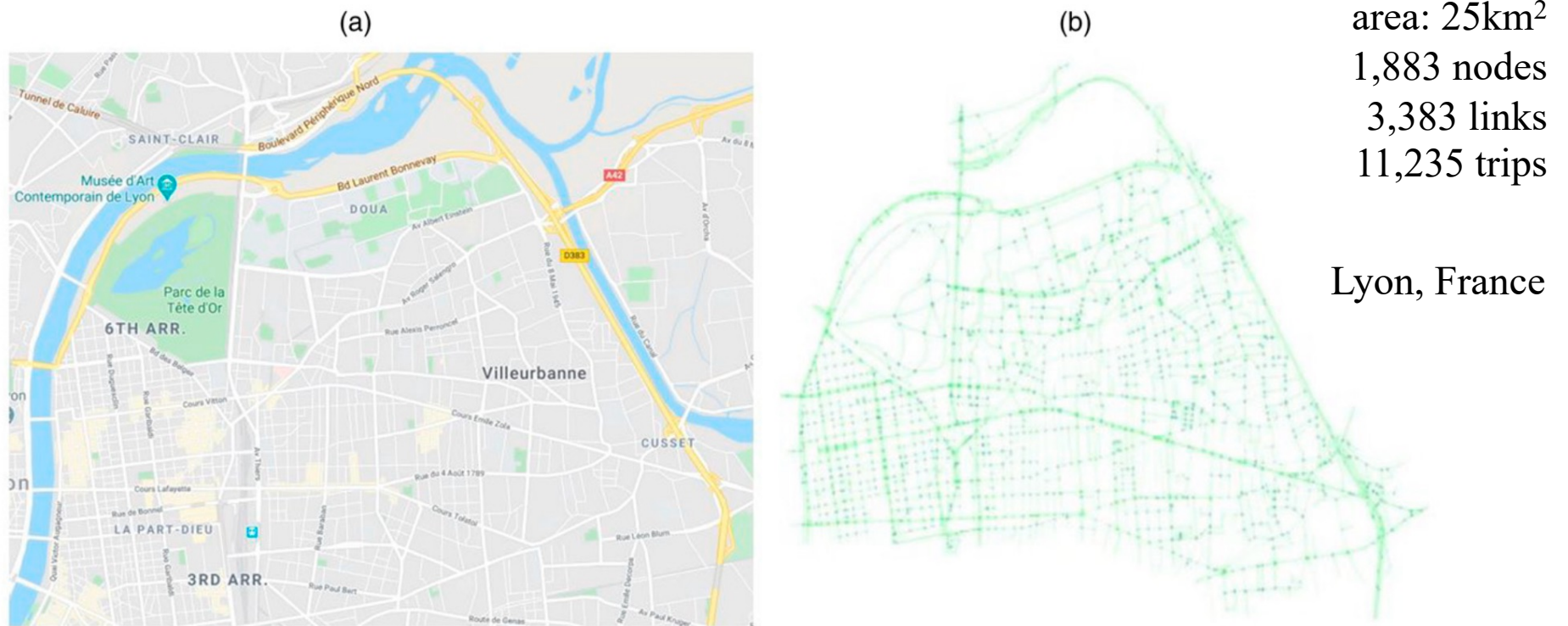


- MFGモデルの方がシステム最適により近い状況が再現できている（混雑が減少されシステム内の速度も上昇）
- MFGカーブはピークを均すことに成功している（オフピーク）

- MFG(proposed)
- Grid search

Case Study at Large Scale

- 実データを用いて検証

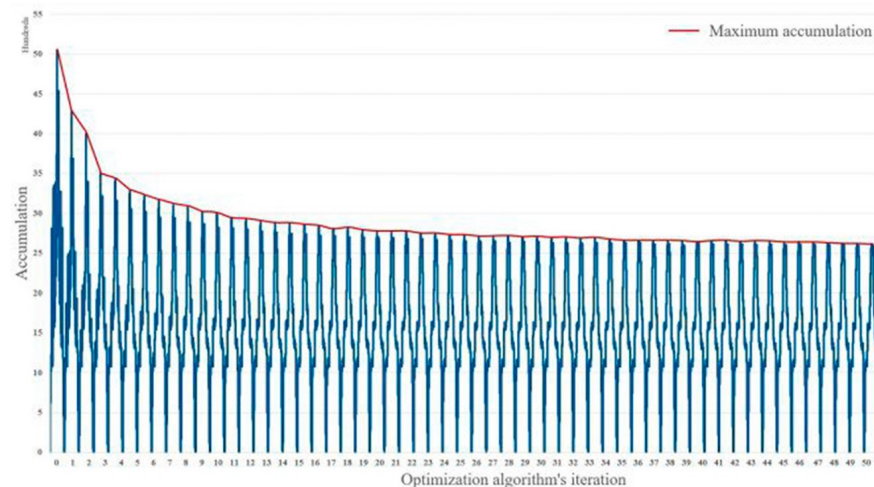


Notes. (a) Mapping data (copyright) Google 2020. (b) The traffic network using microsimulation.

Case Study at Large Scale

- 収束が確認された。大規模NWにおける出発時刻選択の均衡近似解である。

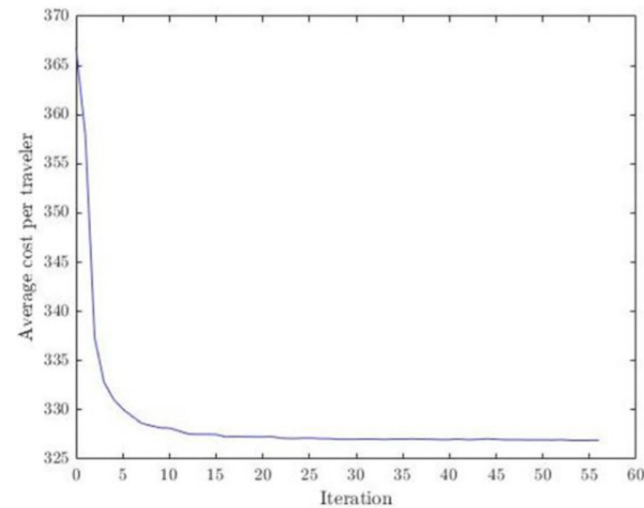
max accumulation



総コスト

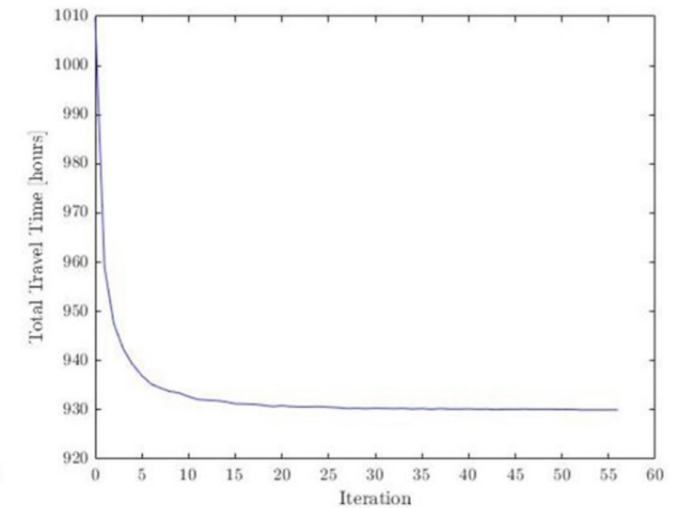
(Color online) Results of the Optimization Process

(a)



総旅行時間

(b)



6. Conclusion

Objective

- 出発時刻選択モデルにおける均衡を平均場ゲーム理論の手法によって定式化

Achievement

- 従来は再現が難しかった希望到着時刻やトリップ長の異質性を加味した一般的なモデルを構築
- 従来モデルに比べて計算性の向上, より最適な解への到達を実現
- 実データでの検証でも収束性を確認

所感

- 測度の話もあり細かく数式を追うのが難しかった
- 自分の研究内容とも近い，というかかなりそのまま関係している．．
 - 6月にかけて実証：広域鉄道網におけるアクティビティパスの選択問題
 - 混雑と出発時刻選択→ポイントインセンティブとの関係，オフピーク