

Fosgerau, Mogens, Emma Frejinger, and Anders Karlstrom.(2013)

A link based network route choice model with unrestricted choice set.

理論談話会 #5 行動モデルII

6月11日

B4 月田 光

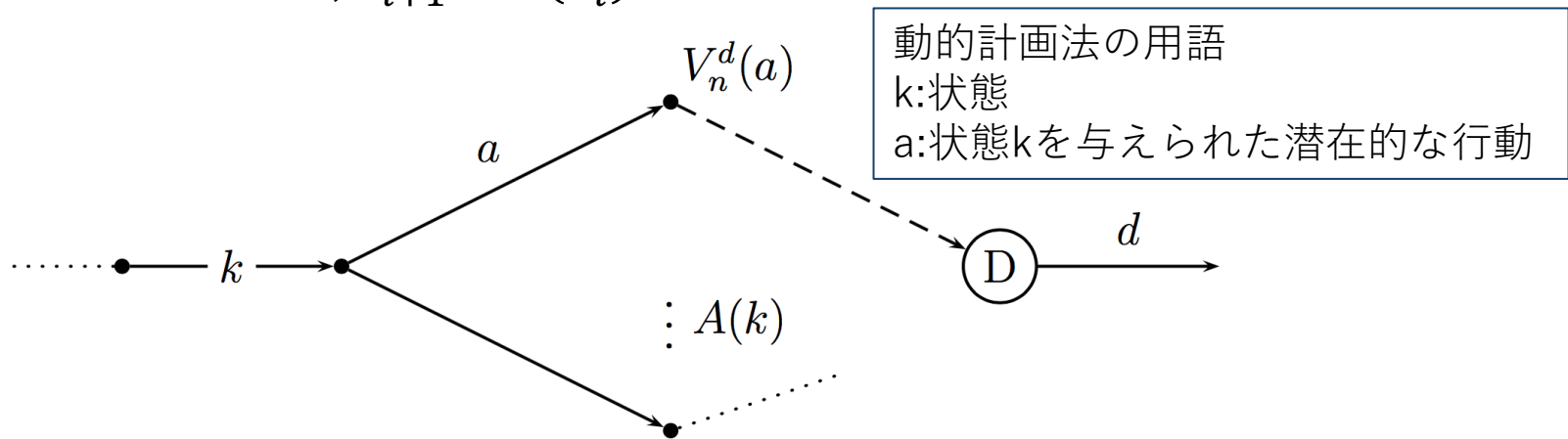
1. イントロダクション
2. Recursive logit model
3. Properties of the model
4. Link size attribute and illustrative example
5. Maximum likelihood estimation
6. Numerical results
7. 略.
8. Concluding remarks

- 経路選択モデルや、その選択を記述するモデルパラメータには様々な用途がある
 - 交通量予測
 - インフラ投資、通行料設定による交通規制、容量管理など
 - 経路案内ソフトウェア
- 経路探索モデルは、最小コスト経路を見つけるためのアルゴリズムに依存。
 - コストは多様なパラメータに計算される
 - 長さ、速度、遅延の可能性、左折、スピードバンプ、Uターンなど
- **Recursive logit model (RLモデル)を導入**
 - 選択肢が無限であることを除き、多項ロジット(MNL)の形をしている
- 逐次リンクの経路選択モデルと有限MNLモデルの繋がりを提示

• Recursive logit model (RLモデル)

- 各ノードで瞬間効用、誤差項、目的地への期待最大効用を考える
- 逐次的かつ再帰的な方法でパスが選択される
 - 逐次的
 - 経路選択はリンク選択の組み合わせ
 - 各ノードで効用最大化を目指して次のリンクを経路選択
 - 再帰的
 - 次の状態だけではなく、将来の状態まで考えた効用の式
→Bellman方程式の利用
- 選択肢は無有限集合であり、ループを含む経路を選択する可能性も持つ
 - 経路の集合に制限をかけることなく、一貫して推定できる
 - 計算効率の高い方法で予想ができる

- 簡略化のために、静的なネットワークを考える
 - ただし、紹介するモデルの定式化は、タイムインデックスを付けた動的な設定に対しても有効
- 有向連結グラフ(ネットワーク) $G = (A, v)$
 - A :リンクの集合 v :ノードの集合
- リンク $k, a \in A$
- リンク k の終点から出るリンクの集合 $A(k)$ $a \in A(k) \subset A$
- $O \rightarrow D$ のパスは、リンクの列 (k_0, \dots, k_I) で表される
 - ただし、 $\forall i < I, k_{i+1} \in A(k_i)$



- 効用関数

- 瞬間効用 $u_n(a|k) = v_n(a|k) + \mu \varepsilon_n(a)$

- 旅行者nが状態kにいる条件で選択肢集合A(k)の各選択肢に定義

- 確定項 $v_n(a|k) = v(x_{n,a|k}; \beta) < 0$

- リンクペアによって定義。これによりリンク加法でない属性を含むことができ、ターンやノードに関する属性を含むことができる

- 例：交差点の数、左折か否か

- 誤差項 $\varepsilon_n(a)$

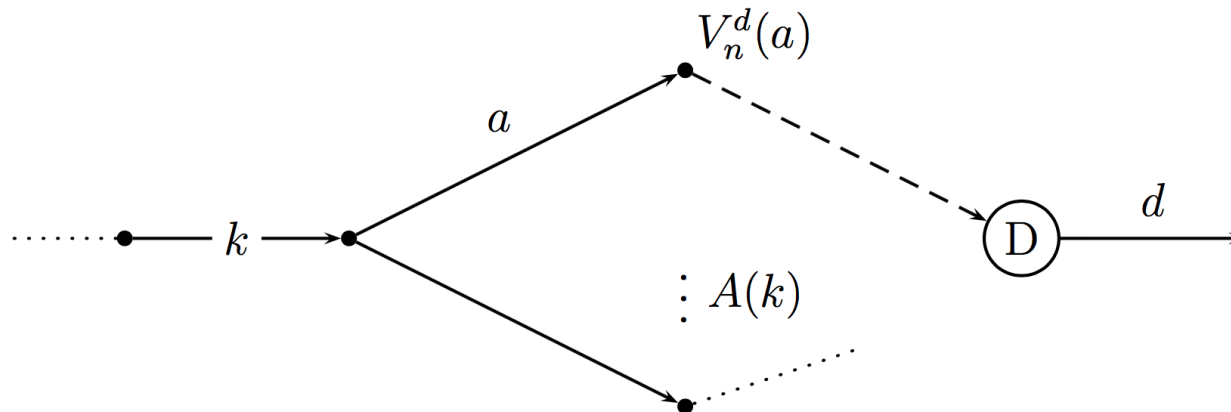
- 平均値0のガンベル分布と仮定

- モデル内の他のすべてのものから独立している

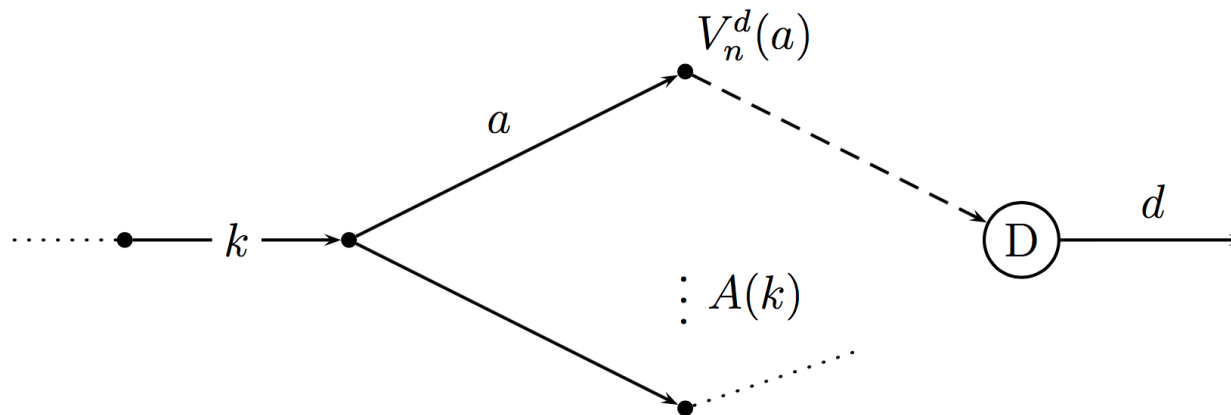
- 係数にスケールパラメータ μ がつく

- 期待効用 $V^d(a)$

- 行動aを選択した際の目的地dまでの期待効用



- 効用関数
 - 瞬間効用 $u_n(a|k) = v_n(a|k) + \mu\varepsilon_n(a)$
 - 期待効用 $V^d(a)$
- 終点のダミーリンク d
 - 目的地ノードからダミーリンク d を追加し吸収状態を定義
 - 全リンクの集合を $\tilde{A}^d = A \cup d$
 - 目的地ノードを終点とする全てのリンク k に対し、 $v(d|k) = 0$
- 旅行者はマルコフ確率過程によって次の状態を選択
 - 各状態 k でランダム効用 $\varepsilon_n(a)$, $a \in A(k)$ を観測
 - 効用は $v_n(a|k) + \mu\varepsilon_n(a) + V_n^d(a)$ で表される



- 効用関数

- 瞬間効用 $u_n(a|k) = v_n(a|k) + \mu\varepsilon_n(a)$
- 期待効用 $V^d(a)$

- 価値関数 $V_n^d(k)$

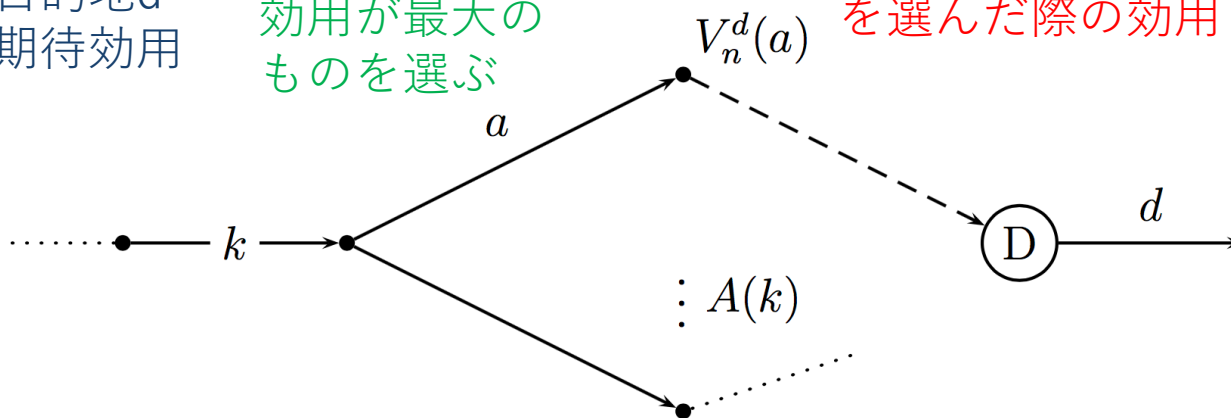
- 以下の式で表される。この式を、**Bellman方程式**という。

- $V_n^d(k) = E \left[\max_{a \in A(k)} \left(v_n(a|k) + V_n^d(a) + \mu\varepsilon_n(a) \right) \right] \quad \forall k \in A \quad (2)$

状態kを選んだ際の、目的地dまでの期待効用

$A(k)$ の中から効用が最大のものを選ぶ

状態kにおいて、次に状態aを選んだ際の効用



- 状態 k における、次の状態 a の選択確率はMNLモデルで表される

$$P_n^d(a|k) = \frac{\exp\left(\frac{1}{\mu} \left(v_n(a|k) + V_n^d(a) \right)\right)}{\sum_{a' \in A(k)} \exp\left(\frac{1}{\mu} \left(v_n(a'|k) + V_n^d(a') \right)\right)} \quad (3)$$

- また、価値関数は次のように書ける(導出は#2_GEVモデル参照)

$$V_n^d(k) = \begin{cases} \mu \ln \sum_{a' \in A} \delta(a'|k) \exp\left(\frac{1}{\mu} \left(v_n(a'|k) + V_n^d(a') \right)\right) & \forall k \in A \\ 0 & k = d \end{cases} \quad (4)$$

- ただし、

$$\delta(a|k) = \begin{cases} 1 & \text{if } a \in A(k) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- Bellman方程式を解く $V_n^d(k) = E \left[\max_{a \in A(k)} \left(v_n(a|k) + V_n^d(a) + \mu \varepsilon_n(a) \right) \right]$

- 簡単のために、添え字 n と d を省略し、 $V_n^d(k) = V(k)$ とする
- 対数をとって式(4)を変換する

$$e^{\frac{1}{\mu} V(k)} = \begin{cases} \sum_{a \in A} \delta(a|k) e^{\frac{1}{\mu} (v_n(a|k) + V_n^d(a))} & \forall k \in A \\ 1 & k = d \end{cases} \quad (5)$$

- さらにこれを、行列式で定義したい
- $\mathbf{M}(|\tilde{A}| \times |\tilde{A}|)$ を接続行列として、次のように定義

$$M_{ka} = \delta(a|k) e^{\frac{1}{\mu} v_n(a|k)} = \begin{cases} e^{\frac{1}{\mu} v_n(a|k)} & \text{if } a \in A(k) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (6)$$

- d は後続を持たないので、 \mathbf{M} は $k = d$ に全て0の行を持つ

- Bellman方程式を解く

$$\bullet e^{\frac{1}{\mu}V(k)} = \begin{cases} \sum_{a \in A} \delta(a|k) e^{\frac{1}{\mu}(v_n(a|k) + v_n^d(a))} & \forall k \in A \\ 1 & k = d \end{cases} \quad (5)$$

- $M(|\tilde{A}| \times |\tilde{A}|)$

$$M_{ka} = \delta(a|k) e^{\frac{1}{\mu}v_n(a|k)} = \begin{cases} e^{\frac{1}{\mu}v_n(a|k)} & \text{if } a \in A(k) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (6)$$

- さらに、次のように文字を定義する

- $\mathbf{b}(|\tilde{A}| \times 1)$

- $\mathbf{z}(|\tilde{A}| \times 1)$

$$b_k = \begin{cases} 0 & k \neq d \\ 1 & k = d \end{cases}$$

$$z_k = e^{\frac{1}{\mu}V(k)}$$

- すると、次のように簡潔な一次の形で書ける

$$\mathbf{z} = \mathbf{Mz} + \mathbf{b} \Leftrightarrow (\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{z} = \mathbf{b} \quad (7)$$

- Bellman方程式を解く

$$\mathbf{z} = \mathbf{M}\mathbf{z} + \mathbf{b} \Leftrightarrow (\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{z} = \mathbf{b} \quad (7)$$

- \mathbf{z} が解を持つ条件： $\mathbf{I} - \mathbf{M}$ が逆行列を持つこと
 - 逆行列を持たない可能性もあり、パスの数や瞬間効用 $\frac{1}{\mu}v(a|k)$ による
 - β 次第で $\mathbf{I} - \mathbf{M}$ が不可逆となるため、パラメータ推定で考慮する必要
- 行列 \mathbf{M}^m は長さが m リンクの任意のリンクペア間のパス効用を含む
 - 2地点間を m ステップで移動することの効用は、選択肢が多いほど大きくなる
 - 確定項は定義上負だが0に近い場合、確率項によっては効用が正になることがある。
- 中規模ネットワークでは(7)は直接解けることが多いが、大きなネットワークでは直接解法が不可能な場合があり、反復解法を使用することができる。

- 選択確率に対応する行列 \mathbf{P} を作る
 - 目的地に対する次のリンクの選択確率はオリジンに依存しない。
 - よって確率(3) $P_n^d(a|k) = \frac{\exp\left(\frac{1}{\mu}(v_n(a|k) + v_n^d(a))\right)}{\sum_{a' \in A(k)} \exp\left(\frac{1}{\mu}(v_n(a'|k) + v_n^d(a'))\right)}$ を行列 \mathbf{P} に整理する。状態 k に対応する行は次のようになる。

$$P_k = \frac{M_k \circ Z^T}{M_k Z} \quad (8)$$

ただし、 \circ は要素ごとの積、 M_k は \mathbf{M} の k 行目を表す。

参考

$$M_{ka} = \begin{cases} e^{\frac{1}{\mu} v_n(a|k)} & \text{if } a \in A(k) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad Z_k = e^{\frac{1}{\mu} V(k)}$$

- 経路選択確率

- 経路 $\sigma = \{k_i\}_{i=0}^I = \{k_0, k_1, \dots, k_I\}$ について考える
 - ただし、 k_0 は出発リンク、 $k_I = d$ である

- 経路 σ の選択確率 = 経路 σ が観測された時の尤度 $P(\sigma)$ は

$$\begin{aligned}
 P(\sigma) &= \prod_{i=0}^{I-1} P(k_{i+1}|k_i) \\
 &= \prod_{i=0}^{I-1} \frac{\exp\left(\frac{1}{\mu} (v(k_{i+1}|k_i) + V(k_{i+1}))\right)}{\sum_{a \in A(k)} \exp\left(\frac{1}{\mu} (v(a|k_i) + V(a))\right)} \\
 &= \prod_{i=0}^{I-1} \exp\left(\frac{1}{\mu} (v(k_{i+1}|k_i) + V(k_{i+1}) - V(k_i))\right) \\
 &= \exp\left(-\frac{1}{\mu} V(k_0)\right) \prod_{i=0}^{I-1} \exp\left(\frac{1}{\mu} v(k_{i+1}|k_i)\right)
 \end{aligned}$$

定義から
 (分母) = $e^{\frac{1}{\mu} V(k)}$

定義から
 $V(d) = 0$

(9)

- 経路選択確率

- $v(\sigma) = \sum_{i=0}^{I-1} v(k_{i+1}|k_i)$ とおくと

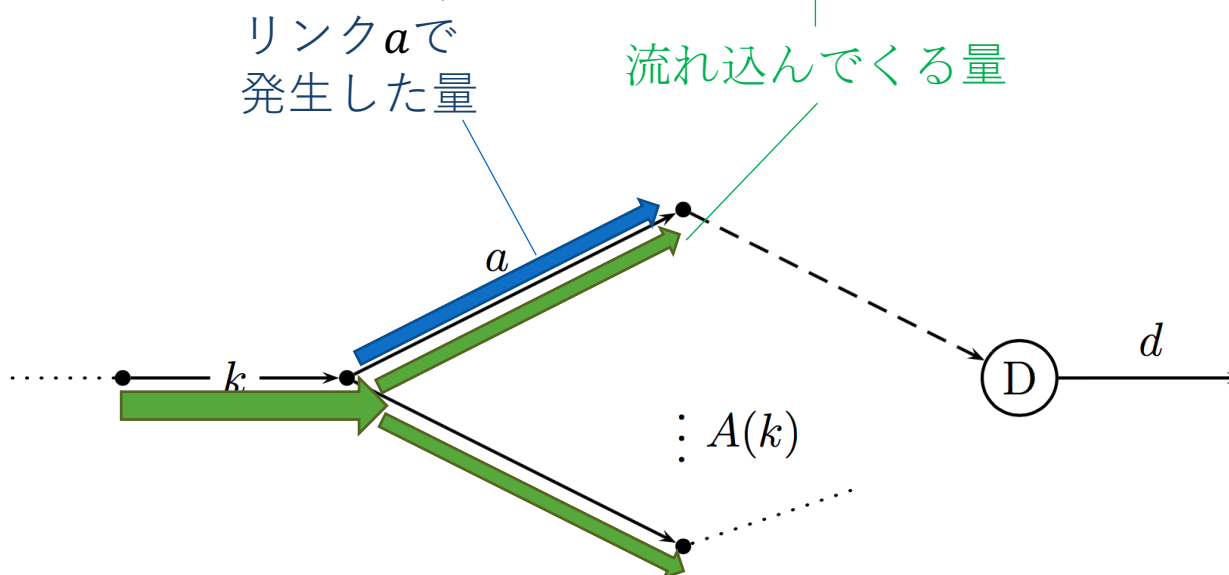
$$P(\sigma) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{\mu} V(k_0)\right) \prod_{i=0}^{I-1} \exp\left(\frac{1}{\mu} v(k_{i+1}|k_i)\right)}{\exp\left(\frac{1}{\mu} v(\sigma)\right)} \quad (9)$$

$$= \frac{\exp\left(\frac{1}{\mu} v(\sigma)\right)}{\exp\left(\frac{1}{\mu} V(k_0)\right) \sum_{\sigma' \in \Omega} \exp\left(\frac{1}{\mu} v(\sigma')\right)} \quad (10)$$

- ここで、 Ω は全パスの集合 (重複を含むため無限の要素が存在)
- 式(10)の分子は経路 σ の確定項、分母は可能な経路の確定項和
→ このモデルは無限の選択肢を持つ MNLモデルと同等
- よってIIA特性を持つ
→ 経路 σ_1 と σ_2 の確率の比は $v(\sigma_1) - v(\sigma_2)$ のみに依存

- リンク交通量：リンク d を終点とするトリップを考える
 - $F(a)$ ：リンク a の交通量(の期待値)
 - $G(a)$ ：リンク a を起点とするトリップの需要
- 以下のような関係になる

$$F(a) = \underbrace{G(a)}_{\text{リンク } a \text{ で発生した量}} + \underbrace{\sum_{k \in A} P(a|k)F(k)}_{\text{流れ込んでくる量}}$$



- リンク交通量：リンク d を終点とするトリップを考える
 - $F(a)$ ：リンク a の交通量(の期待値)
 - $G(a)$ ：リンク a を起点とするトリップの需要
- 以下のような関係になる

$$F(a) = \underbrace{G(a)}_{\text{リンク}a\text{で発生した量}} + \underbrace{\sum_{k \in A} P(a|k)F(k)}_{\text{流れ込んでくる量}}$$

- ベクトルを使って表すと次のようになる

$$\mathbf{F} = \mathbf{G} + \mathbf{P}^T \mathbf{F} \Leftrightarrow (\mathbf{I} - \mathbf{P}^T) \mathbf{F} = \mathbf{G} \quad (11)$$

- $(\mathbf{I} - \mathbf{P}^T)$ は可逆(Baillon and Cominetti (2008))
→線形方程式でリンク交通量を計算できる

- 選択肢をサンプリングすることによる推定
 - 「MNLでは選択肢数を絞っても推定可能」 McFadden (1978)
→今回は元の選択肢数が無限だけど、同様に可能なのでは？
 - パスのサンプリングは、RLモデルの式(7), (8)を使用して抽出その後、Frejinger(2009)の方法で補正し、モデル推定に使用
 - $\pi(D|\sigma)$: 観測された選択肢 σ が与えられ、選択肢集合 D をサンプリングする確率。
 - 正の条件付き特性を仮定 $\sigma \in D \Rightarrow \pi(D|\sigma) > 0$
 - 選択肢 σ は集合 D に常に含まれていると仮定 $\sigma \notin D \Rightarrow \pi(D|\sigma) = 0$
 - McFadden(1978)修正された確率に基づく推定値の一貫性立証

$$\frac{\exp\left(\frac{1}{\mu}v(\sigma) + \ln \pi(D|\sigma)\right)}{\sum_{\sigma' \in D} \exp\left(\frac{1}{\mu}v(\sigma') + \ln \pi(D|\sigma')\right)}$$

- 選択肢をサンプリングすることによる推定
 - McFadden(1978)修正された確率に基づく推定値の一貫性立証

$$\frac{\exp\left(\frac{1}{\mu}v(\sigma) + \ln \pi(D|\sigma)\right)}{\sum_{\sigma' \in D} \exp\left(\frac{1}{\mu}v(\sigma') + \ln \pi(D|\sigma')\right)}$$

- この論文の文脈に直すと、次のようになる

$$E \left(\sum_{\sigma \in \Omega} \sum_{D \subseteq \Omega} P^*(\sigma) \pi(D|\sigma) \ln \left[\frac{\exp\left(\frac{1}{\mu}v(\sigma|\beta) + \ln \pi(D|\sigma)\right)}{\sum_{\sigma' \in D} \exp\left(\frac{1}{\mu}v(\sigma'|\beta) + \ln \pi(D|\sigma')\right)} \right] \right)$$

これは、次のように書き直せる

$$E \left(\sum_{D \subseteq \Omega} \left(\frac{\sum_{\sigma' \in \Omega} \exp\left(\frac{1}{\mu}v(\sigma'|\beta^*)\right) \pi(D|\sigma')}{\sum_{\sigma' \in \Omega} \exp\left(\frac{1}{\mu}v(\sigma'|\beta^*)\right)} \right) \sum_{\sigma \in D} \frac{\exp\left(\frac{1}{\mu}v(\sigma|\beta^*)\right) \pi(D|\sigma)}{\sum_{\sigma' \in D} \exp\left(\frac{1}{\mu}v(\sigma'|\beta^*)\right) \pi(D|\sigma')} \ln \left[\frac{\exp\left(\frac{1}{\mu}v(\sigma|\beta) + \ln \pi(D|\sigma)\right)}{\sum_{\sigma' \in D} \exp\left(\frac{1}{\mu}v(\sigma'|\beta) + \ln \pi(D|\sigma')\right)} \right] \right) \quad (12)$$

これはMcFadden(1978)の一般形 $E[\sum_{\sigma \in D} \phi(\sigma|\beta^*) \ln \phi(\sigma|\beta)]$ を持つ項の期待値として認識できる。

。。。らしい。本当か？

- 選択肢をサンプリングすることによる推定
 - 式展開がよく分からないなりに(無理やり)解釈してみた

$$\textcircled{1} \quad \frac{\exp\left(\frac{1}{\mu}v(\sigma)+\ln \pi(D|\sigma)\right)}{\sum_{\sigma' \in D} \exp\left(\frac{1}{\mu}v(\sigma')+\ln \pi(D|\sigma')\right)} \rightarrow E \left(\sum_{\sigma \in \Omega} \sum_{D \subseteq \Omega} P^*(\sigma)\pi(D|\sigma) \ln \left[\frac{\exp\left(\frac{1}{\mu}v(\sigma|\beta)+\ln \pi(D|\sigma)\right)}{\sum_{\sigma' \in D} \exp\left(\frac{1}{\mu}v(\sigma'|\beta)+\ln \pi(D|\sigma')\right)} \right] \right)$$

$$E \left[\ln \frac{\exp\left(\frac{1}{\mu}v(\sigma)+\ln \pi(D|\sigma)\right)}{\sum_{\sigma' \in D} \exp\left(\frac{1}{\mu}v(\sigma')+\ln \pi(D|\sigma')\right)} \right] = \sum_{\sigma \in \Omega} \sum_{D \subseteq \Omega} P^*(\sigma)\pi(D|\sigma) \ln \left[\frac{\exp\left(\frac{1}{\mu}v(\sigma|\beta)+\ln \pi(D|\sigma)\right)}{\sum_{\sigma' \in D} \exp\left(\frac{1}{\mu}v(\sigma'|\beta)+\ln \pi(D|\sigma')\right)} \right]$$

なら理解できる

$$\textcircled{2} \quad E \left(\sum_{\sigma \in \Omega} \sum_{D \subseteq \Omega} P^*(\sigma)\pi(D|\sigma) \ln \left[\frac{\exp\left(\frac{1}{\mu}v(\sigma|\beta)+\ln \pi(D|\sigma)\right)}{\sum_{\sigma' \in D} \exp\left(\frac{1}{\mu}v(\sigma'|\beta)+\ln \pi(D|\sigma')\right)} \right] \right)$$

$$\rightarrow E \left(\sum_{D \subseteq \Omega} \left(\frac{\sum_{\sigma' \in \Omega} \exp\left(\frac{1}{\mu}v(\sigma'|\beta^*)\right)\pi(D|\sigma')}{\sum_{\sigma' \in \Omega} \exp\left(\frac{1}{\mu}v(\sigma'|\beta^*)\right)} \right) \sum_{\sigma \in D} \frac{\exp\left(\frac{1}{\mu}v(\sigma|\beta^*)\right)\pi(D|\sigma)}{\sum_{\sigma' \in D} \exp\left(\frac{1}{\mu}v(\sigma'|\beta^*)\right)\pi(D|\sigma')} \ln \left[\frac{\exp\left(\frac{1}{\mu}v(\sigma|\beta)+\ln \pi(D|\sigma)\right)}{\sum_{\sigma' \in D} \exp\left(\frac{1}{\mu}v(\sigma'|\beta)+\ln \pi(D|\sigma')\right)} \right] \right)$$

$$\sum_{\sigma \in \Omega} \sum_{D \subseteq \Omega} P^*(\sigma)\pi(D|\sigma) \ln \left[\frac{\exp\left(\frac{1}{\mu}v(\sigma|\beta)+\ln \pi(D|\sigma)\right)}{\sum_{\sigma' \in D} \exp\left(\frac{1}{\mu}v(\sigma'|\beta)+\ln \pi(D|\sigma')\right)} \right] = \sum_{\sigma \in \Omega} \sum_{D \subseteq \Omega} \frac{\exp\left(\frac{1}{\mu}v(\sigma|\beta^*)\right)\pi(D|\sigma)}{\sum_{\sigma' \in \Omega} \exp\left(\frac{1}{\mu}v(\sigma'|\beta^*)\right)} \ln \left[\frac{\exp\left(\frac{1}{\mu}v(\sigma|\beta)+\ln \pi(D|\sigma)\right)}{\sum_{\sigma' \in D} \exp\left(\frac{1}{\mu}v(\sigma'|\beta)+\ln \pi(D|\sigma')\right)} \right]$$

$$= \sum_{\sigma \in \Omega} \sum_{D \subseteq \Omega} \frac{\sum_{\sigma' \in \Omega} \exp\left(\frac{1}{\mu}v(\sigma'|\beta^*)\right)\pi(D|\sigma')}{\sum_{\sigma' \in \Omega} \exp\left(\frac{1}{\mu}v(\sigma'|\beta^*)\right)} \frac{\exp\left(\frac{1}{\mu}v(\sigma|\beta^*)\right)\pi(D|\sigma)}{\sum_{\sigma' \in D} \exp\left(\frac{1}{\mu}v(\sigma'|\beta^*)\right)\pi(D|\sigma')} \ln \left[\frac{\exp\left(\frac{1}{\mu}v(\sigma|\beta)+\ln \pi(D|\sigma)\right)}{\sum_{\sigma' \in D} \exp\left(\frac{1}{\mu}v(\sigma'|\beta)+\ln \pi(D|\sigma')\right)} \right]$$

$$= \sum_{D \subseteq \Omega} \left(\frac{\sum_{\sigma' \in \Omega} \exp\left(\frac{1}{\mu}v(\sigma'|\beta^*)\right)\pi(D|\sigma')}{\sum_{\sigma' \in \Omega} \exp\left(\frac{1}{\mu}v(\sigma'|\beta^*)\right)} \right) \sum_{\sigma \in D} \frac{\exp\left(\frac{1}{\mu}v(\sigma|\beta^*)\right)\pi(D|\sigma)}{\sum_{\sigma' \in D} \exp\left(\frac{1}{\mu}v(\sigma'|\beta^*)\right)\pi(D|\sigma')} \ln \left[\frac{\exp\left(\frac{1}{\mu}v(\sigma|\beta)+\ln \pi(D|\sigma)\right)}{\sum_{\sigma' \in D} \exp\left(\frac{1}{\mu}v(\sigma'|\beta)+\ln \pi(D|\sigma')\right)} \right]$$

なら理解できる

- 選択肢をサンプリングすることによる推定
 - 式展開がよく分からないなりに(無理やり)解釈してみた

$$\textcircled{3} \quad \sum_{D \subseteq \Omega} \left(\frac{\sum_{\sigma' \in \Omega} \exp\left(\frac{1}{\mu} v(\sigma' | \beta^*)\right) \pi(D | \sigma')}{\sum_{\sigma' \in \Omega} \exp\left(\frac{1}{\mu} v(\sigma' | \beta^*)\right)} \right) \sum_{\sigma \in D} \frac{\exp\left(\frac{1}{\mu} v(\sigma | \beta^*)\right) \pi(D | \sigma)}{\sum_{\sigma' \in D} \exp\left(\frac{1}{\mu} v(\sigma' | \beta^*)\right) \pi(D | \sigma')} \ln \left[\frac{\exp\left(\frac{1}{\mu} v(\sigma | \beta) + \ln \pi(D | \sigma)\right)}{\sum_{\sigma' \in D} \exp\left(\frac{1}{\mu} v(\sigma' | \beta) + \ln \pi(D | \sigma')\right)} \right]$$

$$\rightarrow \mathbb{E}[\sum_{\sigma \in D} \phi(\sigma | \beta^*) \ln \phi(\sigma | \beta)]$$

$$\sum_{D \subseteq \Omega} \left(\frac{\sum_{\sigma' \in \Omega} \exp\left(\frac{1}{\mu} v(\sigma' | \beta^*)\right) \pi(D | \sigma')}{\sum_{\sigma' \in \Omega} \exp\left(\frac{1}{\mu} v(\sigma' | \beta^*)\right)} \right) \sum_{\sigma \in D} \frac{\exp\left(\frac{1}{\mu} v(\sigma | \beta^*)\right) \pi(D | \sigma)}{\sum_{\sigma' \in D} \exp\left(\frac{1}{\mu} v(\sigma' | \beta^*)\right) \pi(D | \sigma')} \ln \left[\frac{\exp\left(\frac{1}{\mu} v(\sigma | \beta) + \ln \pi(D | \sigma)\right)}{\sum_{\sigma' \in D} \exp\left(\frac{1}{\mu} v(\sigma' | \beta) + \ln \pi(D | \sigma')\right)} \right]$$

$$= \mathbb{E} \left[\sum_{\sigma \in D} \frac{\exp\left(\frac{1}{\mu} v(\sigma | \beta^*)\right) \pi(D | \sigma)}{\sum_{\sigma' \in D} \exp\left(\frac{1}{\mu} v(\sigma' | \beta^*)\right) \pi(D | \sigma')} \ln \left[\frac{\exp\left(\frac{1}{\mu} v(\sigma | \beta) + \ln \pi(D | \sigma)\right)}{\sum_{\sigma' \in D} \exp\left(\frac{1}{\mu} v(\sigma' | \beta) + \ln \pi(D | \sigma')\right)} \right] \right]$$

$$= \mathbb{E}[\sum_{\sigma \in D} \phi(\sigma | \beta^*) \ln \phi(\sigma | \beta)]$$

- ④ McFadden(1978)が検討した一般形 $\mathbb{E}[\sum_{\sigma \in D} \phi(\sigma | \beta^*) \ln \phi(\sigma | \beta)]$ を持つ項

This may be recognized as the expectation of a term having the general form

$\mathbb{E}[\sum_{\sigma \in D} \phi(\sigma | \beta^*) \ln \phi(\sigma | \beta)]$, which is exactly the case considered by McFad-

den (1978). Consistency of the estimates then follows.

これはMcFaddenの論文を探しても該当箇所が分からず、最後まで分からなかった

- リンクの重複

- あるODを考えた時、経路によってはパスを共有している
→この物理的な重複によりパスは観測されない属性を共有し、効用に相関

- 例：1→5の経路

- 1から左向き
{1,2,3,4,5}, {1,2,3,5}, {1,2,4,5}
- 1から右向き
{1,5}

- コストは全て4

→普通のMNLなら全て1/4

- しかし、感覚的には左右に半々くらいに分かれ、{1,5}が1/2になる

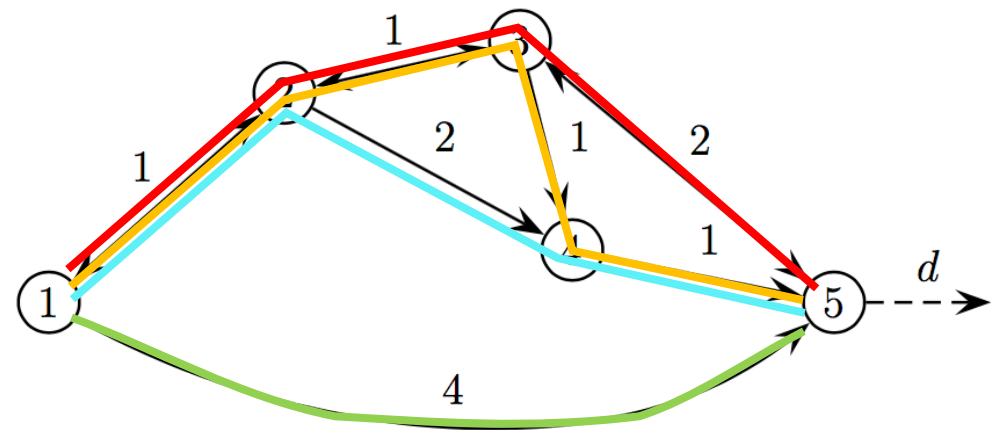


Figure 2: Illustrative example

- このズレを補正するためにリンクの共有を考える

- 相関のある経路の効用を補正してモデル化するための方法を考える

- リンクの重複
 - 相関のある経路の効用を補正してモデル化するための方法を考える

- 従来の研究

- 共通性係数(c-logitモデル) (Casceeta et al.; 1996)
- PS属性(PSLモデル) (Ben-Akiva and Bierlaire; 1999)
 - 与えられた経路 j , j のリンク集合 Γ_j , 選択肢集合 C , リンク a の長さ L_a に対し

$$PS_{jn} = \sum_{a \in \Gamma_j} \frac{L_a}{L_j} \frac{1}{\sum_{i \in C_n} \delta_{ai}} \quad (13)$$

リンク a を通る経路数

- 経路 j がどのリンクとも重複していないと1、重複度大で0に近づく
 - パスの効用の補正は $\beta_{PS} \ln PS_{jn}$ で表し、重複が全くない経路で $\ln PS_{jn} = 0$
 - しかし、これらには二つ問題点がある
 - 全経路選択肢の列挙が必要
 - リンク加法的ではない
- よってRLモデルでは使えない ⇒ **Link Size(LS)の導入**

- リンクサイズ属性(LS)

- リンク a を使用するパス数の代わりに、オーバーラップ量の代理として期待リンクフロー $F(a)$ を使用する
- 期待リンクフローは式(11) $(I - P^T)F = G$ で計算できる

- 定義

$$\boxed{LS^{od} = F^{od}(\tilde{\beta})} \quad (14)$$

- LS^{od} : あるODに対する $(A \times 1)$ のベクトル。 k 個目の要素はリンク k のLS属性
- $\tilde{\beta}$: 効用の計算に使った説明変数のパラメータ β 。推定値は $\hat{\beta}$ と区別
- $F^{od}(\tilde{\beta})$ は式(11)の $(I - P^d(\tilde{\beta})^T) F^{od}(\tilde{\beta}) = G^o$ により算出
- G^o : オリジンリンクが1、他が0の値を持つ発生流量ベクトル
- $G^o \mathbf{1} = 1$ より、 F^{od} は正規化されたと見ることもできる

- リンクサイズ属性(LS)と他の補正との比較

- 先ほどと同様に、1をO、5をD
- コストはリンク長のみ
- RLモデル用に、5からダミーリンクdを追加
- RLモデル用にリンク21のコストを0に設定し、スタートリンクとする
- 1以外でのUターンを認めない (Uターンに大きなコストを導入することで実現)
- 長さに対するパラメータを $\tilde{\beta}_l = -1.5$ とする

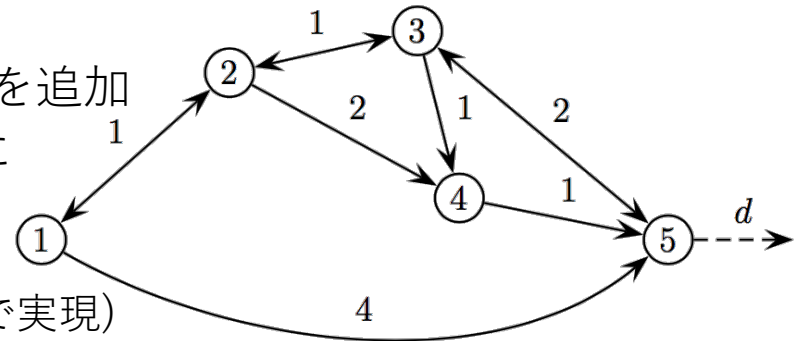


Figure 2: Illustrative example

- MNLでは1/4ずつ
- RLも同様、重複が考慮されていない
- RLはループもあるため、和が1にならず、均等配分でもない
 - ただし $\tilde{\beta}_l$ の大きさを大で1/4に近づく
- $\tilde{\beta}_{PS} = 2.5, \tilde{\beta}_{LS} = -0.75$
- PSLはPSを導入して改善、同様にRLもLSを導入して改善。これらは近い
- LSの方がパスの列挙が必要ないという点で優れている
- ただ、 $\tilde{\beta}_{LS}$ の感度を調査する必要がある

Paths	Logit	RL	PSL	RL with LS
1: 12, 23, 35	0.25	0.2495	0.20	0.19
2: 12, 23, 34, 45	0.25	0.2502	0.12	0.13
3: 12, 24, 45	0.25	0.2495	0.20	0.19
4: 15	0.25	0.2495	0.48	0.48

Table 1: Path probabilities for illustrative example

- パラメータ $\tilde{\beta}_{LS}$ の検討

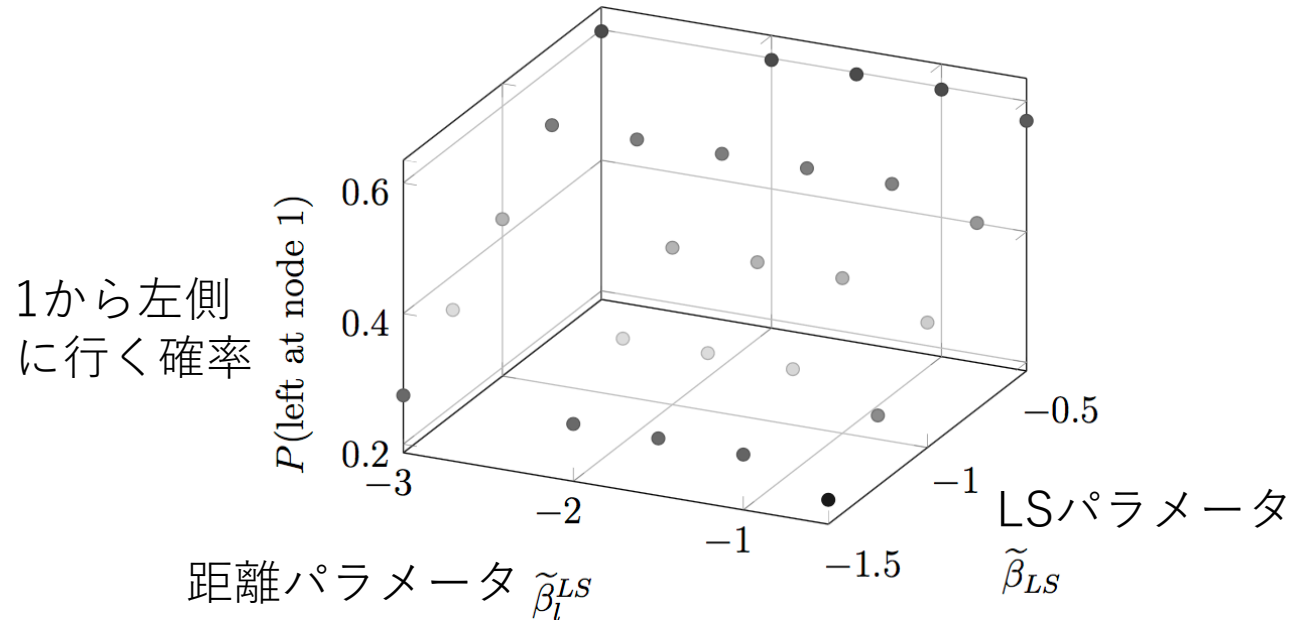


Figure 3: Probability of going left at node 1 as a function of $\tilde{\beta}_{LS}$ and $\tilde{\beta}_l^{LS}$

- $\tilde{\beta}_{LS}$ にあまり敏感ではない
- $|\tilde{\beta}_{LS}|$ が大きくなると減少
- LS属性を含めると、行列MがOD固有になるため、計算量は大きくなる

- パラメータの最尤推定

- 式(9) $P(\sigma) = \exp\left(-\frac{1}{\mu}V(k_0)\right) \prod_{i=0}^{I-1} \exp\left(\frac{1}{\mu}v(k_{i+1}|k_i)\right)$ で定義された経路確率を用いて最尤推定を行う
- 非線形最適化アルゴリズムBFGS法を使用

- 一次方程式(7) $(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{z} = \mathbf{b}$ を解く

- 対数尤度関数が定義されるように、制約(仮定)をする(無限ループ経路除去など)。

- 観測 $n = 1, \dots, N$ に対し、対数尤度関数は次のようになる

$$LL(\beta) = \ln \prod_{n=1}^N P(\sigma_n) = \frac{1}{\mu} \sum_{n=1}^N \sum_{i=0}^{I_n-1} v(k_{i+1}|k_i) - V(k_0)$$

- 瞬間効用関数が説明変数の線形和であるとする、次のようにいえる

$$\frac{\partial LL(\beta)}{\partial \beta_q} = \frac{1}{\mu} \sum_{n=1}^N \left[\sum_{i=0}^{I_n-1} x_{i+1|i}^q - \frac{\partial V(k_0^n)}{\partial \beta_q} \right] \quad (15)$$

- パラメータの最尤推定

- 式(15)
$$\frac{\partial LL(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_q} = \frac{1}{\mu} \sum_{n=1}^N \left[\sum_{i=0}^{I_n-1} x_{i+1|i}^q - \frac{\partial V(k_0^n)}{\partial \beta_q} \right]$$

- $\frac{\partial V(k_0^n)}{\partial \beta_q}$ を計算するため、式(7) $(\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{z} = \mathbf{b}$ より

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \beta_q} = (\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1} \left[\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \beta_q} \right] \mathbf{z} \quad (16)$$

- 一方、 $z_k = e^{\frac{1}{\mu}V(k)}$ より $\frac{\partial z}{\partial \beta_q} = z \circ \frac{1}{\mu} \frac{\partial V}{\partial \beta}$ なので、

$$\frac{\partial V(k_0^n)}{\partial \beta_q} = \mu \frac{1}{z_0} \left(\frac{\partial z}{\partial \beta_q} \right)_0 \quad (17)$$

- ただし、右下の添え字はオリジンリンクに対応する要素

- このように、勾配を解析的に計算することもできる

- ただし式(7)や(9)のおかげで、適当な差分をとって数値的に計算の方が効率的

- スウェーデン中央部、Borlängeの実ネットワークで推定
 - 3,077ノード, 7,459リンク, 21,452リンクペア(行列 \mathbf{M} で0でない要素数)
 - シミュレーションされた観測結果を用いた検証、モデル推定と
 - 実際のGPSデータに基づく推定結果を行う

- 瞬間効用を次のように設定

$$v(a|k) = \beta_{TT}TT_a + \beta_{LT}LT_{a|k} + \beta_{LC}LC_a + \beta_{UT}UT_{a|k} \quad (18)$$

- TT_a : リンク a の移動時間(分)
- $LT_{a|k}$: 左折ダミー。 k から a への折れ曲りが、40~177度で1, それ以外で0.
 - リンクペアの約1/5が左折に相当
 - 40度という閾値は、この付近であまり敏感でない。閾値を30度にしても約1/5。
- LC_a : 全てのリンクで1. 交差点の多いパスにペナルティを与える目的。
- $UT_{a|k}$: ターンダミー。 k から a への折曲りが、177° 以上で1, それ以外で0.
Uターンに対して大きなペナルティを与える目的で導入
 - β_{UT} は、-20付近で他のパラメータ推定値が影響を受けない
 - ターン角は3.1ラジアンを閾値とした
 - リンクペアの1/3がUターンに分類される

- シミュレーションデータでのモデル推定
 - 10個のODペアについて、それぞれ500の観測経路を作成
 - 効用関数は $v(a|k) = \beta_{TT}TT_a + \beta_{LT}LT_{a|k} + \beta_{LC}LC_a + \beta_{UT}UT_{a|k}$
 - 初期パラメータとして、以下を設定
 - $\tilde{\beta}_{TT} = -2, \tilde{\beta}_{LT} = -1, \tilde{\beta}_{LC} = -1, \tilde{\beta}_{UT} = -20$
- 各ODに対して平均39(最大44、最小35)のパス
- パスの移動時間は平均9分(最長12.3分、最短8.8分)
- 5000のパスのうち、35のパス(0.7%)でループを持つ
 - このうち、1つのパスで4つのループ、8つで2つのループ、残り26こは1つのループ

- 各標本でパラメータ推定した結果
 - 全ての推定値で、5%有意の水準で真の値との有意差は無い
 - パラメータと標準誤差は偏りが無い
 - パラメータ推定値の平均は、設定したパラメータに近い値を示した

Sample	$\hat{\beta}_{TT}$	Std. Err.	$\hat{\beta}_{LT}$	Std. Err.	$\hat{\beta}_{LC}$	Std. Err.
1	-1.91	0.21	-1.02	0.09	-1.07	0.06
2	-1.97	0.22	-0.99	0.09	-1.04	0.06
3	-1.80	0.21	-1.09	0.09	-1.07	0.06
4	-2.38	0.26	-0.88	0.09	-1.01	0.06
5	-2.20	0.24	-0.96	0.08	-0.93	0.05
6	-2.30	0.26	-0.96	0.09	-0.96	0.06
7	-1.69	0.18	-1.00	0.08	-1.11	0.06
8	-1.84	0.20	-1.04	0.08	-1.04	0.05
9	-2.40	0.29	-1.05	0.09	-0.89	0.06
10	-1.88	0.20	-0.99	0.08	-0.976	0.05
Average	-2.04	0.23	-1.00	0.09	-1.01	0.06
Std. Err.	0.26		0.06		0.07	

$\hat{\beta}_{UT}$ is fixed to -20

- 実際のGPSデータに基づく推定

- 2年に渡り200台の車両のGPSトレースのデータがあった
 - 速度監視を主目的とした交通安全調査のために収集
- そのうち、頻度が高い24台の車両のデータを用いて分析
- そのサンプルは最低5つのリンクを持つ1832トリップで成り立つ
 - 466の目的地と37,000以上のリンクの選択がある

- 推定結果(右表)

- 効用関数は先ほどと同じものを使用
 - $v(a|k) = \beta_{TT}TT_a + \beta_{LT}LT_{a|k} + \beta_{LC}LC_a + \beta_{UT}UT_{a|k}$
- Uターンに関するパラメータ β_{UT} は-20に固定
- 推定値は優位性が高く、符号、大きさは妥当

- 次に、式(14)のLSも含めたモデルでも推定
- LS期待された符号を持つ場合、最終的な尤度関数に顕著な改善が見られる

- 交差点は6秒、左折は20秒に相当するコスト

	RL	RL with LS
$\hat{\beta}_{TT}$	-2.45	-3.20
Std. Err.	0.06	0.06
t-test	-40.83	-52.59
$\hat{\beta}_{LT}$	-1.01	-1.11
Std. Err.	0.03	0.03
t-test	-33.67	-31.90
$\hat{\beta}_{LC}$	-0.40	-0.32
Std. Err.	0.01	0.01
t-test	-40.00	-21.98
$\hat{\beta}_{LS}$		-0.23
Std. Err.		0.02
t-test		-13.20
$LL(\hat{\beta})$	7481.5	7213.2
$\hat{\beta}_{UT}$ is fixed to -20		

- 本論文では選択肢集合に制約のない経路選択のモデルであるRLモデルを提示した
 - これはMNLモデルと同等である
- 次にパスサイズ属性に似た、RLモデルでも使える重複するリンクの相関の修正方法を提案。リンクサイズ属性
- 続いて、実ネットワークでシミュレーションを行い、パラメータ推定を行なった

• 今後

- 移動時間の価値の推定、時短のための支払意思の推定は多数行われてきた
- この推定は交通インフラ投資を評価するために世界中で使用されている
- GPSデータにより多くのルート選択を観測できるようになった。これにより既存の実証研究による選好データは変わる可能性があり、本論文はこれらの選択をモデル化する方法を提案

- 今後の作業は、効用の相関をモデル化するリンクサイズ以外の方法を探求
 - ネスト化されたアプローチ
 - ランダムパラメータ など

- マルコフ交通平衡が適用されない場合にRLモデルを動的トラフィック割り当てに用いること

- 今回は静的なネットワークだったが、リンク属性が決定的である限り、モデルは動的ネットワークでもあるはず