

# Cooperative co-evolutionary algorithm for multi-objective optimization problems with changing decision variables

---

2023/6/14

交通・都市・国土学研究室

M1 須賀理帆

## 要旨

時間とともに決定変数の数が変化する動的多目的最適化問題(DMOP)を解くために、MEE-NSGA-IIと呼ばれる協力的共進化アルゴリズム(CCEA)を提案した。

## 良い点

- 新しい手法で、決定変数のグループ化を正確に行なった。
- 既存のNSGA-IIに環境変化の指標を取り入れて、決定変数の変化を測定。
- NSGA-II, MOPSO, MOEA/DVA, LMEAのアルゴリズムと比較し、MEE-NSGA-IIは最も良い結果となった。

## 悪い点

- 本論文では1度に1つの決定変数を増減する最適化問題のみを考えている。そのため、複数の決定変数の削除や追加が伴う最適化問題には適応できない可能性がある。

## 新規性

- 時間の経過とともに決定変数を変化させる最適化問題に取り組んだ。
- 正確に決定変数をグループ化するために、新たな手法を提案。
- NSGA-IIを拡張させ、環境の変化に伴う決定変数の変化を評価。
- MEE-NSGA-IIを評価するために、新たな指標を取り入れた。

## 有用性

- MEEによる決定変数の分類方法と動的多目的最適化問題のアルゴリズムの組み合わせ

## 信頼度

- 生成距離、反転生成距離、ハイパーボリュームの値を他の5つのアルゴリズムと比較した結果、MEE-NSGA-IIはパレートフロントの収束性と多様性の評価において優れていた。

## 多期間ポートフォリオ選択問題

限られた資金をさまざまな金融資産に合理的に割り当てて、連続するいくつかの期間で最大の収益と最小のリスクのバランスを取る方法。

市場環境の変化に伴い、各期の投資有価証券の種類や割合は現在の市場環境に応じて調整される。

## 目的

時間経過に伴って決定変数の数が変化する動的多目的最適化問題に取り組む  
→パレート集合は変化し、決定変数間の関係の変化が複雑である。

## 手法

協調的共進化アルゴリズム(CCEA) の新たなMEE-NSGA-IIを提案し、  
決定変数を環境の変化に対応させて動的にグループ化する。

## 検証

他の一般的な5つのアルゴリズムとMEE-NSGA-IIを比較

## 結果

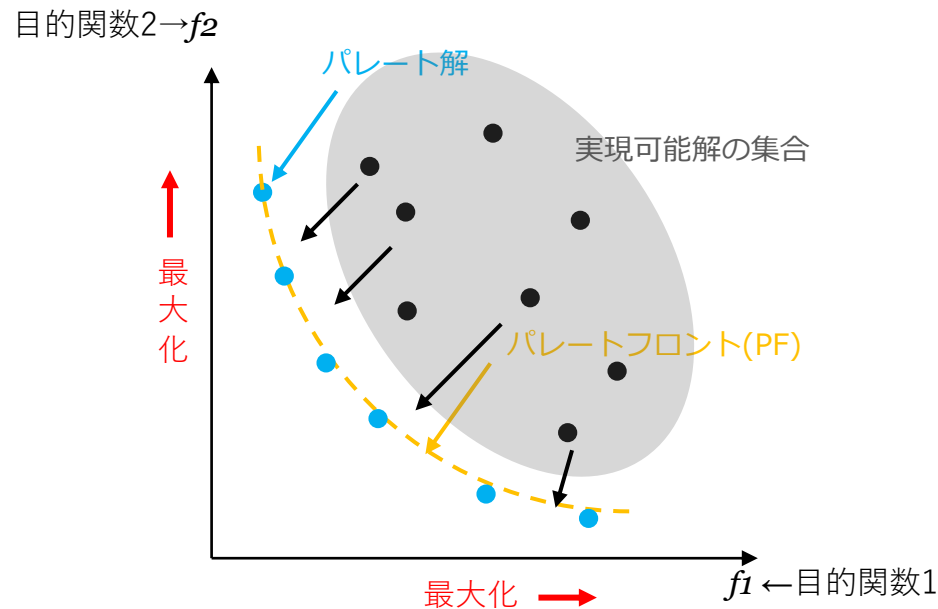
MEE-NSGA-IIは他のアルゴリズムと比べ、パレートフロントの収束性と多様性の  
評価が優れていることがわかった。

1. Introduction
2. Related work
3. The proposed algorithm
4. Experimental study
5. Application in a Multi-period Portfolio Selection Problem
6. Conclusion

# 多目的最適化について

多目的最適化問題は複数の目的関数がトレードオフするため、最適解の集合はパレートフロント上に存在

本論文では、時間経過とともに決定変数の数が変化し、パレート集合もそれに伴って変わる



## 解探索の流れ

1. まずサンプリングした初期デザインを実行
2. 初期デザインの結果から目的関数の値を改善するようなアルゴリズムを決め、実行する。その解析結果を参照し次のデザインを決定
3. 指定した回数の実行が繰り返されると、パレート解が決定
4. 得られたパレート解から選好解を選択し、解の絞り込みを行う。

DMOPに取り組むには、時間依存のPFを追跡したり、多様性のある解を求めて、最適化問題内の条件の変化によって起こる困難を克服する必要がある。

# 既往研究 多目的問題の決定変数の数を変更する研究は行われていない。

## 共進化アルゴリズム

- 意思決定者の好みの情報を分解ベースのMOPに取り込む K. Li, R. Chen, G. Min, X. Yao  
Integration of preferences in decomposition multiobjective optimization
- CC(協調的共進化)の並列処理 K.C. Tan, Y.J. Yang, T.H. Lee  
A distributed cooperative coevolutionary algorithm for multiobjective optimization, in
- 動的競合共進化アルゴリズム C.-K. Goh, K.C. Tan  
A competitive-cooperative coevolutionary paradigm for dynamic multiobjective optimization

## 大規模多目的最適化問題のアプローチ

- LMEA(大規模多目的最適化の進化的アルゴリズム) C.-K. Goh, K.C. Tan  
A competitive-cooperative coevolutionary paradigm for dynamic multiobjective optimization
- MOEA/DVA(大規模MOP向けの決定変数分析) Z. Liang, S. Zheng, Z. Zhua, S. Yang  
Hybrid of memory and prediction strategies for dynamic multiobjective optimization

## 決定変数のグループ化手法

- DG, DG2, GDG, RDGなどの決定変数のグループ化手法はあるが、決定変数の変更に関連する問題に適応することができない。最適化問題の変化に応じて決定変数のグループを調整するメカニズムはない。

Cooperative co-evolution with differential grouping for large scale optimization (M.N. Omidvar, X. Li, Y. Mei, X. Yao)  
Y. Mei, M.N. Omidvar, X. Li, X. Yao, A competitive divide-and-conquer algorithm for unconstrained large-scale black-box optimization, ACM Transactions on Mathematical Software  
DG2: A faster and more accurate differential grouping for large-scale black-box optimization(M.N. Omidvar, M. Yang, Y. Mei, X. Li, X. Yao)



# 決定変数の変化によるMOPの課題

## 本研究の問題

1度に 1 つの決定変数が増加または減少する多目的最適化問題。

\* 複数の決定変数が同時に変更された場合、それらを個別に処理できる

## 課題

決定変数の次元が増加するにつれて、元のMOPの最適解は新しい最適問題にとって最適ではなくなる。



## 3つの理由

- 問題が変化するにつれてMOPの**最適解が変化**するため。
- 元の問題の**最適解の次元が不十分**であり、新しい問題には実行不可能であるため。
- 決定変数の数が減少すると、元の問題に対する最適解が変化し、元の問題の**収束が低下**する可能性があるため。

# 新たに提案された協調的共進化アルゴリズム(CCEA)

## 追加された新たな機能

- (1)新しい方法を採用して、決定変数を正確にグループ化
- (2)決定変数の変化に対応するために改善された戦略を提案
- (3)部分集団の個体を評価するハイブリッド戦略の詳細
- (4)提示されたアルゴリズムのパフォーマンスを反映するために 4 つの新しい指標を採用し、提案されたアルゴリズムに対するさまざまな戦略の影響を調査するために実験を拡張する

# 決定変数が変化する多目的最小化問題

## 定式化

$$\begin{aligned} \min F(X(t)) &= (f_1(X(t)), f_2(X(t)), \dots, f_M(X(t))) \\ \text{s.t. } \begin{cases} g_i(X(t)) \leq 0, & i = 1, 2, \dots, q \\ h_j(X(t)) = 0, & j = 1, 2, \dots, s \\ X(t) \in [X_{\min}(t), X_{\max}(t)] \end{cases} \end{aligned}$$

$f(\bullet)$  : 最小化される  $M$  個の目的からなるセット  
 $X(t) = (\omega_1(t)x_1, \omega_2(t)x_2, \dots, \omega_D(t)x_D)$  : 最大  $D$  個の決定変数を含む決定ベクトル  
 $\omega_k(t)$  : 制御パラメータ。  
(= 1 のとき、時間  $t$  における  $k$  番目の成分  $x_k$  は最適化問題の決定変数の 1 つ。  
そうでないとき = 0)

## 2 種類の最適化問題に分けられる

- 1 環境に伴い  $\omega_k(t)$  の値が変化することで、決定変数の次元が増加または減少する DMOP。
- 2 パラメータ  $t$  が変化しても決定変数の次元が変わらない場合、問題は従来の定常の DMOP とみなされる。

## 上記 2 種類の最適化問題の違い

- 本研究の MOP は決定変数が変化しており、決定変数の数の変動により **決定変数間の関係** が変化
- 決定変数が変化する MOP の場合、決定変数の次元の変化に応じて **PS は 2 つの方法で変化** する。
  1. 元の各決定変数の真の値は変化せず、**追加の決定変数** によって真の PS が変化。
  2. 最適化問題が変化するにつれて、少なくとも 1 つの元の **決定変数の真の値が変化**。  
→ 従来の DMOP と比較して、ここで考慮する問題の PS 変更は複雑。

# 提案された決定変数グループ化アルゴリズム

## 決定変数が変化するMOPを効率的に処理するための決定変数の動的グループ化に基づくCCEA

### アルゴリズムの流れ

1. すべての決定変数をいくつかのグループに分割
2. 決定変数を動的にグループ化する戦略。また、進化中に決定変数が変化したときに初期化する部分母集団に対応する戦略。
3. 協力的な共進化を通じて部分母集団内の個人を評価するクラスタリングベースの方法

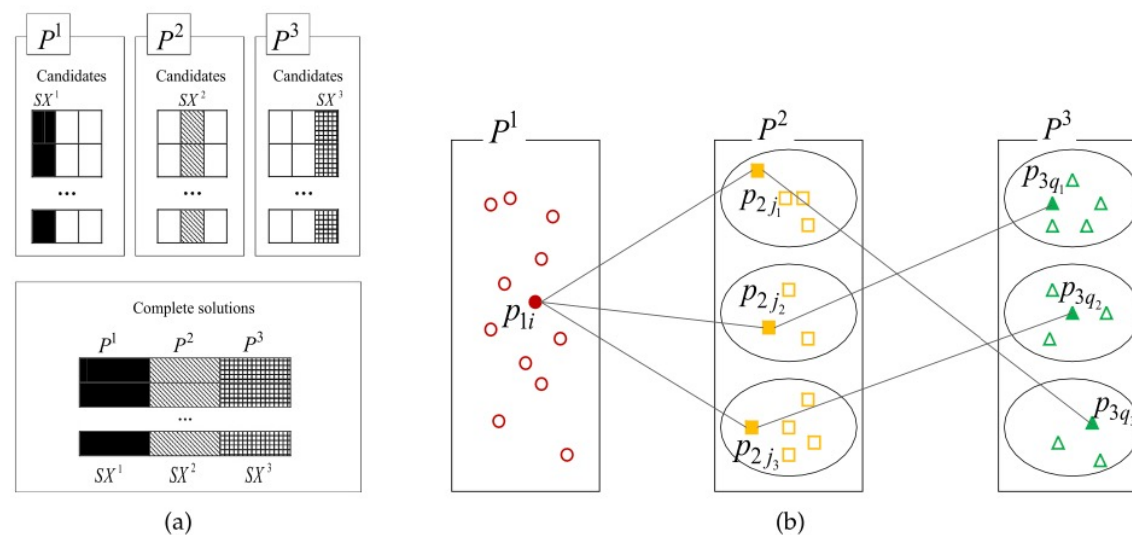


Fig. 2. Process of evaluating an individual in a sub-population.

# 協調的共進化アルゴリズム(CCEA)の枠組み

提示された戦略を従来のMOEAに結合することにより、協力的共進化フレームワークを提示  
→既存の MOEA を NSGA-II 、 SPEA2 、 MOPSOに単純に置き換えることができる。

---

## Algorithm 1: Pseudocode of the proposed framework

---

**Input:** the evolutionary generations,  $Gen$ ;  
**Output:** the archive,  $A(t)$ .

- 1 Grouping the decision variables (Subsection 3.2);
- 2  $t \leftarrow 0, Gen \leftarrow 0$ ;
- 3 Initialize sub-populations;
- 4 **while** *the stop criterion is not satisfied* **do**
- 5     Change examination (Subsection 3.3);
- 6     **if** *the change happens* **then**
- 7          $t \leftarrow t+1$ ;
- 8         Response to the problem change (Subsection 3.4);
- 9     **end**
- 10     Cooperatively co-evolve sub-populations with a pre-existing MOEA (Subsection 3.5);
- 11     Choose non-dominated solutions and save them in  $A(t)$ ;
- 12      $Gen \leftarrow Gen+1$ ;
- 13 **end**
- 14 **return**  $A(t)$

---

### MEE(最大エントロピーエントシス) を使って決定変数を分類

決定変数が一連のグループにグループ化され、異なるグループの決定変数は弱い依存関係を所有。MICにより計算される。

#### Step1 決定変数間の直接相互作用を特定

- $x_i$ と $x_j$ が直接的に相互作用している場合、 $IM_d(i,j) = 1$  (MIC( $(\partial f / \partial x_i), x_j$ )が閾値 $\alpha$ より大きいとき)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{MIC}((\partial f / \partial x_i), x_j) = \lim_{N \rightarrow \infty} \text{MIC}(E) = \lim_{N \rightarrow \infty} \max_{0 < mn < B(N)} \{M(E)_{m,n}\} = 1,$$

- $x_i$ と $x_j$ が間接的に相互作用・独立している場合  $IM_d(i,j) = 0$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{MIC}((\partial f / \partial x_i), x_j) = \lim_{N \rightarrow \infty} \text{MIC}(E) = \lim_{N \rightarrow \infty} \max_{0 < mn < B(N)} \{M(E)_{m,n}\} = 0$$

$f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  微分可能な関数

$N$  : サンプルサイズ

$E$  : ランダムに生成される $N$ サンプルのセット

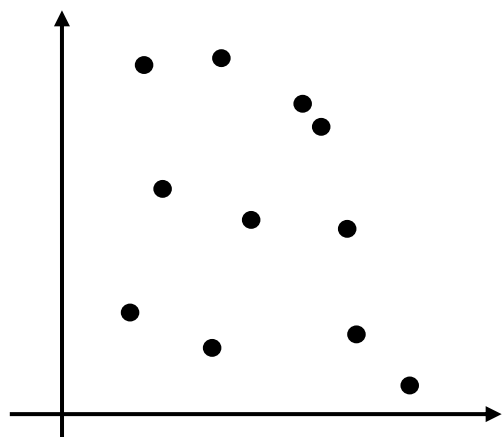
$x_i, x_j$  : 微分可能関数 $f$ 内

# MIC(最大情報係数)

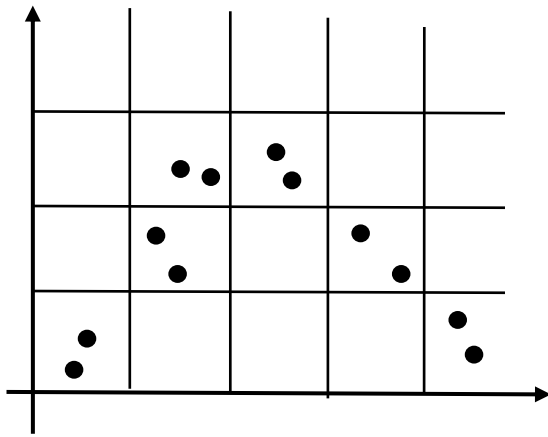
## MI(相互情報量)

- X と Y が共有する情報量の尺度。
- 不確実性の減少量を意味する。
- MIは最大が 1 になるように標準化されている。
- XとYが最も依存していないときMIは最小となる
- XとYが最も依存しているときMIは最大となる

MIが小さい例



MIが大きい例



### <できること>

- 関係性の有無の検出
- 散布図の形状がわかる

## MIC (最大情報量基準)

入力されたデータの空間をさまざまなグリッドに区切り、角グリッドの中で相互情報量(MI)を計算する。その際、2つの変数間の相互情報量(MI)が最大となる区切り方と最大値を探索する。

## 特徴

- 0 ~ 1 の間に収まる。
- 完全な関数形なら必ず 1
- 検定できる
- X~YもY~Xも同じ値になる。

## 手法：MIC(最大情報係数)を使う

入力されたデータの空間をさまざまなグリッドに区切り、角グリッドの中で相互情報量(MI)を計算する。その際、2つの変数間の相互情報量(MI)が最大となる区切り方を探索する。

$E$  の  $m \times n$  の最大MIを特定する式

$$M(E)_{m,n} = \frac{\max(\text{MI})}{\log \min(m, n)}$$

$M(E)$  の最大を表すMICの式  $0 < mn < B(N)$

$$\text{MIC}(E) = \max_{0 < mn < B(N)} \{M(E)_{m,n}\}$$

$E$  : 順序付きペアのセット  $\{(x_i, y_i), i = 1, \dots, N\}$

$G$  :  $E$  を覆う  $m \times n$  のグリッド

( $x$  と  $y$  が  $m \times n$  の間隔に分割されること)

グリッドセルの確率密度関数 : セル内のデータポイントの数に比例

$N$  : サンプルサイズ

$B(N) = N^{0.6}$



## Subsection 3.2 決定変数の初期グループ形成

### Step 2 決定変数間の相互作用を特定

- まず、 $IM_d$  (MICによって計算された情報マトリックス)に従ってインタラクショングラフを作る。  
 $i$ と $j$ が直接接続する場合、 $IM_d(i,j) = 1$
- 次に、優先探索アルゴリズムを利用して強く接続された要素を決定
- 最終的に、特定された強接続要素のすべての点 $i$ と $j$ のペアが接続され、対応する情報行列が直接、間接的な相互作用を持つ。  
 $IM(i,j) = 1$  の場合：決定変数が直接的に相互作用し、同じグループに分類される。  
 $IM(i,j) = 0$  の場合：決定変数が独立。

例)  $f(X) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_4^2, X \in [-1, 1]^4.$

$$IM_d = \begin{bmatrix} - & 1 & 0 & 0 \\ 1 & - & 1 & 0 \\ 0 & 1 & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & - \end{bmatrix}, \quad IM = \begin{bmatrix} - & 1 & 1 & 0 \\ 1 & - & 1 & 0 \\ 1 & 1 & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & - \end{bmatrix}.$$

- 決定変数は  $\{x_1, x_2, x_3\}$  と  $\{x_4\}$  の2つのグループに分類される。
- 各目的の評価の合計数は  $ND(D-1)MEE$  ( $N$ はサンプル数、 $D$ は決定変数の次元)

## Subsection 3.2 決定変数の初期グループ形成

### 先ほどのグループ化方法を多目的最適化問題に適応させる

1.  $IM_d^k$  の  $k$  番目 ( $k=1, 2, \dots, M$ ) の目的を計算する。
2.  $IM_d^k$  の値は  $IM_d$  の下記の式から形成される。  
全ての  $IM_d^k$  を構造化するために使われる。

$$IM_d(i, j) = \max_{k=1, 2, \dots, M} (IM_d^k(i, j)).$$

3. 決定変数の初期グループ  $SX^1, SX^2, \dots, SX^K$  が  $IM$  に基づいて推定される。

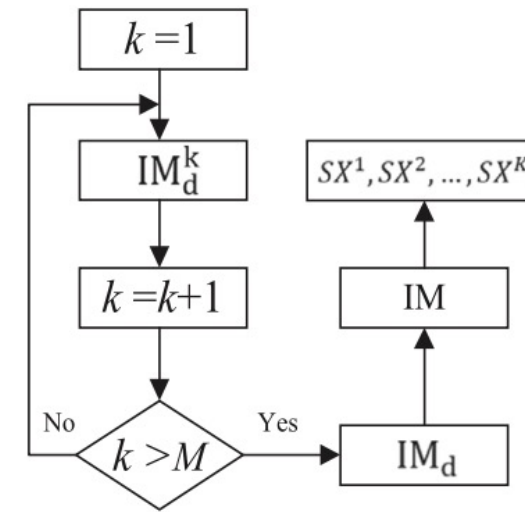


Fig. 1. Flow chart of forming initial groups of decision variables for an MOP.

決定変数の初期グループ形成のフローチャート

### MEE(最大エントロピーエントシス) を使って決定変数を分類

決定変数が一連のグループにグループ化され、異なるグループの決定変数は弱い依存関係を所有

---

**Algorithm 2:** Forming initial groups

---

**Input:** the size of objectives,  $M$ ;

**Output:** the groups of decision variables,  $SX^1, SX^2, \dots, SX^K$ .

- 1 **for**  $k = 1$  to  $M$  **do**
  - 2     For the  $k$ th objective,  $f_k(X)$ , execute the first stage of MEE and an information matrix,  $IM_d^k$ , is obtained;
  - 3 **end**
  - 4 Calculate  $IM_d$  by Eq. (5);
  - 5 Classify the decision variables based on IM, deduced from  $IM_d$ , with the second stage of MEE;
  - 6 **return**  $SX^1, SX^2, \dots, SX^K$
-

## Subsection 3.2 決定変数の初期グループ形成の例

例) 2つの目的問題の決定変数をグループ化する方法について考える

$$\begin{cases} f_1(X) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - 1)^2 + x_3^2 + x_4^2 \cdots \textcircled{1} \\ f_2(X) = x_1^2 - (x_2 - 1)^2 + (x_2 - x_3)^2 - x_4^2 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

上記の2つの目的問題から  $IM_d^1$   $IM_d^2$  がわかる。

$$IM_d^1 = \begin{bmatrix} - & 1 & 0 & 0 \\ 1 & - & 0 & 0 \\ 0 & 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & - \end{bmatrix}, \quad IM_d^2 = \begin{bmatrix} - & 0 & 0 & 0 \\ 0 & - & 1 & 0 \\ 0 & 1 & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & - \end{bmatrix}.$$

$IM_d$  と  $IM$  が求まる。

$$IM_d = \begin{bmatrix} - & 1 & 0 & 0 \\ 1 & - & 1 & 0 \\ 0 & 1 & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & - \end{bmatrix}, \quad IM = \begin{bmatrix} - & 1 & 1 & 0 \\ 1 & - & 1 & 0 \\ 1 & 1 & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & - \end{bmatrix}.$$

$IM$ から決定変数は  $\{x_1, x_2, x_3\}$  と  $\{x_4\}$  の2つのグループに分類される

### 特徴

- 目的は MEE でサンプルを生成するときに間接的に利用される。したがって、これらのサンプルに基づいて取得された決定変数間の相互作用には信頼性がある。
- 決定変数間の相互作用度を提供。
- 相互作用を持つ決定変数を同じグループに配置するため、各部分母集団のサイズが大幅に削減される。
- 関数相関の決定変数を同じグループに識別できるため、分離可能な目的と分離不可能な目的の両方を伴う最適化問題に適している。

## Subsection 3.3 環境の変化を検出する

環境が変化した場合、PFが変動するだけでなく、決定変数の変動による決定変数間の関係も変化するため

### 1. 2つの方法により環境が変化したかどうかを検出する

(1) ランダム性の悪影響を軽減するために、ランダムに選択された 2 つの解が再評価され、決定変数が追加されるかどうかを検出する方法。

- 新しい環境を想定し、ランダムに選択された各解に新しい決定変数を追加します。
- 次に、新しい決定変数には、その実行可能領域内の 2 つの確率値が割り当てられ、選択された各解が 2 つの新しい解に対応する。
- 最後に、選択した各解とそれに対応する新しい解の適合度値が比較され、適応度値が異なる場合、環境が変化したと検出され、新しい決定変数が追加される。

(2) 決定変数が減少したか否かを検出する処理。

- ランダムに選択された解の場合、まず一度 1 つの決定変数の値を妨害する。
- 次に、選択された解と攪乱された解の適応度値が比較される。適応度値が等しい場合（決定変数の値を乱しても適応度値に影響を与えない）乱された決定変数は削除する

## Subsection 3.4 決定変数の変化に対応した戦略

環境(問題)が変化した場合決定変数間の関係を再評価し、決定変数のグループをさらに調整する必要がある

### Algorithm 3: Dynamically adjust the groups of decision variables

MEEに基づき決定変数のグループ化を動的に調整する方法

**Input:** the sizes of objectives and original decision variables,  $M$  and  $D$ , respectively; the information matrix,  $IM_d$ , in the previous environment; the threshold,  $\alpha$ ;  
**Output:** the groups of decision variables,  $SX^1, SX^2, \dots, SX^K$ .

```
1 if a decision variable,  $x_{D+1}$ , is added then
2   Initialize an information matrix,  $IM'_d = \text{zeros}(D + 1, D + 1)$ , and set  $IM'_d(1 : D, 1 : D) = IM_d$ ;
3   for  $k = 1$  to  $M$  do
4     for  $j = 1$  to  $D$  do
5       if  $MIC((\partial f / \partial x_{D+1}), x_j) > \alpha$  then
6          $IM'_d(D+1, j) = 1$  and  $IM'_d(j, D+1) = 1$ ;
7       end
8     end
9   end
10 end
11 if a decision variable,  $x_r$ , is removed then
12   Remove the  $r$ th row and column of  $IM_d$ , denoted as  $IM'_d$ ;
13 end
14 Derive IM from  $IM'_d$  and classify the decision variables with the second stage of MEE;
15 return  $SX^1, SX^2, \dots, SX^K$ 
```

$M$ : 目的の数  
 $D$ : 現在の決定変数の数  
 $x_{D+1}$  : 最適化問題に追加される。  
 $x_r$  : 最適化問題から削除される。

- 元の決定変数間の相互作用は変化しないと仮定。そのため、新しく追加/削除された決定変数と元の決定変数の間のMICのみが計算され、決定変数のグループが調整される。
- MEEは再びグループ化する方法よりも計算負荷が低く、環境変化へのアルゴリズムの応答速度が早い。  
(評価の最大数 : MEE の場合  $2ND$ , 再グループ化の場合  $2/(D-1)$ )

## Subsection 3.4 部分母集団の最適化に対応した戦略

アーカイブ内の異なる個体を使用して、異なるグループに対応する部分母集団を初期化する、多様な決定変数に対応する方法を提案。

- 新たに追加または減少した決定変数の中で影響を受けない決定変数のグループについては、アーカイブ内の個人を高い割合  $\eta$  で採用することで、対応する部分母集団を初期化する。これらのグループは、変更された決定変数との相関が弱いため。
- 他のグループについては、アーカイブ内の低い割合 ( $0.5\eta$ ) の個体を利用して、その部分母集団を初期化する。
- 次のガウス摂動演算子を使用して、各部分母集団の多様性を改善する

$$\underline{x_i(t+1)} = \underline{a_i(t)} + \underline{\varepsilon(t)}$$

時間  $t+1$  における  $i$  番目の個人

ガウスノイズ

アーカイブからランダムに選択された  $i$  番目の非支配的な解

ガウスノイズ

$\varepsilon(t) \sim N(0, \sigma^2(t)I)$  で、集団の多様性を促進するために使われる

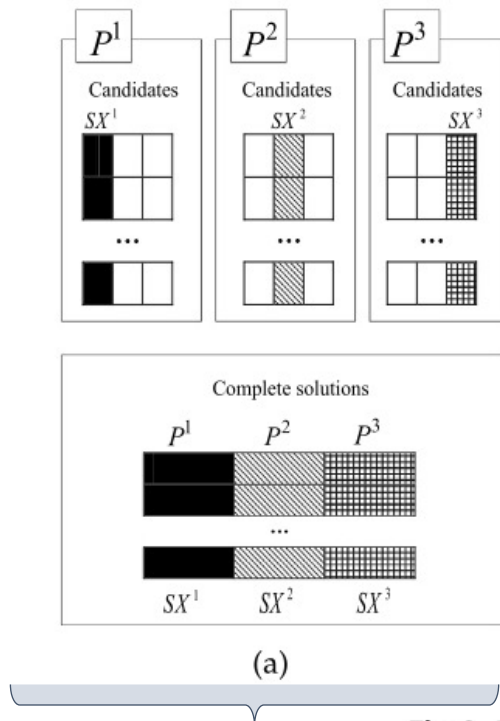


# Subsection 3.5 部分母集団の個体の評価方法の提案

1. 部分母集団の個体をk平均法クラスタリングで、K個のクラスターに分割
2. 他の部分集団の各クラスターから代表的な個体をランダムに選択
3. 評価対象の個体については、他の部分母集団の代表的な個人とランダムに組み合わせることで、K個の完全な解のみが形成
4. K個の完全な解の値が比較され、最適解が評価対象の個人の適応度として考慮する。得られた最適解はアーカイブに保存

例) 3つの部分母集団の代表個体を選択する場合

部分母集団：  
 $p^1, p^2, p^3$



$s_1 = (p_{1i}, p_{2j_1}, p_{3q_3}), s_2 = (p_{1i}, p_{2j_2}, p_{3q_1}), s_3 = (p_{1i}, p_{2j_3}, p_{3q_2})$ .  
を比較し最良のものを選ぶ。(ex.  $s_1$ は $p_1$ の適応度とみなされる)

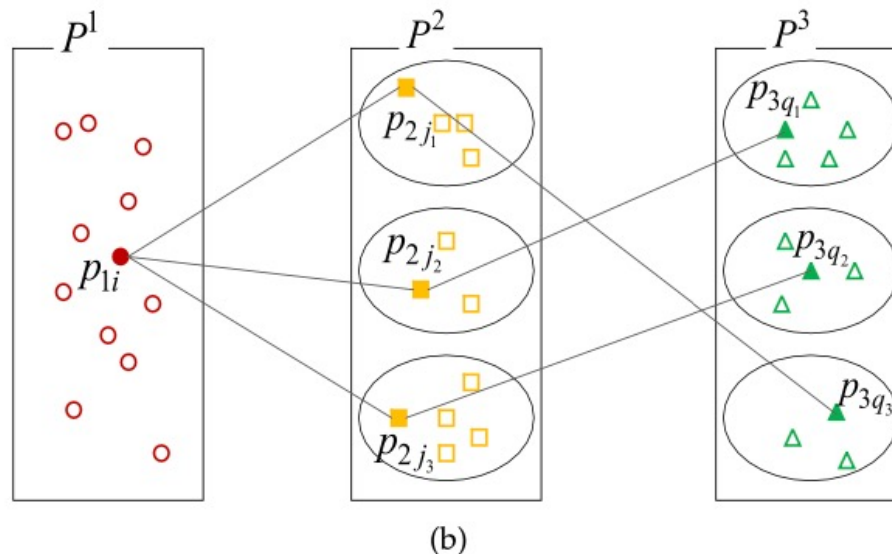


Fig. 2. Process of evaluating an individual in a sub-population.

まず、決定変数を3つのグループに分類：  
 $SX^1 = (x_1^1, x_2^1, \dots, x_{n_1}^1), SX^2 = (x_1^2, x_2^2, \dots, x_{n_2}^2), SX^3 = (x_1^3, x_2^3, \dots, x_{n_3}^3)$ .

各個体の評価  
例). K=3のクラスターするとき  $p^1$ 内のi番目の個体(= $p_{1i}$ )  
を評価する場合。

## *NSGA-II*と*MEE-NSGA-II*の違い

決定変数 $D$ とサンプル数 $N$ は母集団サイズ $P$ より小さい

- (1) 決定変数のグループ化。  $O(MND^2)$
- (3) 環境の変化の検証。  $O(D)$
- (4) 変化への対応。  $O(D)$
- (5) すべての部分集団が協力的に共進化。  $O(P)$
- (6) アーカイブの形成。  $O(MP^2)$

アルゴリズム全体の複雑さは $O(MP^2)$ で、*NSGA-II*と等しい。  
このことから、*MEE-NSGA-II*は計算効率が高いといえる。

# 実験結果

## 他の5つのアルゴリズムとの比較

## 何をしたか

MEE-NSGA-II のパフォーマンスを調査するために、MEE-NSGA-IIを適用して 8 つのベンチマーク最適化問題に取り組み、5 つの一般的なアルゴリズムと比較した。

## 結果として分かったこと

MEE-NSGA-II がほとんどの問題に関して比較アルゴリズムの中で非常に競争力があることを示した。

## 複数期間のポートフォリオ選択問題への適用結果

提案したアルゴリズムでは、時変パレートフロントを迅速に追跡する際に安定したパフォーマンスが得られた。

# アルゴリズムの優位性を説明するために行った4つの実験

1. 多様に変化する環境とグループ化戦略の影響
2. 代表的な解を選択するために提案された戦略の影響を評価
3. *SPEA2*と*MOPSO*の2つの最先端のアルゴリズムとMEEを組み込んだアルゴリズムと比較
4. 提案されたアルゴリズム *MEE-NSGA-II* を、大規模 DMOP に関する*MOEA/DVA* と *LMEA*と比較

# 使用したアルゴリズムと最適化問題情報

## 進化計算アルゴリズム

### *SPEA 2*

複数の目的関数を最適化するために、個体の集団を進化させる。

### *NSGA-II*

非劣解（Pareto最適解）の近似集合を見つけることを目指す。

### *MOEA/DVA*

目的関数を分解し、各目的関数を個別に最適化することで、非劣解集合を近似する。

### *LMEA*

進化計算アルゴリズムの一種であり、制約付き最適化問題を解決するために使用されます。LMEAは、ラグランジュ乗数法を適応的に組み合わせることで、制約条件を考慮しながら解空間を探索する。

### *MOSPO*

単一の粒子を使用して解空間を探索し、複数の目的関数を最適化する。

## 8つのベンチマーク最適化問題

DMOP1 : 2目的の最適化問題,非凹面

DMOP2 : 2目的の最適化問題,凹面

DMOP3 : 2目的の最適化問題,接続

DMOP4 : 2目的の最適化問題,非凹面

DMOP5 : 2目的の最適化問題,凹面

DMOP6 : 3目的の最適化問題, 接続,マルチモーダル

DMOP7 : 3目的の最適化問題,凹面

DMOP8 : 3目的の最適化問題,凹面,マルチモーダル

提案されたアルゴリズムのパフォーマンスを評価するために使われた指標

- GD(生成距離)
- SP(間隔)
- MS(最大分散)
- IGD(反転生成距離)
- HV(ハイパーボリューム)



## DMOPに適応するために指標を改良して扱う

- **MGD(生成距離)** : 解セットの収束を測定。実行ごとのタイムステップ数における GD 値。  
MGD = 0 は、達成された最適解が真の PF に位置していることを表す。

$$MGD = \frac{1}{|T|} \sum_{t \in T} GD(P^{t*}, P^t)$$

- **MSP(間隔)** : 解セットの多様性を測定。
- **MMS(最大分散)** : 真の PF が達成された PF によってどの程度カバーされているか。
- **MIGD(反転生成距離)** :  
収束性におけるアルゴリズムのパフォーマンスの測定。値が小さいほど収束性がある。
- **MHV(ハイパーボリューム)** : 多様性におけるアルゴリズムのパフォーマンスの測定。値が大きいほど多様性が高く優れた解集合である。。

# 提案されたグループ化手法のグループ化精度の経時変化

$(nt, \tau t) = (1, 25)$ 、決定変数の数20、5つの環境変化の場合

## 8つのベンチマーク関数の決定変数をグループ化した場合の実験結果

**Table 1**

Grouping accuracy of the proposed grouping method on 8 benchmark functions in terms of *Recall* over time.

Fun.	0	1	2	3	4	5
DMOP1	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
DMOP2	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
DMOP3	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
DMOP4	1.00	1.00	1.00	0.98	0.99	1.00
DMOP5	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
DMOP6	0.98	0.96	0.99	0.95	0.95	0.96
DMOP7	1.00	0.98	0.95	0.96	0.98	0.98
DMOP8	1.00	1.00	0.99	0.98	0.99	1.00

Recall値  
(グループ化の  
精度、再現率)

## 結果

- 初期段階( $t=0$ )では、*DMOP6*以外のすべてでグループ化メソッドは*Recall*の最大値
- 時間の経過とともに、*DMOP1*、*DMOP2*、*DMOP3*、*DMOP5*は最高値に達成
- *DMOP6*、*DMOP7*、*DMOP8*では1よりわずかに小さい瞬間がある



提案されたグループ化手法は、時間の経過とともに変化する決定変数を正確に分解できる



# ①環境変化の頻度と異なるグループ化戦略の比較

MEE-NSGA-IIはほぼ全ての問題で、多様性と収束において優れたパフォーマンスを発揮する

**Table 2**  
Performance comparisons of different grouping strategies with different change frequencies.

Problem	$(n_t, \tau_t)$	MIGD					MHV					Problem	$(n_t, \tau_t)$	MIGD					MHV				
		NSGA-II	PCC-NSGA-II	UCC-NSGA-II	SCC-NSGA-II	MEE-NSGA-II	NSGA-II	PCC-NSGA-II	UCC-NSGA-II	SCC-NSGA-II	MEE-NSGA-II			NSGA-II	PCC-NSGA-II	UCC-NSGA-II	SCC-NSGA-II	MEE-NSGA-II	NSGA-II	PCC-NSGA-II	UCC-NSGA-II	SCC-NSGA-II	MEE-NSGA-II
DMOP1	(1, 15)	0.0094 (0.0010)†	0.0079 (0.0011)	0.0106 (0.0017)†	0.0078 (0.0010)	<b>0.0073</b> <b>(0.0011)</b>	0.9027 (0.0954)†	0.9192 (0.0989)	0.9019 (0.0956)†	0.9201 (0.0985)	<b>0.9202</b> <b>(0.0984)</b>	DMOP5	(1, 15)	0.0454 (0.0253)	0.1130 (0.0255)†	0.0521 (0.0240)†	<b>0.0442</b> <b>(0.0110)</b>	0.0496 (0.0173)	0.2138 (0.0431)†	0.2235 (0.0775)†	0.2101 (0.0487)†	<b>0.2638</b> <b>(0.0012)</b>	0.2635 (0.0011)
	(1, 20)	0.0087 (0.0038)†	0.0075 (0.0008)	0.0097 (0.0012)†	0.0078 (0.0018)	<b>0.0073</b> <b>(0.0011)</b>	0.9165 (0.0968)	0.9194 (0.0995)	0.9101 (0.0970)	0.9197 (0.0991)	<b>0.9202</b> <b>(0.0986)</b>		(1, 20)	0.4562 (0.0248)†	0.0585 (0.0408)†	<b>0.0417</b> <b>(0.0197)</b>	0.0496 (0.0174)†	0.0493 (0.0176)†	0.2150 (0.0622)†	0.2533 (0.0271)	0.2216 (0.0510)†	0.2630 (0.0019)	<b>0.2636</b> <b>(0.0010)</b>
	(1, 25)	0.0070 (0.0001)	0.0073 (0.0007)	0.0077 (0.0001)†	0.0068 (0.0001)	<b>0.0062</b> <b>(0.0001)</b>	0.9697 (0.0002)†	0.9694 (0.0003)†	0.9683 (0.0006)†	0.9709 (0.0003)†	<b>0.9821</b> <b>(0.0002)</b>		(1, 25)	0.0422 (0.0039)†	0.0410 (0.0002)†	0.0415 (0.0001)†	0.0416 (0.0001)†	<b>0.0359</b> <b>(0.0001)</b>	0.2563 (0.0061)†	0.2575 (0.0004)†	0.2569 (0.0003)†	0.2580 (0.0003)†	<b>0.2671</b> <b>(0.0002)</b>
DMOP2	(1, 15)	0.0075 (0.0014)	0.0080 (0.0009)†	0.0097 (0.0023)†	<b>0.0068</b> <b>(0.0006)</b>	0.0069 (0.0008)	0.2521 (0.0644)†	0.3208 (0.0026)	0.2374 (0.0817)†	0.3255 (0.0017)	<b>0.3258</b> <b>(0.0014)</b>	DMOP6	(1, 15)	0.1933 (0.0449)	0.2378 (0.1478)	0.1944 (0.0712)	0.1725 (0.0629)†	<b>0.1472</b> <b>(0.0274)</b>	0.0461 (0.0094)	0.0280 (0.0026)†	0.0206 (0.0051)†	0.0452 (0.0120)	<b>0.0469</b> <b>(0.0203)</b>
	(1, 20)	0.0077 (0.0017)†	0.0074 (0.0008)	0.0087 (0.0032)†	0.0066 (0.0006)	<b>0.0064</b> <b>(0.0005)</b>	0.2981 (0.0259)†	0.3220 (0.0021)	0.2906 (0.0453)†	0.3251 (0.0016)	0.3251 (0.0018)		(1, 20)	0.1767 (0.0468)†	0.2155 (0.1292)†	0.1821 (0.0510)†	0.1834 (0.0646)†	<b>0.1448</b> <b>(0.0266)</b>	0.0437 (0.0138)†	0.0310 (0.0027)†	0.0430 (0.0094)	0.0412 (0.0227)†	<b>0.0471</b> <b>(0.0105)</b>
	(1, 25)	0.0069 (0.0001)	0.0070 (0.0001)	0.0074 (0.0002)†	0.0073 (0.0001)†	<b>0.0062</b> <b>(0.0002)</b>	0.3226 (0.0005)†	0.3243 (0.0006)	0.3116 (0.0006)†	0.3239 (0.0001)	<b>0.3251</b> <b>(0.0003)</b>		(1, 25)	0.4115 (0.0210)†	0.2311 (0.0260)†	0.1367 (0.0280)†	0.1229 (0.0130)	<b>0.1052</b> <b>(0.0101)</b>	0.0085 (0.0008)†	0.0461 (0.0008)†	0.0293 (0.0019)†	<b>0.0620</b> <b>(0.0007)</b>	0.0615 (0.0030)
DMOP3	(1, 15)	0.0107 (0.0028)†	0.0104 (0.0010)	0.0116 (0.0023)†	0.0103 (0.0009)	<b>0.0092</b> <b>(0.0009)</b>	0.7560 (0.0218)†	0.7713 (0.0028)	0.7506 (0.0302)†	0.7718 (0.0025)	<b>0.7765</b> <b>(0.0025)</b>	DMOP7	(1, 15)	0.0891 (0.0100)†	0.0842 (0.0076)†	0.0993 (0.0106)†	0.0808 (0.0084)†	<b>0.0769</b> <b>(0.0070)</b>	0.5838 (0.2467)†	0.6054 (0.2427)	0.5710 (0.2548)†	<b>0.6561</b> <b>(0.2457)</b>	0.6421 (0.2395)
	(1, 20)	0.0088 (0.0026)	0.0091 (0.0008)	0.0105 (0.0012)†	0.0102 (0.0039)†	<b>0.0090</b> <b>(0.0007)</b>	0.7712 (0.0078)	0.7760 (0.0030)	0.7688 (0.0105)	0.7753 (0.0023)	<b>0.7764</b> <b>(0.0026)</b>		(1, 20)	0.0833 (0.0083)†	0.0809 (0.0070)	0.0957 (0.0102)†	0.0812 (0.0081)†	<b>0.0768</b> <b>(0.0072)</b>	0.6030 (0.2466)†	0.6265 (0.2411)	0.5934 (0.2401)†	0.6396 (0.2465)	<b>0.6549</b> <b>(0.2471)</b>
	(1, 25)	0.0090 (0.0001)†	0.0093 (0.0002)†	0.0095 (0.0002)†	0.0094 (0.0002)†	<b>0.0083</b> <b>(0.0001)</b>	0.7770 (0.0002)†	0.7760 (0.0003)†	0.7751 (0.0005)†	0.7760 (0.0005)†	<b>0.7786</b> <b>(0.0003)</b>		(1, 25)	0.0894 (0.0009)	<b>0.0818</b> <b>(0.0007)</b>	0.0919 (0.0009)	0.0883 (0.0011)	0.0831 (0.0007)	0.7207 (0.0110)†	0.7290 (0.0072)†	0.7377 (0.0134)†	0.7437 (0.0026)†	<b>0.7847</b> <b>(0.0027)</b>
DMOP4	(1, 15)	0.4904 (0.0388)†	0.3847 (0.0461)†	0.3831 (0.0442)†	0.3638 (0.0401)	<b>0.3578</b> <b>(0.0469)</b>	0.3501 (0.2346)†	0.5450 (0.3029)†	0.5309 (0.2272)†	0.7158 (0.0969)	<b>0.7200</b> <b>(0.0986)</b>	DMOP8	(1, 15)	0.5651 (0.0799)†	0.7467 (0.0680)†	0.9780 (0.0529)†	0.5640 (0.3369)†	<b>0.5471</b> <b>(0.0909)</b>	0.0062 (0.0017)†	0.0025 (0.001)†	0.0083 (0.0045)†	<b>0.0742</b> <b>(0.0098)</b>	0.0604 (0.0154)†
	(1, 20)	0.4238 (0.0372)†	0.3524 (0.0434)†	0.3871 (0.0384)†	0.3591 (0.0404)	<b>0.3509</b> <b>(0.0512)</b>	0.3891 (0.2424)†	0.5952 (0.2840)†	0.5842 (0.2339)†	0.6951 (0.1102)†	<b>0.7166</b> <b>(0.0969)</b>		(1, 20)	0.5301 (0.0551)†	0.6978 (0.0590)†	0.9149 (0.0545)†	0.5276 (0.3200)†	<b>0.5137</b> <b>(0.0738)</b>	0.0061 (0.0185)†	0.0027 (0.0011)†	0.0093 (0.0080)†	0.0791 (0.0158)†	<b>0.0861</b> <b>(0.0094)</b>
	(1, 25)	0.4545 (0.0170)	0.3769 (0.0330)	0.3914 (0.0881)	<b>0.2410</b> <b>(0.0341)†</b>	0.4390 (0.0410)	0.2739 (0.0170)†	0.5328 (0.0140)†	0.5805 (0.0937)†	<b>0.7675</b> <b>(0.0190)</b>	0.7611 (0.0002)		(1, 25)	0.5762 (0.0680)†	0.6897 (0.0410)†	0.9070 (0.0190)†	0.5237 (0.0270)†	<b>0.5012</b> <b>(0.0280)</b>	0.0026 (0.0023)†	0.0034 (0.0031)†	0.0041 (0.0030)†	0.0489 (0.0093)†	<b>0.0781</b> <b>(0.0081)</b>

## 結果

- NSGA-IIIは変更頻度に応じてMIGDの変動が大きくなる。
- NSGA-IIを除くアルゴリズムのMIGD値は、変化頻度の増加に伴い、ほぼすべてのテスト問題で小さくなる。
- DMOP1,2では、MIGDに関してNSGA-IIがPCC-NSGA-II, UCC-NSGA-IIを大幅に上回り、不適切な分類方法がアルゴリズムのパフォーマンスを低下させる可能性がある。
- DMOP7の真のPFは、決定変数の数が増減するにつれて変化するため、最適化問題が変化する場合、PFを追跡するのは容易でない。

# DMOP1~DMOP8での30回実行にわたるIGDとHVの平均と時間経過の関係

( $nt, \tau$ ) = (1, 25) のとき

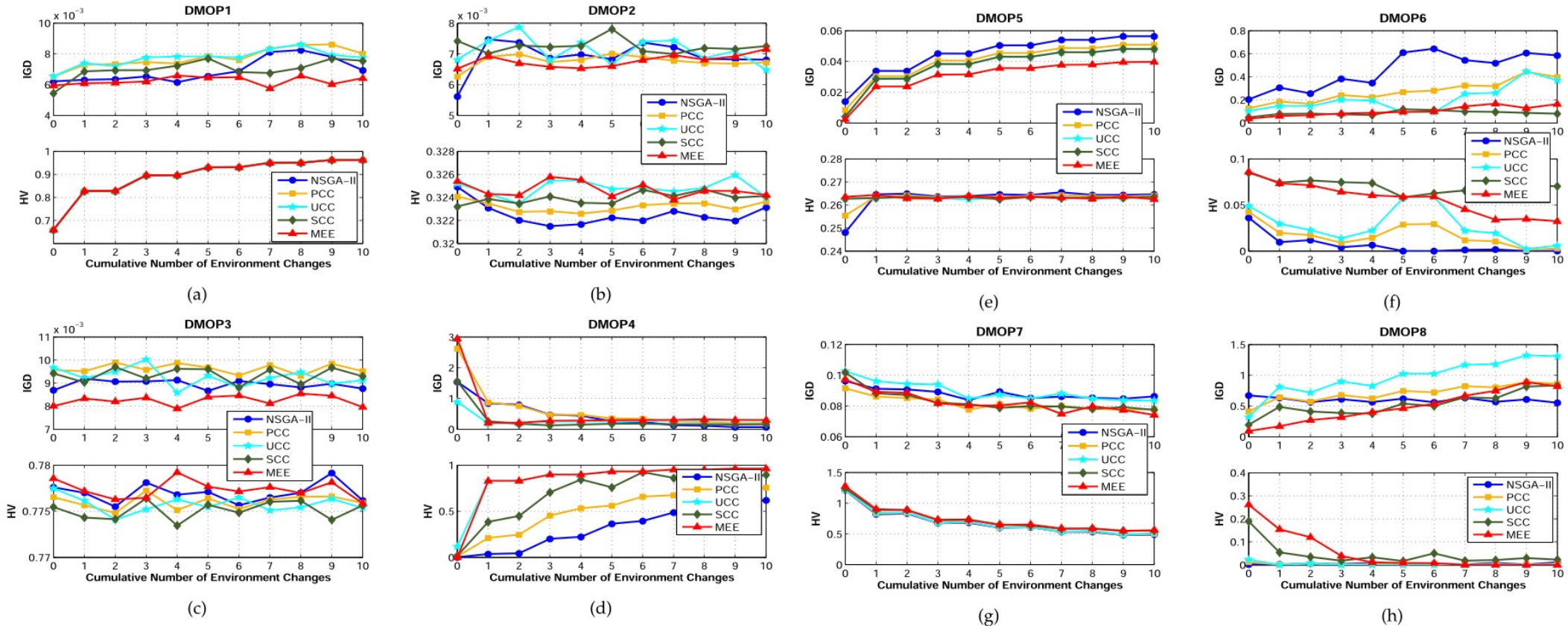


Fig. 3. Averages of IGD and HV over 30 runs versus time on DMOP1-DMOP8.

## DMOP1,2,3

- MEE-NSGA-IIは最適化問題の変更に応じて最小のIGD値をとり、時間依存のPFの追跡において優れている。さらに、IGD値は他のアルゴリズムよりも変動が少なく、強い安定性がある。

## DMOP4

- UCC-NSGA-IIとMEE-NSGA-IIは同じ良好なパフォーマンスを示す。しかし、NSGA-IIはグループ化戦略を採用していないため、パフォーマンスが低く、決定変数の次元が変化したときに真のPFを追跡する効率が低くなる。

## DMOP5

- 最適化問題がどのように変化しても提案手法はロバスト性に優れる。


## ②代表的な解を選択するために提案された3つの戦略の評価を比較

クラスタリングベース戦略は、他のアルゴリズムよりも良いパフォーマンスを示す


**Table 3**

Performance comparisons of different strategies of selecting representative solutions with  $(n_r, \tau_r) = (1, 25)$  and  $\tau = 250$


Problem	Metric	Random-based strategy	Preference-based strategy	Clustering-based strategy
DMOP1	MSP	0.0131 (0.0026)†	0.0116 (0.0028)†	<b>0.0108</b> <b>(0.0022)</b>
	MGD	0.0035 (0.0012)†	0.0022 (0.0013)†	<b>0.0016</b> <b>(0.0009)</b>
	MMS	0.9706 (0.0157)†	0.9944 (0.0148)	<b>0.9999</b> <b>(0.0152)</b>
DMOP2	MSP	0.0102 (0.0015)†	0.01 (0.0021)†	<b>0.0087</b> <b>(0.0013)</b>
	MGD	0.0088 (0.0027)†	0.0057 (0.0016)†	<b>0.0025</b> <b>(0.002)</b>
	MMS	0.9879 (0.0165)	<b>0.9968</b> <b>(0.0126)</b>	0.9676 (0.0104)†
DMOP6	MSP	0.0242 (0.0083)†	<b>0.0195</b> <b>(0.0058)</b>	0.0207 (0.0067)
	MGD	0.3534 (0.2522)†	<b>0.2283</b> <b>(0.1704)</b>	0.2308 (0.1513)
	MMS	1 (0)	1 (0)	1 (0)
DMOP7	MSP	0.0408 (0.0056)	0.0404 (0.0043)	<b>0.0395</b> <b>(0.005)</b>
	MGD	0.0258 (0.0028)†	0.0193 (0.0032)†	<b>0.0158</b> <b>(0.0038)</b>
	MMS	1 (0)	1 (0)	1 (0)



ランダムベース戦略



優先ベース戦略



クラスタリングベース戦略

### ③MOPSO、SPEA2とMEEを組み込んだアルゴリズムとの比較

MEE-MOPSOとMEE-SPEA2がは良好なパフォーマンスを示し、収束性と多様性が優れている

**Table 4**

The experimental results in terms of the MIGD and MHV metrics of MOPSO, SPEA2, MEE-MOPSO and MEE-SPEA2

Problem	MIGD				MHV			
	MOPSO	SPEA2	MEE-MOPSO	MEE-SPEA2	MOPSO	SPEA2	MEE-MOPSO	MEE-SPEA2
DMOP1	0.0074 (0.0003)†	0.0075 (0.0002)†	<b>0.0062</b> <b>(0.0001)</b>	0.0071 (0.0003)	0.8699 (0.0003)	0.7831 (0.0003)†	<b>0.8800</b> <b>(0.0005)</b>	0.8702 (0.0003)
DMOP2	0.0071 (0.0002)†	0.0070 (0.0002)†	<b>0.0061</b> <b>(0.0001)</b>	0.0070 (0.0003)	0.3230 (0.0005)	0.2925 (0.0003)	0.3241 (0.0007)	<b>0.3243</b> <b>(0.0007)</b>
DMOP3	0.0093 (0.0002)†	0.0092 (0.0002)†	<b>0.0054</b> <b>(0.0001)</b>	0.0089 (0.0001)†	0.7754 (0.0006)	0.6985 (0.0004)†	<b>0.7773</b> <b>(0.0003)</b>	0.7770 (0.0006)
DMOP4	0.3489 (0.0930)†	0.4891 (0.0501)†	0.4352 (0.0226)†	<b>0.2021</b> <b>(0.0370)</b>	0.2994 (0.0224)†	0.7212 (0.0218)	0.6690 (0.0990)†	<b>0.7608</b> <b>(0.0002)</b>
DMOP5	0.0406 (0.0001)	0.0412 (0.0026)	<b>0.0406</b> <b>(0.0001)</b>	0.0406 (0.0001)	0.2631 (0.0003)	0.2368 (0.0002)	0.2628 (0.0010)	<b>0.2632</b> <b>(0.0042)</b>
DMOP6	0.2354 (0.0265)†	0.3778 (0.0264)†	0.1203 (0.0106)†	<b>0.0791</b> <b>(0.0042)</b>	0.0323 (0.0039)†	0.0102 (0.0019)†	0.0574 (0.0035)	<b>0.0655</b> <b>(0.0014)</b>
DMOP7	0.0882 (0.0040)	0.0878 (0.0017)	<b>0.0827</b> <b>(0.0008)</b>	0.0839 (0.0012)	0.7487 (0.0191)	0.6981 (0.0027)†	<b>0.7806</b> <b>(0.0034)</b>	0.7287 (0.0106)
DMOP8	0.9313 (0.1057)†	0.4524 (0.0873)†	0.5487 (0.0560)†	<b>0.3742</b> <b>(0.0221)</b>	0.0101 (0.0072)†	0.0579 (0.0107)	<b>0.0660</b> <b>(0.0135)</b>	0.0573 (0.0193)

#### 結果/考察

- DMOP5、DMOP7の4つのアルゴリズム間でMIGDとMHVメトリクスの点で大きな違いはないが、MEE-MOPSOおよびMEE-SPEA2が最も低いMIGD値をとる。その理由は、提示された応答戦略が、DMOP5、DMOP7変化の真のパレート最適セットが変化する決定変数の数の影響を受けにくいと考えられる。

## ④ 8つの問題に対してMEE-NSGA-IIをMOEA/DVA、LMEAと比較

MEE-NSGA-IIはMOEA/DVA, LMEAよりも収束と多様性のパフォーマンスが優れている

**Table 5**

The values of MIGD and MHV obtained by MOEA/DVA, LMEA and MEE-NSGA-II.

Problem	MIGD			MHV		
	MOEA/DVA	LMEA	MEE-NSGA-II	MOEA/DVA	LMEA	MEE-NSGA-II
DMOP1	0.0408 (0.0002)†	0.0414 (0.0002)†	<b>0.0394</b> <b>(0.0002)</b>	<b>0.4799</b> <b>(0.0018)</b>	0.4797 (0.0012)	0.4798 (0.0013)
DMOP2	0.0406 (0.0003)	0.0407 (0.0002)	<b>0.0393</b> <b>(0.0001)</b>	0.2158 (0.0004)†	0.2145 (0.0006)†	<b>0.2165</b> <b>(0.0000)</b>
DMOP3	0.0452 (0.0004)†	0.0453 (0.0002)†	<b>0.0426</b> <b>(0.0001)</b>	0.4329 (0.0002)†	0.4338 (0.0001)†	<b>0.4432</b> <b>(0.0001)</b>
DMOP4	<b>0.0426</b> <b>(0.0001)</b>	0.0455 (0.0001)†	0.0444 (0.0003)†	<b>0.1804</b> <b>(0.0001)</b>	0.1773 (0.0006)†	0.1796 (0.0004)†
DMOP5	0.8173 (0.0105)†	<b>0.2686</b> <b>(0.0040)</b>	0.3102 (0.0098)†	0.0156 (0.0009)†	0.0360 (0.0003)†	<b>0.0394</b> <b>(0.0004)</b>
DMOP6	0.4964 (0.0226)†	<b>0.1232</b> <b>(0.0049)</b>	0.1881 (0.0041)†	0.0235 (0.0018)†	<b>0.0478</b> <b>(0.0007)</b>	0.0395 (0.0011)†
DMOP7	0.1336 (0.0017)†	0.1271 (0.0017)	<b>0.1244</b> <b>(0.0006)</b>	0.4898 (0.0097)†	0.5154 (0.0011)	<b>0.5159</b> <b>(0.0018)</b>
DMOP8	0.1798 (0.0012)†	<b>0.1703</b> <b>(0.0012)</b>	0.1710 (0.0020)	0.4015 (0.0026)†	<b>0.4289</b> <b>(0.0016)</b>	0.4266 (0.0017)

### 結果/考察

- MOEA/DVAやLMEAは、決定変数間の相関関係を再調査するときに大量の関数評価を消費し、最適化問題が変化したときにグループをさらに調整するため、DMOPの要件を満たすことが困難であると示される。
- MEE-NSGA-IIでは多数の関数評価が節約され、収束と多様性のパフォーマンスを向上させる。部分母集団によって提供される情報は十分に活用され、最適化問題の変化に応じて初期グループが局所的に調整される。

# 複数期間のポートフォリオ選択問題への適用

投資家が適切な意思決定を行えるようにするために、変化する意思決定変数を使用した二目的最適化モデルとしてダイナミクスを使用して問題を定式化

## 二目的最適化モデルの定式

$$\begin{aligned} & \min(-R(x(t), r(t)), Q(x(t), q(t))) \\ & \text{s.t. } \sum_{i=1}^n x_{i,t} = 1, x_{i,t} \geq 0, \quad t = 1, 2, \dots, T. \end{aligned}$$

$x_{i,t}$ :  $t$ 期における*i*番目の証券の投資割合

第*t*期間における期待収益率

$$R(x(t), \underline{r(t)}) = \sum_{i=1}^n r_{t,i} x_{t,i} - \sum_{i=1}^n \underline{a_{t,i}} |x_{t,i} - x_{t-1,i}| + r_{t,0} x_{t,0}$$

第*t*期間におけるリスク損失率

$$Q(x(t), \underline{q(t)}) = \sum_{i=1}^n q_{t,i} x_{t,i}. \quad \text{パラメータ}$$

ポートフォリオ選択問題におけるさまざまなアルゴリズムとの比較

**Table 6**  
Comparisons of different algorithms on the portfolio selection problem.

Metric	NSGA-II	SPEA2	MOEA/DVA	LMEA	MEE-NSGA-II
MHV (std.)	0.0073 (0.00020)†	0.0072 (0.00017)†	0.0070 (0.00017)†	0.0072 (0.00018)†	<b>0.0077</b> <b>(0.00013)</b>

## 結果

- *MEE-NSGA-II*はアルゴリズムの中で最良のMHV値である。
- *MEE-NSGA-II*は他のアルゴリズムよりも標準偏差が小さい。

# 複数期間のポートフォリオ選択問題への適用

MEE-NSGA-IIは収束性と多様性において優れたパフォーマンスを備えたパレート最適セットを達成する

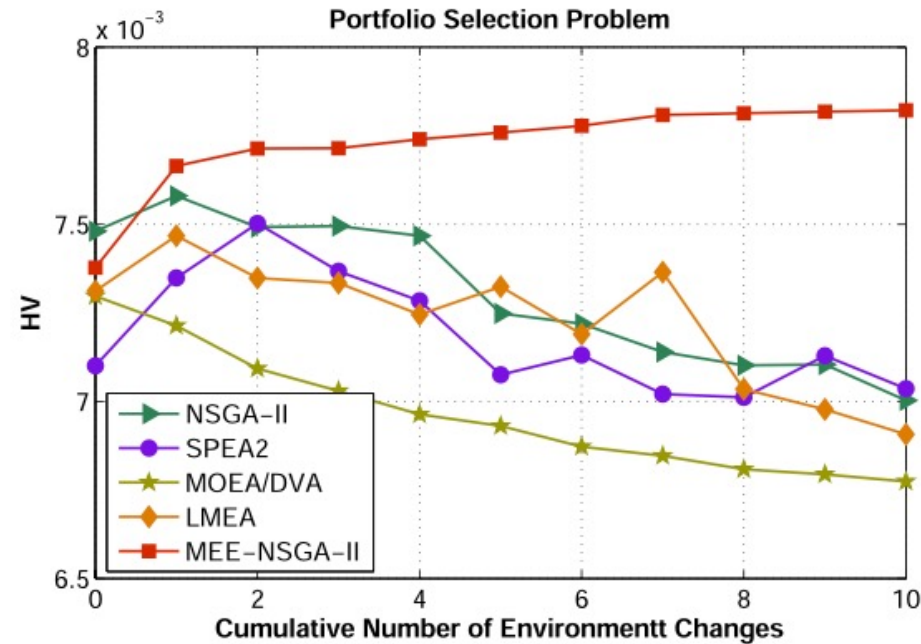


Fig. 4. Average of HV over 20 runs versus time on the portfolio selection problem.

20 回の実行にわたる HV の平均とポートフォリオ選択問題の時間

## 結果/考察

- MEE-NSGA-IIは、 $t=0$ において最良のHV値を達成していないが、 $t=2$ 以降では最良のHV値に達している。
- MEE-NSGA-IIは時間変化するパレートフロントを急速に追跡する場合でも安定したパフォーマンスを発揮する。



## まとめ

- さまざまな決定変数を使用してDMOPを解決するために、MEEに従って変数を動的に分類するMEE-NSGA-IIを提示した。
- 他の分解方法とは対照的に提案されたMEEベースの方法は、各部分母集団を効率的に進化させることを目的として、依存性の高い変数が同じグループに割り当てられる。
- MEE-NSGA-IIでは、さまざまな決定変数に対応する方法が提案された。
- 実験結果、MEE-NSGA-II がほとんどの問題に関して比較アルゴリズムの中で非常に競争力があることを示した。

## 課題と発展性

- 本論文では、一度に1つの決定変数を増減する最適化問題のみを考慮するが、複数の決定変数の削除や他の変数の同時追加など、他の特性を伴う動的最適化の問題が発生する可能性がある。
- 変更の頻度や決定変数の追加/削減数も不規則である可能性がある。

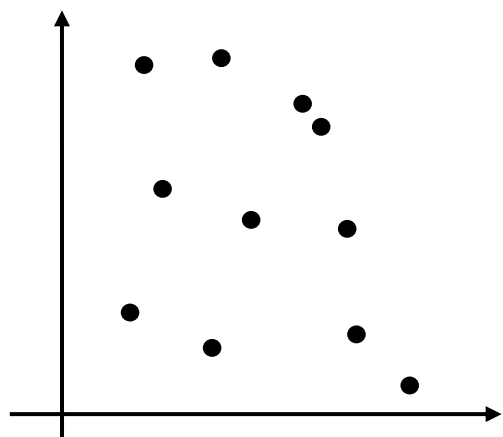
# 補足資料

# MIC(最大情報係数)

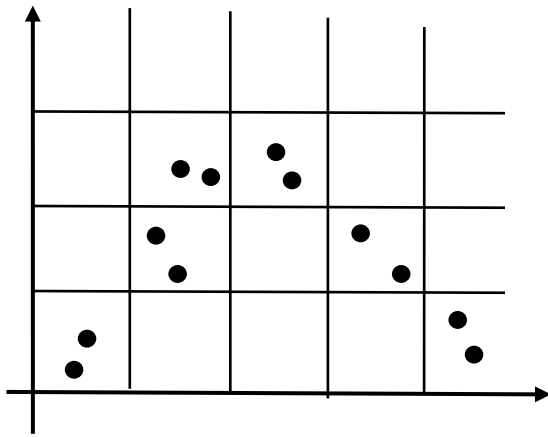
## MI(相互情報量)

- X と Y が共有する情報量の尺度。
- 不確実性の減少量を意味する。
- MIは最大が 1 になるように標準化されている。
- XとYが最も依存していないときMIは最小となる
- XとYが最も依存しているときMIは最大となる

MIが小さい例



MIが大きい例



## MIC (最大情報量基準)

入力されたデータの空間をさまざまなグリッドに区切り、角グリッドの中で相互情報量(MI)を計算する。その際、2つの変数間の相互情報量(MI)が最大となる区切り方と最大値を探索する。

## 特徴

- 0 ~ 1 の間に収まる。
- 完全な関数形なら必ず 1
- 検定できる
- X~YもY~Xも同じ値になる。

## <できること>

- 関係性の有無の検出
- 散布図の形状がわかる

# パフォーマンス指標

提案されたアルゴリズムのパフォーマンスを評価するために使われた指標

## GD(生成距離)

- パレートフロントと実際の解集合との間の距離を評価するための指標。解集合がパレートフロントにどれだけ近いかを表す尺度。距離の平均または総和を求めることで算出される。小さいほど、解集合がパレートフロントに近くなる。

## SP(間隔)

## MS(最大分散)

## IGD(反転生成距離)

- 2つの順列の間の距離を測るための指標。1つの順列をもう一方の順列に変換するために必要な最小の操作回数。順列の並び替えにおける類似度や距離を測る。

## HV(ハイパーボリューム)

- 目的関数空間上で解集合によって優越される領域の面積や体積パレート解集合が支配している空間を表す手法。解が大きいほど多くの空間を支配しており、優れた解集合であることを意味する。

# NSGA-II

- 1.初期集団の生成: 問題の制約条件を満たすように、ランダムな個体の集団を生成します。
- 2.支配度の計算: 各個体について、他の個体に対する支配度を計算します。個体Aが個体Bを支配するとは、個体Aがすべての目的関数で個体Bよりも優れていることを意味します。この計算により、個体の優越度が評価されます。
- 3.ランキングと非劣解の選択: 支配されていない個体を特定し、それらをランキングします。ランク1の個体は非劣解であり、解の近似集合に含まれます。次に、次のランクの個体を特定し、順次ランキングを行います。
- 4.選択と交叉: ランキングされた個体から親個体を選択し、交叉操作を適用して新たな子個体を生成します。交叉により、親個体の特徴が組み合わせられ、多様性のある子個体が生成されます。
- 5.突然変異: 一部の子個体に対して突然変異操作を適用し、新たな解候補を生成します。突然変異は、解空間を探索するためのランダムな変化をもたらします。
- 6.新しい集団の生成: 選択された子個体と突然変異によって生成された個体を組み合わせて、新しい集団を生成します。
- 7.次世代の選択: 次世代の集団を形成するために、現世代と新しい集団を組み合わせます。次世代の選択では、非劣解を優先的に選択し、個体の多様性を保持します。
- 8.収束判定: 収束条件が満たされるまで、手順4から7を繰り返します。

# MOEA/DVA

1. 問題の分解: 多目的最適化問題の各目的関数を独立して最適化するために、問題を分解します。各目的関数は、重みベクトルによって表されます。
  2. 初期集団の生成: 初期個体集団をランダムに生成します。個体の数は、解の多様性と探索範囲に基づいて設定されます。
  3. 子個体の生成: 各個体に対して、近傍個体の集合を形成します。近傍個体は、解空間での距離やトポロジーに基づいて選択されます。近傍個体を利用して、親個体から子個体を生成します。
  4. 子個体の評価: 子個体の目的関数値を計算し、各子個体のパフォーマンスを評価します。
  5. 親個体の更新: 子個体と親個体を比較し、非劣解を選択して親個体を更新します。MOEA/D-VAでは、個体の評価にベクトル角度を使用し、最も近い目的関数空間の重みベクトルに対して優れた個体を選択します。
  6. 収束判定: 収束基準が満たされるか、事前に定義された世代数に到達するまで、手順3から5を繰り返します。収束基準は、解集合の多様性や目的関数の収束度に基づいて設定されます。
- MOEA/D-VAは、問題を分解することによって、個別の目的関数を最適化し、多目的最適化問題の解集合を効果的に探索します。ベクトル角度に基づく評価と選択手法により、非劣解集合の多様性と収束性を向上させることができます。

# LMEA

1. 初期集団の生成: 制約条件を満たすように、ランダムな個体の集団を生成します。
2. 目的関数と制約条件の評価: 各個体について、目的関数値と制約条件の評価を行います。目的関数値は最小化または最大化することを目指し、制約条件は制約を満たしているかどうかを判定します。
3. ラグランジュ乗数の更新: 制約違反のある個体に対して、ラグランジュ乗数を更新します。ラグランジュ乗数は、目的関数値と制約条件のバランスを取るために使用されます。制約違反がある個体ほど、対応するラグランジュ乗数が大きくなります。
4. 検証制約関数の導入: ラグランジュ乗数を考慮した検証制約関数を導入し、目的関数と制約条件の組み合わせを評価します。これにより、ラグランジュ乗数の影響を受けた適応度が計算されます。
5. 選択と交叉・突然変異: 適応度に基づいて個体を選択し、交叉や突然変異操作を適用して新たな子個体を生成します。子個体は、制約条件を満たすように制約修復手法を用いて調整されます。
6. 新しい集団の生成: 選択された子個体と親個体を組み合わせて、新しい個体集団を生成します。
7. 収束判定: 収束条件が満たされるまで、手順2から6を繰り返します。収束条件は、解集合の多様性や目的関数の収束度に基づいて設定されます。

# MOSPO

1. 初期解の生成: 問題の制約条件を満たすように、ランダムな初期解を生成します。初期解は、解空間内のある点を表します。
  2. 解の評価: 各初期解について、複数の目的関数値を計算します。目的関数は、最小化または最大化することを目指します。
  3. 適応度の計算: 各初期解に対して、適応度を計算します。適応度は、解の目的関数値と他の解との距離に基づいて決定されます。距離が近いほど、適応度が高くなります。
  4. 選択と更新: 適応度に基づいて、初期解を選択し、現在の解として更新します。選択された解は、次の世代で使用されます。
  5. 解の更新: 更新された解を基に、新たな解を生成します。これには、解の周囲の領域を探索する手法が使用されます。解の更新には、速度や方向の制約などの考慮も含まれます。
  6. 収束判定: 収束条件が満たされるまで、手順2から5を繰り返します。収束条件は、解集合の多様性や目的関数の収束度に基づいて設定されます。
- MOSPOは、単一の粒子を使用して解空間を探索するため、他の進化計算アルゴリズムと比べて計算効率が高いとされています。しかし、個体の多様性や探索範囲の制約に注意が必要です。



# SPEA2

- 1.初期集団の生成: 問題の制約条件を満たすように、ランダムな個体の集団を生成します。
- 2.支配度の計算: 各個体について、他の個体に対する支配度を計算します。個体Aが個体Bを支配するとは、個体Aがすべての目的関数で個体Bよりも優れていることを意味します。この計算により、個体の優越度が評価されます。
- 3.環境適応度の計算: 各個体について、その個体が他の個体にどれだけ支配されているかを評価します。個体の環境適応度は、支配された回数によって減少し、支配した回数によって増加します。環境適応度は、個体が集団内でどれだけ優れているかを示す指標となります。
- 4.非劣解の選択: 環境適応度の高い個体から順に選択し、非劣解集合（非支配解の集合）を構築します。非劣解集合には、最適解の候補が含まれます。
- 5.選択と交叉: 非劣解集合から親個体を選択し、交叉操作を適用して新たな子個体を生成します。交叉により、親個体の特徴が組み合わされ、多様性のある子個体が生成されます。
- 6.突然変異: 一部の子個体に対して突然変異操作を適用し、新たな解候補を生成します。突然変異は、解空間を探索するためのランダムな変化をもたらします。
- 7.新しい集団の生成: 選択された子個体と突然変異によって生成された個体を組み合わせて、新しい集団を生成します。
- 8.収束判定: 収束条件が満たされるまで、手順

# 実験の概要

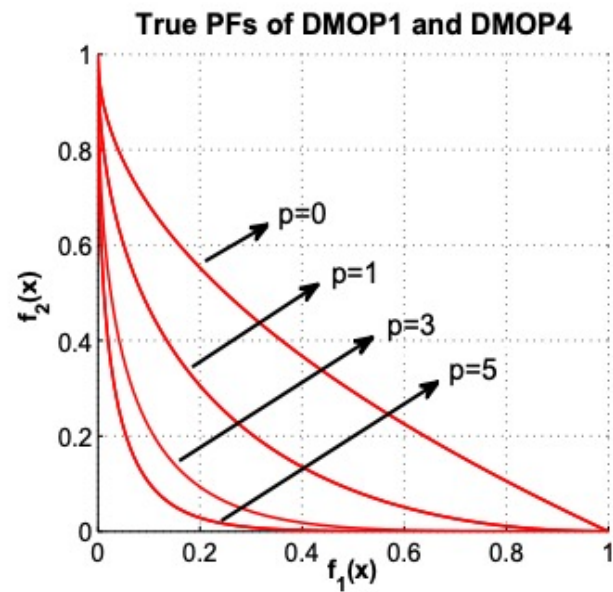
- 各最適化問題について  $t = \frac{1}{n_t} \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_t} \right\rfloor$
- $n_t$ : 変更の重大度,  $\tau_t$ : 変更の頻度  
 $(n_t, \tau_t) = (1, 15), (1, 20), (1, 25)$   $\tau$ (反復の最大数) = 150, 200, 250
- 決定変数の数 : 200
- 各アルゴリズムは各ベンチマーク問題で独立して 30 回実行され、次の時点でアルゴリズムが終了
- 有意水準 0.05

# DMOP 1 ~ 8

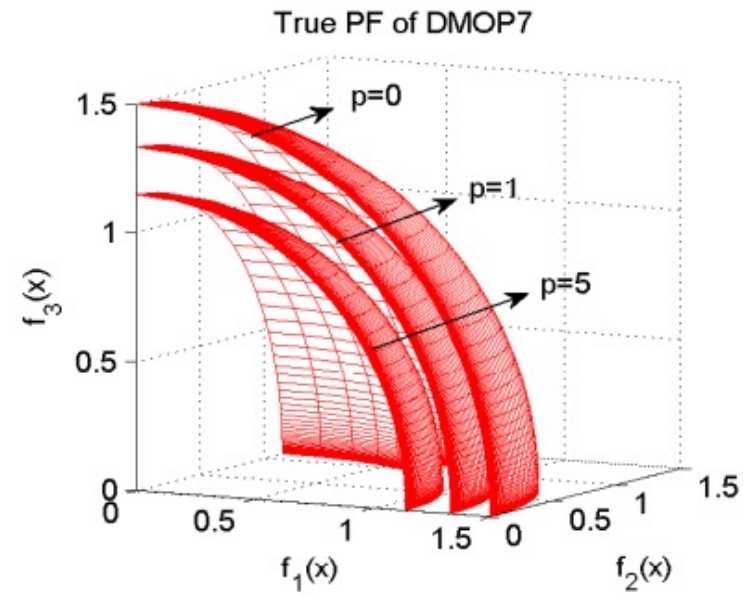
Table 1: Benchmark MOPs with changing decision variables

Problems and characteristics	Definition
DMOP1 (ZDT1) Type II(B) Non - concave	$f_1(X_I(t)) = \omega_1(t)x_1, f_2(X_{II}(t)) = g(1 - \sqrt{(f_1/g)})^{(1+p(t))}$ $g(X_{II}(t)) = 1 + \frac{9}{D-1} \left( \sum_{i=2}^{S+s} \omega_i(t) \left(x_i - \frac{1}{2+p(t)}\right)^2 \right), t = \frac{1}{n_i} \left[ \frac{\tau}{\tau_i} \right]$ $X(t) = (X_I(t), X_{II}(t)) = (\omega_1(t)x_1, \omega_2(t)x_2, \dots, \omega_D(t)x_D),$ $\omega_i(t) = 1, i = 1, 2, \dots, S, \omega_i(t) \in \{0, 1\}, i = S+1, \dots, S+s.$ $D = S + p(t), p(t) = \sum_{j=S+1}^{S+s} \omega_j(t), 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, D.$
DMOP2 (ZDT2) Type I(B) Concave	$f_1(X_I(t)) = x_1, f_2(X(t)) = g(1 - (f_1/g)^2)$ $g(X_{II}(t)) = 1 + \frac{9}{D-1} \left( \sum_{i=2}^S \omega_i(t) \left(x_i - \frac{1}{2+p(t)}\right)^2 + \sum_{i=S+1}^{S+s} \omega_i(t) \left(x_i - \frac{\sin(x_1)}{2+p(t)}\right)^2 \right),$ $t, X(t), \omega_i(t), p(t), S, s, D, \text{ and } x_i \text{ are the same as those in DMOP1.}$
DMOP3 (ZDT3) Type I(B) Disconnected	$f_1(X_I(t)) = x_1, f_2(X_{II}(t)) = g(1 - \sqrt{(f_1/g)} - (f_1/g)\sin(10\pi f_1))$ $g(X_{II}(t)) = 1 + \frac{9}{D-1} \left( \sum_{i=2}^S \omega_i(t) \left(x_i - \frac{1}{2+p(t)}\right)^2 + \sum_{i=S+1}^{S+s} \omega_i(t) \left(x_i - \frac{\sin(x_1)}{2+p(t)}\right)^2 \right),$ $t, X(t), \omega_i(t), p(t), S, s, D, \text{ and } x_i \text{ are the same as those in DMOP1.}$
DMOP4 (ZDT4) Type II(A) Non - concave	$f_1(X_I(t)) = x_1, f_2(X_{II}(t)) = g(1 - \sqrt{(f_1/g)})^{(1+p(t))}$ $g(X_{II}(t)) = 1 + 10(D-1) + \sum_{i=2}^{S+s} \omega_i(t)(x_i^2 - 10\cos(4\pi x_i)),$ $t, X(t), \omega_i(t), p(t), S, s, D, \text{ and } x_i \text{ are the same as those in DMOP1.}$
DMOP5 (ZDT6) Type I(A) Concave	$f_1(X_I(t)) = 1 - \exp(-4x_1)\sin^6(6\pi x_1), f_2(X_{II}(t)) = g(1 - (f_1/g)^2)$ $g(X_{II}(t)) = 1 + \sum_{i=3}^S \omega_i(t)x_i^{0.25} + \sum_{i=S+1}^{S+ 0.5s } \omega_i(t)(x_i - \sin(x_1))^{0.25}$ $+ \sum_{i=S+ 0.5s +1}^{S+s} \omega_i(t)(x_i - \cos(x_2))^{0.25},$ $t, X(t), \omega_i(t), p(t), S, s, D, \text{ and } x_i \text{ are the same as those in DMOP1.}$
DMOP6 (DTLZ1) Type I(B) Linear Multimodal	$f_1(X(t)) = 0.5x_1x_2(1+g); f_2(X(t)) = 0.5x_1(1-x_2)(1+g);$ $f_3(X(t)) = 0.5(1-x_1)(1+g)$ $g(X(t)) = (D-2) + \sum_{i=3}^{S+s} \omega_i(t) \left( \left(x_i - \frac{1}{2+p(t)}\right)^2 - \cos(20\pi(x_i - \frac{1}{2+p(t)})) \right),$ $t, X(t), \omega_i(t), p(t), S, s, D, \text{ and } x_i \text{ are the same as those in DMOP1.}$
DMOP7 (DTLZ2) Type II(A) Concave	$f_1(X(t)) = (1+g)\cos(0.5\pi x_1)\cos(0.5\pi x_2)$ $f_2(X(t)) = (1+g)\cos(0.5\pi x_1)\sin(0.5\pi x_2)$ $f_3(X(t)) = (1+g)\sin(0.5\pi x_1)$ $g(X(t)) = \frac{1}{2+p(t)} + \sum_{i=3}^S \omega_i(t)(x_i - 0.5)^2 + \sum_{i=S+1}^{S+ 0.5s } \omega_i(t)(x_i - \sin(x_1))^2$ $+ \sum_{i=S+ 0.5s +1}^{S+s} \omega_i(t)(x_i - \cos(x_2))^2,$ $t, X(t), \omega_i(t), p(t), S, s, D, \text{ and } x_i \text{ are the same as those in DMOP1.}$
DMOP8 (DTLZ3) Type I(A) Concave Multimodal	$f_1(X(t)) = (1+g)\cos(0.5\pi x_1)\cos(0.5\pi x_2)$ $f_2(X(t)) = (1+g)\cos(0.5\pi x_1)\sin(0.5\pi x_2)$ $f_3(X(t)) = (1+g)\sin(0.5\pi x_1)$ $g(X(t)) = (D-2) + \sum_{i=3}^S \omega_i(t) \left( (x_i - \ln(x_1))^2 - \cos(20\pi(x_i - \ln(x_1))) \right)$ $+ \sum_{i=S+1}^{S+s} \omega_i(t) \left( (x_i - \ln(x_2))^2 - \cos(20\pi(x_i - \ln(x_2))) \right),$ $t, X(t), \omega_i(t), p(t), S, s, D, \text{ and } x_i \text{ are the same as those in DMOP1.}$

# DMOP1, DMOP4, DMOP7の真のPF



(a)



(b)

Figure 1: The true PFs of DMOP1, DMOP4, and DMOP7

# 変更頻度ごとの違いと異なるグループ化戦略の評価の比較

**Table 2**  
Performance comparisons of different grouping strategies with different change frequencies.

Problem	$(n_t, \tau_t)$	MGD					MHV				
		NSGA-II	PCC-NSGA-II	UCC-NSGA-II	SCC-NSGA-II	MEE-NSGA-II	NSGA-II	PCC-NSGA-II	UCC-NSGA-II	SCC-NSGA-II	MEE-NSGA-II
DMOP1	(1, 15)	0.0094 (0.0010)†	0.0079 (0.0011)	0.0106 (0.0017)†	0.0078 (0.0010)	<b>0.0073</b> ( <b>0.0011</b> )	0.9027 (0.0954)†	0.9192 (0.0989)	0.9019 (0.0956)†	0.9201 (0.0985)	<b>0.9202</b> ( <b>0.0984</b> )
	(1, 20)	0.0087 (0.0038)†	0.0075 (0.0008)	0.0097 (0.0012)†	0.0078 (0.0018)	<b>0.0073</b> ( <b>0.0011</b> )	0.9165 (0.0968)	0.9194 (0.0995)	0.9101 (0.0970)	0.9197 (0.0991)	<b>0.9202</b> ( <b>0.0986</b> )
	(1, 25)	0.0070 (0.0001)	0.0073 (0.0007)	0.0077 (0.0001)†	0.0068 (0.0001)	<b>0.0062</b> ( <b>0.0001</b> )	0.9697 (0.0002)†	0.9694 (0.0003)†	0.9683 (0.0006)†	0.9709 (0.0003)†	<b>0.9821</b> ( <b>0.0002</b> )
DMOP2	(1, 15)	0.0075 (0.0014)	0.0080 (0.0009)†	0.0097 (0.0023)†	<b>0.0068</b> ( <b>0.0006</b> )	0.0069 (0.0008)	0.2521 (0.0644)†	0.3208 (0.0026)	0.2374 (0.0817)†	0.3255 (0.0017)	<b>0.3258</b> ( <b>0.0014</b> )
	(1, 20)	0.0077 (0.0017)†	0.0074 (0.0008)	0.0087 (0.0032)†	0.0066 (0.0006)	<b>0.0064</b> ( <b>0.0005</b> )	0.2981 (0.0259)†	0.3220 (0.0021)	0.2906 (0.0453)†	0.3251 ( <b>0.0016</b> )	0.3251 (0.0018)
	(1, 25)	0.0069 (0.0001)	0.0070 (0.0001)	0.0074 (0.0002)†	0.0073 (0.0001)†	<b>0.0062</b> ( <b>0.0002</b> )	0.3226 (0.0005)†	0.3243 (0.0006)	0.3116 (0.0006)†	0.3239 (0.0001)	<b>0.3251</b> ( <b>0.0003</b> )
DMOP3	(1, 15)	0.0107 (0.0028)†	0.0104 (0.0010)	0.0116 (0.0023)†	0.0103 (0.0009)	<b>0.0092</b> ( <b>0.0009</b> )	0.7560 (0.0218)†	0.7713 (0.0028)	0.7506 (0.0302)†	0.7718 (0.0025)	<b>0.7765</b> ( <b>0.0025</b> )
	(1, 20)	0.0088 (0.0026)	0.0091 (0.0008)	0.0105 (0.0012)†	0.0102 (0.0039)†	<b>0.0090</b> ( <b>0.0007</b> )	0.7712 (0.0078)	0.7760 (0.0030)	0.7688 (0.0105)	0.7753 (0.0023)	<b>0.7764</b> ( <b>0.0026</b> )
	(1, 25)	0.0090 (0.0001)†	0.0093 (0.0002)†	0.0095 (0.0002)†	0.0094 (0.0002)†	<b>0.0083</b> ( <b>0.0001</b> )	0.7770 (0.0002)†	0.7760 (0.0003)†	0.7751 (0.0005)†	0.7760 (0.0005)†	<b>0.7786</b> ( <b>0.0003</b> )
DMOP4	(1, 15)	0.4904 (0.0388)†	0.3847 (0.0461)†	0.3831 (0.0442)†	0.3638 (0.0401)	<b>0.3578</b> ( <b>0.0469</b> )	0.3501 (0.2346)†	0.5450 (0.3029)†	0.5309 (0.2272)†	0.7158 (0.0969)	<b>0.7200</b> ( <b>0.0986</b> )
	(1, 20)	0.4238 (0.0372)†	0.3524 (0.0434)†	0.3871 (0.0384)†	0.3591 (0.0404)	<b>0.3509</b> ( <b>0.0512</b> )	0.3891 (0.2424)†	0.5952 (0.2840)†	0.5842 (0.2339)†	0.6951 (0.1102)†	<b>0.7166</b> ( <b>0.0969</b> )
	(1, 25)	0.4545 (0.0170)	0.3769 (0.0330)	0.3914 (0.0881)	<b>0.2410</b> ( <b>0.0341</b> )†	0.4390 (0.0410)	0.2739 (0.0170)†	0.5328 (0.0140)†	0.5805 (0.0937)†	0.7611 ( <b>0.0190</b> )	0.7611 (0.0002)
DMOP5	(1, 15)	0.0454 (0.0253)	0.1130 (0.0255)†	0.0521 (0.0240)†	<b>0.0442</b> ( <b>0.0110</b> )	0.0496 (0.0173)	0.2138 (0.0431)†	0.2235 (0.0775)†	0.2101 (0.0487)†	<b>0.2638</b> ( <b>0.0012</b> )	0.2635 (0.0011)
	(1, 20)	0.4562 (0.0248)†	0.0585 (0.0408)†	<b>0.0417</b> ( <b>0.0197</b> )	0.0496 (0.0174)†	0.0493 (0.0176)†	0.2150 (0.0622)†	0.2533 (0.0271)	0.2216 (0.0510)†	0.2630 (0.0019)	<b>0.2636</b> ( <b>0.0010</b> )
	(1, 25)	0.0422 (0.0039)†	0.0410 (0.0002)†	0.0415 (0.0001)†	0.0416 (0.0001)†	<b>0.0359</b> ( <b>0.0001</b> )	0.2563 (0.0061)†	0.2575 (0.0004)†	0.2569 (0.0003)†	0.2580 (0.0003)†	<b>0.2671</b> ( <b>0.0002</b> )
DMOP6	(1, 15)	0.1933 (0.0449)	0.2378 (0.1478)	0.1944 (0.0712)	0.1725 (0.0629)†	<b>0.1472</b> ( <b>0.0274</b> )	0.0461 (0.0094)	0.0280 (0.0026)†	0.0206 (0.0051)†	0.0452 (0.0120)	<b>0.0469</b> ( <b>0.0203</b> )
	(1, 20)	0.1767 (0.0468)†	0.2155 (0.1292)†	0.1821 (0.0510)†	0.1834 (0.0646)†	<b>0.1448</b> ( <b>0.0266</b> )	0.0437 (0.0138)†	0.0310 (0.0027)†	0.0430 (0.0094)	0.0412 (0.0227)†	<b>0.0471</b> ( <b>0.0105</b> )
	(1, 25)	0.4115 (0.0210)†	0.2311 (0.0260)†	0.1367 (0.0280)†	0.1229 (0.0130)	<b>0.1052</b> ( <b>0.0101</b> )	0.0085 (0.0008)†	0.0461 (0.0008)†	0.0293 (0.0019)†	<b>0.0620</b> ( <b>0.0007</b> )	0.0615 (0.0030)
DMOP7	(1, 15)	0.0891 (0.0100)†	0.0842 (0.0076)†	0.0993 (0.0106)†	0.0808 (0.0084)†	<b>0.0769</b> ( <b>0.0070</b> )	0.5838 (0.2467)†	0.6054 (0.2427)	0.5710 (0.2548)†	<b>0.6561</b> ( <b>0.2457</b> )	0.6421 (0.2395)
	(1, 20)	0.0833 (0.0083)†	0.0809 (0.0070)	0.0957 (0.0102)†	0.0812 (0.0081)†	<b>0.0768</b> ( <b>0.0072</b> )	0.6030 (0.2466)†	0.6265 (0.2411)	0.5934 (0.2401)†	0.6396 (0.2465)	<b>0.6549</b> ( <b>0.2471</b> )
	(1, 25)	0.0894 (0.0009)	<b>0.0818</b> ( <b>0.0007</b> )	0.0919 (0.0009)	0.0883 (0.0011)	0.0831 (0.0007)	0.7207 (0.0110)†	0.7290 (0.0072)†	0.7377 (0.0134)†	0.7437 (0.0026)†	<b>0.7847</b> ( <b>0.0027</b> )
DMOP8	(1, 15)	0.5651 (0.0799)†	0.7467 (0.0680)†	0.9780 (0.0529)†	0.5640 (0.3369)†	<b>0.5471</b> ( <b>0.0909</b> )	0.0062 (0.0017)†	0.0025 (0.001)	0.0083 (0.0045)†	<b>0.0742</b> ( <b>0.0098</b> )	0.0604 (0.0154)†
	(1, 20)	0.5301 (0.0551)†	0.6978 (0.0590)†	0.9149 (0.0545)†	0.5276 (0.3200)†	<b>0.5137</b> ( <b>0.0738</b> )	0.0061 (0.0185)†	0.0027 (0.0011)†	0.0093 (0.0080)†	0.0791 (0.0158)†	<b>0.0861</b> ( <b>0.0094</b> )
	(1, 25)	0.5762 (0.0680)†	0.6897 (0.0410)†	0.9070 (0.0190)†	0.5237 (0.0270)†	<b>0.5012</b> ( <b>0.0280</b> )	0.0026 (0.0023)†	0.0034 (0.0031)†	0.0041 (0.0030)†	0.0489 (0.0093)†	<b>0.0781</b> ( <b>0.0081</b> )