2023/06/05
理論談話会#14

Evolutionary Implementation and Congestion Pricing

WILLIAM H.SANDHOLM
Review of Economic Studies (2002) 69, 667-689

B4 手代木祐可子

0. 研究のサマリー

要旨

- ネットワークの混雑の緩和について考える.
- 道路網を管理するプランナーが直面する道路混雑について，**価格スキーム**という新しいメカニズムと**進化的実装の概念**を導入することによってドライバーの効率的な配分が実現できることを示す.

良い点

- 全て理論なので，色々なモデルに拡張できそう.

課題点

- 具体的な数値，グラフや図がいっさい出てこなくてイメージが湧きづらかった，，

0. 研究のサマリー

新規性

- 道路混雑について考える際の，各ドライバーの通勤の価値と各ドライバーの行動がわからないという2つの制約を考慮したドライバーの配分を行ったということ.

有用性

- 混雑課金の際の基礎となるゲームの枠組みを考えているので，いろいろな拡張が考えられる.

信頼度

- 数学による式変形によりゲームが記述されているので，信頼できると思う.

構成

1. **はじめに**
2. 非弾力的需要下の基本的な定式化
3. 非弾力的需要下の進化的実装
4. 非弾力的需要下の混雑課金
5. 弾力的需要下の基本的な定式化
6. 弾力的需要下の進化的実装
7. 弾力的需要下の混雑課金
8. 考察

1. 研究の概要

ネットワークの混雑の緩和を実装問題として考える.

プランナーの問題の仮定は以下の通り.

- ある町の集合は街路網で結ばれている
- 通勤者は自宅→職場まで移動しないといけない
- 移動に要する時間は各道路の遅延時間の合計
- 各道路の遅延時間は，その道路を通っているドライバーの数に依存

プランナーは2つの制約がある.

① 各ドライバーの通勤に対する価値，つまりどれくらいの遅延なら許容できるかがわからない
② ドライバーが実際にどの道を通るかが把握できない

プランナーは，**価格スキームの導入＋進化的実装**を通じて，これらの2つの制約のもと効率的なドライバーの配分を実現する.

1. 既往研究

- Vickrey-Clarke-Groves(VCG)メカニズム

(Vickrey(1961), Clarke(1971), Groves(1973))

各プレイヤーがプランナーに通勤に対する価値を表明し，プランナーが各ドライバーの通るルートの配分を決定する．配分は表明が真であることを前提に効率的になるように決められるので，正直表明が支配戦略となる．

①各ドライバーの通勤に対する価値のみが制約条件の時はプランナーはこのメカニズムを使って効率的な配分を決められる．

→プランナーが各ドライバーの選択を観察することができればいいが非現実的.

→ドライバーの行動を完全に把握していると仮定するよりも，**行動が匿名であると仮定する**方が合理的．この場合，各ドライバーが選択した経路がわからなくても．集計された行動がわかれば良い．（どのルートを何人選ぶか）

1. 既往研究

- Sandholm(2001)

  プランナーは可変価格スキームを実行することで，需要の実現にかかわらず，プレイヤーがポテンシャル関数が社会的総利得に比例するポテンシャルゲームに直面することを保証.
  （後述します）

◯進化ゲーム理論の手法を用いた，既存のメカニズムの実装に関する文献

- Cabrales(1999)
- Cabrales, Ponti(2000)
- Ponti(2000)

これらは全て①各ドライバーの通勤に対する価値はわからないが，②ドライバーが実際にどの道を通るかはわかるという設定での実装に関するものである.

1. 目標

価格スキームの導入
プレイヤーの匿名選択を許容するメカニズム
各プレイヤーの行動に価格をつける

＋

進化的実装

一度価格スキームが導入されると，プレイヤーは現在の遅延と価格スキームによるインセンティブに応じて時間の経過とともに行動を調整すると仮定する．

1. 導入

非弾力需要と弾力需要の違い

- 非弾力需要

  価格が変わっても需要が変化しない状況

  →混雑課金に関わらず，**全プレーヤーは通勤しないといけない**という仮定．

- 弾力需要

  価格が変わると需要が変わる状況

  →混雑課金が導入される場合，**プレーヤーは通勤だけでなく，在宅という選択肢も取れる**という仮定．通勤を選んだプレーヤーにおいて最適な戦略となるような価格が決定される．

構成

2-1. 連続的なプレイヤーによる集団ゲーム

- 社会はr個の集団(R={1,...,r})から成り立っている．
- 各プレイヤーは，R={1,...,r}の集団内のある集団のメンバーであり．連続的なプレイヤーを仮定

S^r : 集団rが選択可能な戦略
n^r : 集団rが選択可能な戦略の数
x_i : 集団r内のプレイヤーで戦略$i(i \in S^r)$を選ぶプレイヤーの数
m^r : 集団r内のプレイヤーの人数
x_i : 集団rで戦略iを選んだプレイヤーの数
F_i : 戦略iを選んだ時の利得関数
x : 全体の戦略分布(全てのプレイヤーがどの戦略を選んでいるか)

連続的
個々のプレイヤーを別々で考慮するのではなく，特定の時間や場所において集団内のプレイヤーの数などで考慮するということ．

もし全てのプレイヤーが相手の行動を考慮して，自分の利得を最大化する戦略を選ぶとすると戦略分布xはナッシュ均衡となる．
相手の行動を考慮して自分の利得を最大化する戦略を選ぶとき，次の式が成り立つ．

$$F_i(x) = \max_{j \in S^r} F_j(x) \qquad whenever\ i \in S^r\ and\ x_i > 0$$

2-2. 混雑ゲーム

交通渋滞問題を集団ゲームとしてモデル化

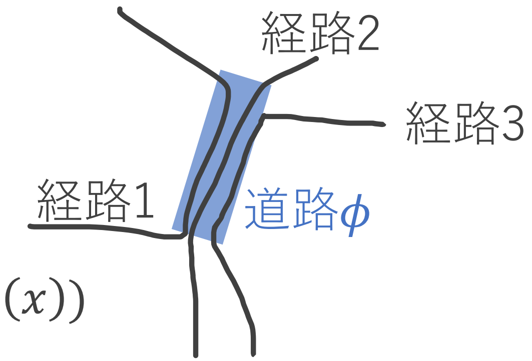
- **プレイヤーはドライバー，集団は同一ODの人の集まり，戦略はどの経路を通るか，戦略分布は配分結果**と考えられる.
- 各ドライバーは自宅から仕事場まで通勤するものとし，通勤時間は各道路の遅延の合計とし，遅延は道路を通っているドライバーの数に比例する.
- ドライバーは遅延をできるだけ避けたい！という考えが前提となる,

$\rho(\phi)$: ある道路ϕを含む経路の集合
$u_\phi(x)$:ある道路ϕを通るドライバーの人数
x_i : 集団r内のプレイヤーで経路$i(i \in S^r)$を選ぶドライバーの数
$C_i(x)$: 経路iを選んだ時のコスト
Φ_i : 経路iに含まれる道路の集合
$c_\phi(u)$: 道路ϕの遅延を表すコスト関数
$F_i(x)$: 戦略iの利得関数
m : 需要ベクトル（各集団内の通勤する人数）

$$u_\phi(x) = \sum_{i \in \rho(\phi)} x_i$$

$$C_i(x) = \sum_{\phi \in \Phi_i} c_\phi(u_\phi(x))$$

$$F_i(x) = -C_i(x)$$



2-3. 進化ダイナミクス

- ナッシュ均衡を実現するには，プレイヤーは相手の意志を知る必要があるが，プレイヤー数が多い場合はこの仮定はかなり難しい．
- ゲームが繰り返し行われる場合は，プレイヤーが現在の利得を向上させる戦略に切り替える短期的な調整過程として行動をモデル化することで仮定を回避できる

→進化ダイナミクスによってこのような調整プロセスをモデル化できる

<u>進化ダイナミクス</u>

戦略を時間とともにどのように調整しているかを示すもの．

ベクトル場Vによって記述される．

2-3. 進化ダイナミクス

Vが進化ダイナミクスを示す時，次の5つの仮定が必要である．
（なお， $\dot{x} = V(x)$と定義している．）

① **リプシッツ連続性(LC)：V is Lipschitz continuous.**
人の行動の変化が急激になりすぎないということ．
② **前方不変性1(FI1)：$V_i(x) \geq 0$ whenever $x_i = 0$.**
人々がまだ選んでいない新しい行動を試す可能性が常に存在するということ．
③ **前方不変性2(FL2)：$\sum_{i \in S^r} V_i(x) = 0$ for all $x \in X$ and $r \in R$.**
各集団内での行動の総数が一定であるということ．
④ **正の相関関係(PC)：$V(x) \cdot F(x) > 0$ whenever $V(x) \neq \vec{0}$.**
行動が変化する時，戦略の変化率と利得の間に正の相関関係があるということ．
⑤ **非競合性条件(NC)： $V(x) \neq \vec{0}$ implies that x is an equilibrium of F.**
行動が均衡していないとき，戦略を切り替えることで利益を得るプレイヤーが存在するということ

2-4. ポテンシャルゲーム

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = F_i(x)$$

$$for\ all\ x \in X \ \ and\ i \in S$$

$F_i(x)$: 戦略iの利得関数
$\mathrm{x_i}$: 集団rで戦略iを選んだプレイヤーの数
X_m : 選択可能な戦略分布の集合
m : 需要ベクトル（各集団内の通勤する人数）

Sandholm(2001)の結果より，

- 左の式をみたす関数fが存在する場合，連続的なプレイヤーセットをもつゲームをポテンシャルゲームという.
- 関数fをポテンシャル関数と呼ぶ.
- ポテンシャル関数によってゲームのナッシュ均衡を決定し，また，進化ダイナミクスを表現できる.

Fをポテンシャルゲームとし，Fの進化ダイナミクスをVとする．このとき次の定理が成り立つ.

補助定理1

① Vの解の軌跡は全てFのナッシュ均衡の集合に収束する.
② ポテンシャル関数fが凹型で，需要ベクトルmが固定の場合， X_mにおいてfを最大とするのは，X_m におけるFの唯一のナッシュ均衡となり，これに収束する.

補助定理2

各プレイヤーが選択できる戦略が明確に区別できて，コスト関数c_ϕが$c'_\phi > 0$を満たす混雑ゲームは凹んだポテンシャル関数をもつ.

2-4. ポテンシャルゲーム

- 非弾性需要下での混雑ゲームは次のようなポテンシャル関数を持つポテンシャルゲームとなる.
- このポテンシャル関数は凹関数なので，混雑ゲームにおいてナッシュ均衡の存在性と唯一性が保証される

$$f(x) = -\sum_{\phi\in\Phi}\int_0^{u_\phi(x)} c_\phi(z)dz$$

$u_\phi(x)$:ある道路ϕを通るドライバーの人数
$c_\phi(\mathrm{u})$: 道路ϕの遅延を表すコスト関数

構成

3. 非弾力的需要下での進化的実装

- プランナーは各ドライバーの需要を知らない状態で，社会最適な道路を目指さないといけない．
- ドライバーは匿名なので，プランナーは各ドライバーにどのように行動するかを指示することはできず匿名性を考慮した何らかのインセンティブによってプレイヤーの選択に影響を与えないといけない．

→各経路の使用に対して価格を設定（価格スキームを関数Pとする）

価格スキームの導入によってプランナーは新しいゲームを作り，そのゲームの利得関数$\hat{F}_i(x)$は次のようになる．

$$\hat{F}_i(x) = F_i(x) - \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{x}) = -C_i(x) - \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{x})$$

$F_i(x)$: 元のゲームの戦略iの利得関数
$P_i(x)$: 戦略i（経路i）をとるドライバーが支払う金額
$C_i(x)$: 経路iを選んだ時のコスト

3. 非弾力的需要下での進化的実装

- プレイヤーが現在の利得を向上させる戦略に切り替える短期的な調整過程として行動をモデル化することでプレイヤーは相手の意志を知らなくてもナッシュ均衡に収束できる．（2-3より）
- プランナーは，需要ベクトルmに関わらず，新しいゲームの利得に関する短期的な経路選択の調整（自己利益を最大化する行動）が，元のゲームの利得に関する効率的な行動につながるように価格を選択したい．

- **社会的選択関数$\boldsymbol{\sigma}$**：各需要ベクトルmに対して戦略分布$\sigma(\mathrm{m}) \in X_m$を指定するもの

  ある戦略分布$\sigma(\mathrm{m})$が，新しいゲーム$\hat{F}$に関して任意の進化ダイナミクス下で安定であるとき，価格スキームPは社会的選択関数σを実装する．

  このとき，各需要ベクトルmに対して，戦略分布$\sigma(\mathrm{m})$は任意の進化ダイナミクスにおける唯一の安定解であり，ナッシュ均衡となる．

3. 非弾力的需要下での進化的実装

- 価格スキームPはドライバーの匿名性を許容しつつ，全戦略分布xに依存するが，xは各経路を選択したドライバーの数を列挙しているので，それを完全に把握するのは難しい.

もし経路を道路ごとに分解して考えられたら…

- ドライバーが各道を通った際に費用を徴収すればよく，ドライバーの通る経路を完全に把握する必要がなくなる.
- 各道の価格は，その道を通るドライバーの数のみに依存するので，価格そのものも分散的に決められる.

→次のように価格スキームは**道路ごとに分解可能な価格形式とする**.

$$P_i(x) = \sum_{\phi\in\Phi_i} p_\phi(u_\phi(x))$$

$P_i(x)$：戦略i（経路i)をとるドライバーが支払う金額
$p_\phi(x)$：ある道路ϕを通るドライバーが支払う金額
$u_\phi(x)$：ある道路ϕを通る人数
Φ_i : 経路iに含まれる道路の集合

構成

1. はじめに
2. 非弾力的需要下の基本的な定式化
3. 非弾力的需要下の進化的実装
4. **非弾力的需要下の混雑課金**
5. 弾力的需要下の基本的な定式化
6. 弾力的需要下の進化的実装
7. 弾力的需要下の混雑課金
8. 考察

4. 非弾力的需要下の混雑課金

効率性を総利得関数$\bar{F}$で定義する.

$$\bar{F}(x) = \sum_{i \in S} x_i F_i(x) = -\sum_{i \in S} x_i C_i(x)$$

x_i ：戦略iを選んだ人数
$F_i(x)$ ：戦略iを選んだ場合の利得関数
$C_i(x)$ ：戦略i（経路i）を選んだ時のコスト（遅延）

効率的な社会的選択関数$x^*(m)$を次のようにおく.

$$x^*(m) \in arg \max_{x \in X_m} \bar{F}(x)$$

プランナーは$x^*(m)$を実装する価格スキームを選択したい.

4. 非弾力的需要下の混雑課金

価格スキームを実装した新しいゲームにおいて，総利得関数に比例するポテンシャル関数を設定できるように価格スキームを選べれば，補助定理1より新しい利得に関する短期的な調整が効率的なプレーに繋がる．

総利得関数$\bar{F}$に比例するポテンシャル関数$\hat{f}$を定義する．

→ $\hat{f}(x) \equiv \kappa\bar{F}(x)$ for some $\kappa > 0$とする

各経路の使用に対して価格を設定することで利得関数は変化

$$\hat{F}_i(x) = F_i(x) - P_i(x)$$

$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = F_i(x)$より$x_i$に関して微分すると

$$\hat{F}_i(x) = \kappa \boxed{\frac{\partial}{\partial x_i}\bar{F}(x)}$$

社会的限界便益

個人の利得は社会的限界便益に比例するように設定される

補助定理1

① Vの解の軌跡は全てFのナッシュ均衡の集合に収束する．

② ポテンシャル関数fが凹型で，需要ベクトルmが固定の場合， X_mにおいてfを最大とするのは， X_m におけるFの唯一のナッシュ均衡となり，これに収束する．

4. 非弾力的需要下の混雑課金

$\widehat{F}_i(x) = F_i(x) - P_i(x)$より

$$\frac{\partial u_\phi}{\partial x_j}(x) = \begin{cases} 1 & if\ \phi \in \Phi_j, \\ 0 & otherwise, \end{cases}$$

u_ϕ: ある道路ϕを通る人数

$$\begin{aligned} P_i(x) &= F_i(x) - \widehat{F}_i(x) \\ &= F_i(x) - \kappa \frac{\partial}{\partial x_i}\bar{F}(x) \\ &= F_i(x) - \kappa(F_i(x) + \textstyle\sum_{j\in S} x_j \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x)) \\ &= \kappa(\textstyle\sum_{j\in S} x_j \frac{\partial C_j}{\partial x_i}(x)) + (\kappa-1)C_i(x) \\ &= \kappa(\textstyle\sum_{j\in S} x_j\ (\sum_{\phi\in\Phi_i\cap\Phi_j} c'_\phi(u_\phi(x))) + (\kappa-1)(\sum_{\phi\in\Phi_i} c_\phi(u_\phi(x))) \\ &= \kappa \textstyle\sum_{\phi\in\Phi_i} u_\phi(x)\ c'_\phi(u_\phi(x)) + (\kappa-1)\sum_{\phi\in\Phi_i} c_\phi(u_\phi(x)) \\ &= \textstyle\sum_{\phi\in\Phi_i}(\kappa u_\phi(x)\ c'_\phi(u_\phi(x)) + (\kappa-1)\ c_\phi(u_\phi(x))) \end{aligned}$$

$$\bar{F}(x) = \sum_{i\in S} x_i F_i(x) = -\sum_{i\in S} x_i C_i(x)$$

$$F_i(x) = -C_i(x) = -\sum_{\phi\in\Phi_i} c_\phi(u_\phi(x))$$

$$u_\phi(x) = \sum_{i\in\rho(\phi)} x_i$$

この式は元の利得関数$\mathrm{F_i}$がϕで分離可能なため，設定した**価格スキーム$\mathrm{P_i}$も同様に分離可能**なことを示している．（3章の条件を満たす）
→ポテンシャル関数が総利得関数に比例するゲームを作るには，**各道路に対して価格を設定すればよく，各道路の価格は利用するドライバーの数に依存するよう定義すればいい．**

4. 非弾力的需要下の混雑課金

$$P_i(x) = \sum_{\phi\in\Phi_i} (\kappa u_\phi(x)\ c'_\phi(u_\phi(x)) + (\kappa-1)\ c_\phi(u_\phi(x)))$$

可変価格スキーム$P^{\bar{\eta}}$を次のように定義する.

$$P_i^{\bar{\eta}} = \sum_{\phi\in\Phi_i} P_\phi^{\bar{\eta}}(u_\phi(x)) \qquad \bar{\eta} = \frac{1}{\kappa} - 1(> -1)$$

可変：道路の価格が現在の利用状況に応じて変化するということ

このとき道路ϕの価格$P_\phi^{\bar{\eta}}$は次のようになる.

$$P_\phi^{\bar{\eta}} = \frac{1}{\bar{\eta}+1}(uc'_\phi(u) - \bar{\eta}\ c_\phi(u))$$

道路ϕのコスト弾力性を$\eta_\phi(u)$次のように定義する.

$$\eta_\phi(u) = \frac{uc'_\phi(u)}{c_\phi(u)}$$

価格$P_\phi^{\bar{\eta}}$は次のように整理できる.

$$P_\phi^{\bar{\eta}}(u) = \frac{c_\phi(u)}{\bar{\eta}+1}(\eta_\phi(u) - \bar{\eta})$$

4. 非弾力的需要下の混雑課金

$$P_{\phi}^{\bar{\eta}}(u) = \frac{c_{\phi}(u)}{\bar{\eta}+1}(\eta_{\phi}(u) - \bar{\eta})$$

$\bar{\eta}$: 弾性値の閾値

コスト弾力性$\eta_{\phi}(u) = \bar{\eta}$: 道路の価格は0
コスト弾力性$\eta_{\phi}(u) > \bar{\eta}$: 道路は正の価格
コスト弾力性$\eta_{\phi}(u) < \bar{\eta}$: 道路は負の価格（補助金など）

4. 非弾力的需要下の混雑課金

非弾力的需要下において可変価格スキーム下での行動には次の2つの定理が成り立つ.

定理1

全ての道路ϕ,選択人数uにおいてコスト関数$c_\phi(u)$が$uc''_\phi(u) > -2c'_\phi(u)$を満たすとき，各可変価格スキーム$P^{\bar{\eta}}$は効率的な社会選択関数$x^*(m)$を実装している.

→**可変価格スキームを使うことで，効率的配分$x^*(m)$に最終的に落ち着くことが保証される.**

証明

道路ϕを選んだ時のコスト

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\boxed{c_\phi(u) + P_\phi^{\bar{\eta}}(u)}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\bar{\eta}+1}(uc'_\phi(u) + c_\phi(u))\right) = \frac{1}{\bar{\eta}+1}\left(uc''_\phi(u) + 2c'_\phi(u)\right) > 0$$

より，道路ϕを選んだコスト$(c_\phi + P_\phi^{\bar{\eta}})$は増加関数である.

よって補助定理2より，ポテンシャル関数$\hat{f}$は凹である.

ここで，任意の需要ベクトルmを固定すると，補助定理1より，X_m上で$\hat{f}$を最大化する状態は安定であり， X_mにおける$\hat{f}$の唯一のナッシュ均衡となり，これに収束する.

4. 非弾力的需要下の混雑課金

効率的配分$\boldsymbol{x}^*(m)$に収束した後も，その配分を維持しないといけない

→**固定価格スキーム**$\boldsymbol{\prod^{\bar{\eta},m}}$を使用

$$\prod_i^{\bar{\eta},m} = \sum_{\phi\in\Phi_i} \pi_\phi^{\bar{\eta},m}, \quad \text{where } \pi_\phi^{\bar{\eta},m} = P_\phi^{\bar{\eta}}\left(u_\phi\left(x^*(m)\right)\right)$$

$P_\phi^{\bar{\eta}}$：可変価格スキーム下での道路$\boldsymbol{\phi}$の価格
$u_\phi(x)$：ある道路$\boldsymbol{\phi}$を通る人数
$x^*(m)$：効率的な社会的選択関数

可変価格スキームで$\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{m})$を学習→固定価格スキームで$\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{m})$を維持という流れ

4. 非弾力的需要下の混雑課金

<u>定理2</u>

需要ベクトルがmで，プランナーが固定価格スキーム$\prod_i^{\bar{\eta},m}$を課すとすると，効率的配分$x^*(m)$は任意の進化ダイナミクス下において安定である．

証明

固定価格スキーム$\prod^{\bar{\eta},m}$下の利得関数$\check{F}$：$\check{F}_i(x) = F_i(x) - \prod_i^{\bar{\eta},m}$

$\pi_\phi^{\bar{\eta},m}$の定義により，$\check{F}\left(x^*(m)\right) = \hat{F}_i\left(x^*(m)\right)$となり，$x^*(m)$は可変価格ゲーム$\hat{F}$のナッシュ均衡なので，$x^*(m)$は固定価格ゲーム$\check{F}$のナッシュ均衡にもならないといけない．

もとのコスト関数$c_\phi(u)$が増加関数なので，固定価格スキーム下でのコスト関数$\check{c}(u)$は

$\check{c}(u) = c_\phi(u) + \pi_\phi^{\bar{\eta},m}$となり，これも増加関数となる．

よって補助定理1, 2より示される．

構成

1. はじめに
2. 非弾力的需要下の基本的な定式化
3. 非弾力的需要下の進化的実装
4. 非弾力的需要下の混雑課金
5. **弾力的需要下の基本的な定式化**
6. 弾力的需要下の進化的実装
7. 弾力的需要下の混雑課金
8. 考察

5-1. 混雑ゲーム

- 弾力的な需要を導入するために，同じ道路を選択したドライバーは同じように遅れを経験するが，**ドライバーによって通勤の価値が異なる**と仮定

  $D^r(v)$: 集団rの中の通勤者のうち，通勤の価値がv以上の人数（$\frac{\partial}{\partial \mathrm{v}} D^r(v) < 0$と仮定）
  $\widetilde{D}^r(z)$: 集団rのドライバーのうち，通勤する価値が「z番目に高い」価値

- 通勤の価値vをもつドライバーが経路iで通勤するとき，利得は$v - C_i(x)$となり，家にいる場合0となる．
- 通勤の価値がvであるドライバーが通勤するときは，属する集団の中でvより高い通勤の価値を持つ全てのドライバーも同様に通勤すると仮定.

5-1. 混雑ゲーム

集団rの中でx^r人通勤するとき，通勤の価値がx^r番目のドライバーをmarginal driverと定義する.
marginal driverの利得関数を$\tilde{F}_i$とすると次の式が成り立つ.

x^r：集団rで通勤する人の数
$\widetilde{D}^r(x^r)$：marginal driverの通勤に対する価値
$C_i(x)$: 経路iを選んだ時のコスト
S^{r} : 集団rが選択可能な戦略

$$\tilde{F}_i(x) = \widetilde{D}^r(x^r) - C_i(x) \quad \text{for } i \in S^r$$

$\tilde{F}_i > 0$: marginal driverは在宅よりも経路iで通勤を好む.
$\tilde{F}_i < 0$： marginal driverは通勤より在宅を好む.

5.2 進化ダイナミクス

- 弾力的需要下での進化ダイナミクスは同様にベクトル場Vで定義される．

（なお， $\dot{x} = V(x)$と定義している）

- 通勤するドライバーの数は時間とともに変化しうるので，母集団の質量を一定に保つという条件（FL2）を置き換える必要がある．

For each r, $\sum_{i \in S^r} V_i(x) \leq 0$ whenever $x^r = M^r$ （FI2’)

これは，各集団の通勤する人数が各集団の人数M^rを超えないことを保証している．

- 正の相関条件も修正する必要がある．

$V(x) \cdot \tilde{F}(x) > 0$ whenever $V(x) \neq \vec{0}$ (PC′)

- 非競合性条件も修正する必要がある．

$V(x) \neq \vec{0}$ implies that x is an equilibrium of $\tilde{F}$.

5.3 ポテンシャルゲーム

弾性需要下でのポテンシャルゲームは，非弾性需要下での定義とほぼ同様

次の条件を満たすポテンシャル関数$\bar{f}$があるとき，$\tilde{F}$はポテンシャルゲームとなる．

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i}(x) = \tilde{F}_i(x)$$

$$for\ all\ x \in X\ \ and\ i \in S$$

弾性需要下での混雑ゲームは次のようなポテンシャル関数を持つポテンシャルゲームとなる．

$$\bar{f}(x) = \sum_{r \in R} \int_0^{x^r} \tilde{D}^r(z)dz - \sum_{\phi \in \Phi} \int_0^{u_\phi(x)} c_\phi(z)dz$$

$\tilde{D}^r(z)$：集団rのドライバーのうち，通勤する価値が「z番目に高い」価値
x^r：集団rで通勤する人の数
$u_\phi(x)$:ある道路ϕを通るドライバーの人数
$c_\phi(\mathrm{u})$: 道路ϕの遅延を表すコスト関数

5.3 ポテンシャルゲーム

2.4 非弾性需要下でのポテンシャルゲームにおける補助定理を拡張することで，弾性需要下で同じような定理が成立する．

補助定理3

(1)$\tilde{F}$を弾性需要ポテンシャルゲームとし，Vを$\tilde{F}$に関する進化ダイナミクスとしたとき，Vの解の軌跡は全て$\tilde{F}$のナッシュ均衡の連結集合に収束する

(2)$\tilde{F}$のポテンシャル関数$\bar{f}$が凹であるとき，X上の$\bar{f}$の最大値は$\tilde{F}$の唯一の均衡であり，$\tilde{F}$のもとで安定である

補助定理4

各プレイヤーが選択できる戦略が明確に区別できて，コスト関数c_ϕが$c'_\phi > 0$を満たす弾性需要混雑ゲームは凹んだポテンシャル関数をもつ．

構成

6. 弾力的需要下の進化的実装

- 需要が弾力的な場合，最適にドライバーを道に分布させるだけでなく，適切なプレイヤーが運転することを選択する必要がある．
- プランナーは，各プレイヤーの通勤の価値に対する情報を知らない状態で，価格スキームを導入し効率的な行動を確保したい．

需要関数（通勤を希望する人の数）をDとすると，弾性需要下でのゲームにおける利得関数$\overbrace{F}$は次のようになる．

$$\overbrace{F}_i\,(D, x) = \tilde{F}_i(D, x) - P_i(x)$$

$\tilde{F}_i(x) = \widetilde{D}^r(x^r) - C_i(x)$
$P_i(x)$：戦略i（経路i)をとるドライバーが支払う金額

これは，価格スキームが固定されていたとしても，需要関数が変わる（通勤への価値が変わる）とプレイヤーの利得が変わる可能性があるということを示している．

各需要関数Dに対して，ある戦略分布σが，新しいゲーム$\overbrace{F}$ に関して任意の進化ダイナミクス$\overbrace{F}$ (D,·)下で安定であるとき，価格スキームPは社会的選択関数$\sigma(D)$を実装するとする．

構成

1. はじめに
2. 非弾力的需要下の基本的な定式化
3. 非弾力的需要下の進化的実装
4. 非弾力的需要下の混雑課金
5. 弾力的需要下の基本的な定式化
6. 弾力的需要下の進化的実装
7. **弾力的需要下の混雑課金**
8. 考察

7. 弾力的需要下の混雑課金

弾力的需要下での総利得を関数W^kで定義する．（k>0）

$$W^k(D,x)=\boxed{\sum_{r\in R}\int_0^{x^r}\widetilde{D}^r(z)dz}+\boxed{k\bar{F}(x)}=\sum_{r\in R}\int_0^{x^r}\widetilde{D}^r(z)dz-k\sum_{i\in S}x_iC_i(x)$$

通勤すると決定したドライバーによって得られる利益

通勤すると決定したドライバーの総運転時間（k×総利得関数）

$\widetilde{D}^r(z)$：集団rのドライバーのうち，通勤する価値が「z番目に高い」価値
$\bar{F}(x)$：総利得関数
x_i：戦略iを選んだ人数
$C_i(x)$：戦略i（経路i）を選んだ時のコスト

k：コストと便益の比率を測定するもの
k=1の時，コストと便益は等しく重みづけがされ，W^kは消費者余剰に等しくなる．
kを変化させることによってプランナーはコストと便益のどちらを重視するかを決められる．

効率的な社会的選択関数x^kを次のようにおく．

$$x^k(D)\in arg\max_{x\in X}W^k(D,x)$$

7. 混雑課金

- プランナーは弾性需要下でのゲームのメカニズムを選択する.

$\widetilde{\widetilde{F}}_i(D,x) \equiv \tilde{F}_i(D,x) - P_i(x)$ ・・・❶

- 総利得W^kを最大化したい→ W^kをポテンシャル関数とするポテンシャルゲーム$\widetilde{\widetilde{F}}$を考えたい.

$\widetilde{\widetilde{f}}(D,x) \equiv W^k(D,x)$ ・・・❷

<u>❶,❷の両方を満たすメカニズムは存在するのか？</u>

2つ目の式をx_iに関して微分すると次の式が成り立つ.

$$\widetilde{\widetilde{F}}_i(D,x) = \widetilde{D}^r(x^r) + k\frac{\partial}{\partial x_i}\bar{F}(x)$$

P_iについて解くと

$$\begin{aligned} P_i(x) &= \widetilde{F}_i(D,x) - \widetilde{\widetilde{F}}_i(D,x) \\ &= (\widetilde{D}^r(x^r) + F_i(x)) - (\widetilde{D}^r(x^r) + k\frac{\partial}{\partial x_i}\bar{F}(x)) \\ &= F_i(x) - k\frac{\partial}{\partial x_i}\bar{F}(x) \end{aligned}$$

$P_i(x)$は需要Dに依存しないので，価格は需要関数とは無関係に選択できる.
また，**最後の式は可変価格スキームの場合と同じ**なので，**非弾力的な需要下で効率的な行動を保証する分離可能な価格スキームは，弾性的な需要下でも同様**である.

7. 混雑課金

弾力性需要下において可変価格スキーム下での行動には次の2つの定理が成り立つ.

- **定理3**

  全ての道路ϕ,選択人数uにおいてコスト関数$c_\phi(u)$が$uc''_\phi(u) > -2c'_\phi(u)$を満たすとき，可変価格スキーム$P^{\bar{\eta}}$は社会的選択関数$x^k$を実装している

  →可変価格スキームによって効率的な状態x^kがわかる

  →効率的な配分を維持するために非弾力的需要下の状態と同様に，固定価格スキームを使うことで，この状態の維持を実現できる

- **定理4**

  需要関数がDで，プランナーが固定価格スキームを導入しているとすると，効率的配分x^kは任意の進化ダイナミクス下において安定である.

これらの定理は，非弾性需要下での定理1,2をを拡張することで成立する.

構成

1. はじめに
2. 非弾力的需要下の基本的な定式化
3. 非弾力的需要下の進化的実装
4. 非弾力的需要下の混雑課金
5. 弾力的需要下の基本的な定式化
6. 弾力的需要下の進化的実装
7. 弾力的需要下の混雑課金
8. **考察**

8. 考察

結論

- 分離可能な可変価格スキームを導入することで，プランナーがプレイヤーの効率的な配分を保証できることを示した.
- 可変価格スキームを用いて効率的な配分にした後，分離可能な固定価格スキームを用いて効率的な配分を維持することができることを示した.

展望

- 今回は，プランナーは進化プロセスの最終結果のみを考えているが，割引率を用いて，時間の経過に伴う行動の総利得を集計することで，プレイの時間的経路を評価できる.
- 通勤者がいつ車を運転するかを選択できるようにする.
- 道路ネットワークと同様にして，コンピュータネットワークにおける進化的な実装についても考えたい.

所感

- 全くわからなかったポテンシャルゲームを勉強する機会となった.
- 全てが数学で記述されていて，数学の奥深さを感じた.

- 本当に難しく，日々涙が出た.
- ChatGPTからの助けと議論によってなんとかここまで辿り着いて感動している.