Dynamic discrete choice structural models
: A survey

Aguirregabiria, V., Mira, P.,

Jounrnal of Econmeterics Vol.156, pp. 38-67, 2010

理論談話会#5（2020/06/11）

M2 出原 昇馬

論文構成

動的離散選択モデル(Dynamic discrete choice structural models)に関するレビュー論文.

2章 基本形と応用例

2.1 シングルエージェントモデル
- Rustのモデル(Ex.1)
- Eckstein-Keane-Wolpinのモデル(Ex.2)

2.2 動的一般均衡モデル(Ex.3)

2.3 動学ゲーム(Ex.4)

3,4,5章 推定法

3章 シングルエージェントモデル
- NFXP法/CCP法/NPL法など
- 逐次的EM法など

4章 動学ゲーム
- 2ステップ法

5章 動的一般均衡モデル

※参考：楠田康之『経済分析のための構造推定アルゴリズム』2,3章，三恵社，2019

2. Models and examples

動的離散選択モデルの定式化

$t \in [0, T]$: 期間

i: 個人（エージェント）

s_{it}: t期におけるiの**状態**

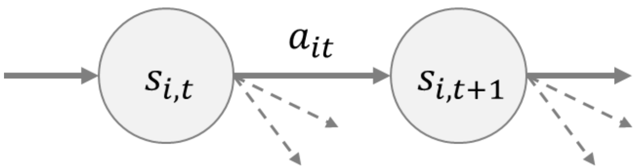
a_{it}: t期におけるiの**行動**

$\beta \in (0,1)$: 割引率

個人iは状態遷移に伴う**効用の割引総和の期待値**

$$E\left(\sum_{j=0}^{T-t} \beta^j \underbrace{U(a_{i,t+j}, s_{i,t+j})}_{\text{毎期の効用}} \middle| a_{it}, s_{it}\right)$$

を最大化するように行動列を選択する.



これは動的計画問題(**DP**)として捉えることができ，Bellmanの最適性原理から価値関数$V(s_{it})$を用いて，以下のBellman方程式によって再帰的に表現できる.

$$V(s_{it}) = \max_{a \in A} \left\{ \underbrace{U(a, s_{it}) + \beta \int V(s_{i,t+1}) \mathrm{d}F(s_{i,t+1} \mid a, s_{it})}_{\| \atop v(a, s_{it})} \right\}$$

$v(a, s_{it})$
: 行動がaであるときの
選択価値関数

$F(s_{i,t+1}|a, s_{it})$: **推移確率**
(transition distribution function)

状態s_{it}において行動a_{it}を選択したとき，t+1期に状態$s_{i,t+1}$となる確率（**信念**）

構造推定

x_{it}: 状態s_{it}のうち観測可能な部分

ε_{it}: 状態s_{it}のうち観測不能な部分 (=econometric error)

$y_{it} = Y(a_{it}, x_{it}, \varepsilon_{it})$:状態と行動の両者に依存する**利得変数**(payoff variable).

- 選好に関する構造パラメータ
- 推移確率F
- 割引率β

について，**観測データ**から**尤度**や**GMM基準**等の推定基準を用いてパラメータ推定.

$$Data = \{a_{it}, x_{it}, y_{it} : i = 1, 2, \ldots, N;\ t = 1, 2, \ldots, T_i\}$$

例えば，対数尤度関数は以下の通り.

$$g_N(\theta) = \Sigma_{i=1}^{N} l_i(\theta),$$

$$\begin{aligned} l_i(\theta) &= \log \Pr\{a_{it}, y_{it}, x_{it} : t = 1, 2, \ldots, T_i \mid \theta\} \\ &= \log \Pr\{\alpha(x_{it}, \varepsilon_{it}, \theta) = a_{it}, Y(a_{it}, x_{it}, \varepsilon_{it}, \theta) \\ &= y_{it}, x_{it} : t = 1, 2, \ldots, T_i \mid \theta\}. \end{aligned}$$

θ: 構造パラメータ

$g_N(\theta)$: 推定基準

$\alpha(x_{it}, \varepsilon_{it}, \theta)$: **最適行動ルール**

$$\alpha(s_{it}) = \arg\max_{a \in A}\{v(a, s_{it})\}$$

推定基準の評価のためには，最適行動ルールを知る必要がある.

→ θの探索に際して，その都度DPを解く，あるいは近似解を求める必要がある.

モデルにおける仮定 (Rust(1987))

■ **仮定 AS** (Additive Separability)：**加法分離性**

効用関数Uは以下のように分離できる．

$$U(a, x_{it}, \varepsilon_{it}) = u(a, x_{it}) + \varepsilon_{it}(a)$$

$\varepsilon_{it}(a)$: 平均0のランダム項
$a \in A = \{a^0, a^1, a^2, \ldots, a^J\}$に対応して生じる
$(J+1) \times 1$次元ベクトル

■ **仮定 IID** (iid Unobservables)：**独立同分布**

ε_{it}は互いに独立で同一の確率分布$G_\varepsilon(\varepsilon_{it})$にしたがう．

■ **仮定 CI-X** (Conditional Independence of Future x)：**状態の条件付き独立性**

t+1期の状態$x_{i,t+1}$はt期の状態$x_{i,t}$に依存する一方で，ε_{it}には依存しない．

$$CDF\left(x_{i,t+1} \middle| a_{it}, x_{it}, \varepsilon_{it}\right) = F_x(x_{i,t+1} | a_{it}, x_{it})$$

■ **仮定 CI-Y** (Conditional Independence of y)：**利得変数の条件付き独立性**

利得変数yは状態xと行動aに依存する一方で，εとは独立である．

$$Y(a_{it}, x_{it}, \varepsilon_{it}) = Y(a_{it}, x_{it})$$

■ **仮定 CLOGIT** (Conditional Logit Model)：**条件付きロジット型モデル**

観測不可能な状態$\{\varepsilon_{it}(a): a = 0,1,\dots,J\}$は互いに独立であり，それぞれタイプ1極値分布に従う．

■ **仮定 DIS** (Discrete Support of x)：**離散型の状態**

状態x_{it}のとる範囲は離散かつ有限である．

$$x_{it} \in X = \left\{x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(|X|)}\right\} \text{ with } |X| < \infty$$

特に，仮定 CI-X, IIDは推移確率Fに関して以下を成立させる．

$$F\left(x_{i,t+1}, \varepsilon_{i,t+1} \middle| a_{it}, x_{it}, \varepsilon_{it}\right) = G_\varepsilon\left(\varepsilon_{i,t+1}\right) F_x\left(x_{i,t+1} \middle| a_{it}, x_{it}\right)$$

εのみに依存する確率分布(type 1)　　εに依存しない確率分布

以上の仮定により，構造パラメータθの推定が可能になる（→3,4,5章）．

$\theta = \left(\theta_u, \theta_Y, \theta_f\right)$

θ_u：効用関数のパラメータ
θ_Y：利得関数のパラメータ
θ_f：推移確率関数のパラメータ

以上のRustの仮定を具体例を用いて解説する.

Ex.1 退職モデル (Rust & Phelan(1997))

設定： 各期に個人iが,
- 働き続ける($a_{it}=1$)
- 退職し年金生活を始める ($a_{it}=0$)

を選択.

→**有限期間における最適停止問題**として記述

■ **t期の効用関数**

仮定AS

観測可能な部分　　観測不能な部分

$$U(a_{it}, x_{it}, \varepsilon_{it}) = E\left(c_{it}^{\theta_{u1}} | a_{it}, x_{it}\right) \times \exp\left\{\theta_{u2} + \theta_{u3} h_{it} + \theta_{u4} m_{it} + \theta_{u5} \frac{t_{it}}{1+t_{it}}\right\} - \theta_{u6} a_{it} + \varepsilon_{it}(a_{it})$$

消費支出の期待値　　個人の異質性に関する部分　　労働の不効用

c_{it}: 消費支出　h_{it}: 健康状態　m_{it}: 結婚歴　t_{it}: 年齢　$\theta_u = \{\theta_{u1}, \theta_{u2}, \dots, \theta_{u6}\}$: パラメータ

- ε_{it}は個人間，時系列で相関せず，独立かつ同一の分布に従う→**仮定IID**
- ε_{it}に**仮定CLOGIT**を適用→ロジット型モデル

Single-agent models: Rust's model

■ t期の消費支出

$$c_{it} = y_{it} - hc_{it}, \quad y_{it} = a_{it}\underbrace{w_{it}}_{\text{勤労継続：賃金}} + \underbrace{(1 - a_{it})b_{it}}_{\text{退職：年金}}$$

ra_{it}: 退職時の年齢

y_{it}: 収入　hc_{it}: 医療支出　w_{it}: 賃金　$b_{it} = b(ra_{it}, pp_{it})$: 年金　pp_{it}: 年金点数

■ t期の賃金：利得変数

利得変数固有の確率分布（ε_{it}とは独立）→**仮定CI-Y**

$$w_{it} = \exp\left\{\theta_{w1} + \theta_{w2}h_{it} + \theta_{w3}m_{it} + \theta_{w4}\frac{t_{it}}{1 + t_{it}} + \theta_{w5}pp_{it} + \xi_{it}\right\}$$

$\theta_Y = \{\theta_{w1}, \theta_{w2}, \dots, \theta_{w5}, \sigma_\xi^2\}$: 利得関数のパラメータ　σ_ξ^2:賃金へのショックξ_{it}の分散

Single-agent models: Rust's model

観測可能な状態変数は以下のように推移

- 健康状態h_{it}　：推移確率$F_h(h_{i,t+1}|h_{it})$
- 結婚歴m_{it}　：推移確率$F_m(m_{i,t+1}|m_{it})$
- 年齢t_{it}　：毎期+1
- 退職時の年齢ra_{it}　：毎期+1
- 年金点数pp_{it}　：推移確率$F_{pp}(pp_{i,t+1}|w_{it}, pp_{it})$
- 医療支出hc_{it}　：h_{it}とm_{it}に依存するパレート分布

t+1期の状態はt期の状態のみに依存→**仮定CI-X**

状態変数を離散化
→**仮定DIS**

以上より，Rustの仮定が成立.

Rust & Phelan(1997)はこのモデルをNFXPで推定し，米国で退職年齢のピークが65歳になるのは，社会保険便益が65歳以上の退職では不利になり，65歳までメディケアの資格を持つためとした. ■

Bellman方程式の書き換え

既述の仮定の下で，ε_{it}の分布に対する価値関数の期待値$\bar{V}(x_{it}) \equiv \int V(x_{it}, \varepsilon_{it}) \mathrm{d}G_\varepsilon(\varepsilon_{it})$を考えると，DP問題は以下のように書き換えられる．

選択価値関数

$$v(a, x_{it}, \varepsilon_{it}) = u(a, x_{it}) + \varepsilon_{it}(a) + \beta \sum_{x_{i,t+1}} f_x(x_{i,t+1} | a, x_{it}) \underbrace{\int V(x_{i,t+1}, \varepsilon_{i,t+1}) dG_\varepsilon(\varepsilon_{i,t+1})}_{= \bar{V}(x_{i,t+1})}$$

$V(x_{it}, \varepsilon_{it}) = \max_{a \in A}\{v(a, x_{it}, \varepsilon_{it})\}$より，

$$\boxed{\bar{V}(x_{it}) = \int \max_{a \in A} \left\{ u(a, x_{it}) + \varepsilon_{it}(a) + \beta \sum_{x_{i,t+1}} \bar{V}(x_{i,t+1}) f_x(x_{i,t+1} | a, x_{it}) \right\} \mathrm{d}G_\varepsilon(\varepsilon_{it}) \quad \cdots (\bigstar)}$$

$\bar{V}(x_{it})$は**積分価値関数(Emax関数)**とされ，この積分Bellman方程式の一意解である．

Single-agent models

対数尤度と条件付き選択確率

また，このとき対数尤度関数は以下のように表される．

$$l_i(\theta) = \sum_{t=1}^{T_i} \log P(a_{it}|x_{it}, \theta) + \sum_{t=1}^{T_i} \log f_Y(y_{it}|a_{it}, x_{it}, \theta_Y) + \sum_{t=1}^{T_i-1} \log f_x(x_{i,t+1}|a_{it}, x_{it}, \theta_f) + \log \Pr(x_{i1}|\theta)$$

$P(a_{it}|x_{it},\theta)$: **条件付き選択確率(CCP)**
f_Y: 利得変数の密度関数(Ex.1ではξの分布)　f_x: 推移確率の密度関数
$\log \Pr(x_{i1}|\theta)$: 個人iの初期状態が尤度に与える効果（多くの場合無視）

$(a,x) \in A \times X, \theta \in \Theta$に対して，**条件付き選択確率(CCP)**は以下．

$$\begin{aligned} P(a|x,\theta) &\equiv \int I\{\alpha(x,\varepsilon;\theta) = a\}\, dG_\varepsilon(\varepsilon) \\ &= \int I\left\{v(a,x_{it}) + \varepsilon_{it}(a) > v(a',x_{it}) + \varepsilon_{it}(a') \text{ for all } a'\right\} dG_\varepsilon(\varepsilon_{it}). \end{aligned}$$

$\alpha(x_{it},\varepsilon_{it})$: **最適行動ルール**
$\alpha(x_{it},\varepsilon_{it}) = \arg\max_{a \in A}\{v(a,s_{it}) + \varepsilon_{it}\}$

$I(\cdot)$: 指示関数

Bellman方程式の求解

条件付き選択確率(CCP)（再掲）

$$P(a|x) = \int I(\alpha(x, \varepsilon_{it}) = a) dG_{\varepsilon}(\varepsilon)$$

$$= \int I\left(a = \arg\max_{a' \in A}\left\{u(a', x) + \varepsilon_{it}(a') + \beta \sum_{x_{i,t+1}} \bar{V}(x_{i,t+1}) f_x(x_{i,t+1} | a, x_{it})\right\}\right) dG_{\varepsilon}(\varepsilon) \quad \cdots \text{(P1)}$$

解が価値関数の形となる本来のBellman方程式を，**条件付き選択確率の形で解く**.
→条件付き選択確率$\boldsymbol{P}$が求めるべき解の候補

条件付き選択確率から条件付き選択確率へ写すような写像（**CCPオペレータ**）を Bellman方程式より求め，その不動点を解とすればよい.

上式において，Pは$\bar{V}$の写像になっており，
写像$\boldsymbol{\Lambda}(\cdot)$: $\bar{\boldsymbol{V}} \to \boldsymbol{P}$
とする.

$\boldsymbol{P}$: $P(a|x), x = x^1, \dots, x^M, a = a^1, \dots, a^J$
を要素とする$(M \times J)$の行列
$\bar{\boldsymbol{V}} = \left(\bar{V}(x^1), \dots, \bar{V}(x^M)\right)$

Appendix: policy iteration

一方．期待価値関数（再掲）は

$$\bar{V}(x_{it}) = \int \max_{a\in A}\left\{u(a, x_{it}) + \varepsilon_{it}(a) + \beta \sum_{x_{i,t+1}} \bar{V}(x_{i,t+1}) f_x(x_{i,t+1}|a, x_{it})\right\} \mathrm{d}G_\varepsilon(\varepsilon_{it})$$

条件付き選択確率の定義より，

$$\bar{V}(x) = \sum_{a\in A} P(a|x)\left\{u(a,x) + E[\varepsilon_{it}(a)|x_{it}, \alpha(x,\varepsilon) = a] + \beta \sum_{x_{i,t+1}} \bar{V}\left(x_{i,t+1}\right) f_x(x_{i,t+1}\,|a, x_{it})\right\}$$

行列・ベクトル表現

$$\boldsymbol{F}(a) = \begin{bmatrix} f_x(x^1|x^1,a) & \dots & f_x(x^M|x^1,a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_x(x^1|x^M,a) & \dots & f_x(x^M|x^M,a) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}(a) = \left(P(a|x^1), \dots P(a|x^M)\right)'$$

$$\boldsymbol{u}(a) = \left(u(x^1,a), \dots, u(x^M,a)\right)'$$

$$\boldsymbol{E}(a) = (E[\varepsilon_{it}(a)|x^1, \alpha(x^1,\varepsilon) = a], \dots \\ , E[\varepsilon_{it}(a)|x^M, \alpha(x^M,\varepsilon) = a])$$

$$\bar{\boldsymbol{V}} = \sum_{a\in A} \boldsymbol{P}(a) * \{\boldsymbol{u}(a) + \boldsymbol{E}(a) + \beta \boldsymbol{F}(a)\bar{\boldsymbol{V}}\}$$

Appendix: policy iteration

これより,

$$\boldsymbol{\bar{V}} = \left[\boldsymbol{I}_M - \beta \sum_{a \in A} \boldsymbol{P}(a) * \boldsymbol{F}(a)\right]^{-1} \sum_{a \in A} \boldsymbol{P}(a) * \{\boldsymbol{u}(a) + \boldsymbol{E}(a)\} \qquad \cdots(\mathrm{P2})$$

上式において,$\bar{V}$はPの写像になっており,

写像$\boldsymbol{\Phi}(\cdot)$: $\boldsymbol{P} \to \boldsymbol{\bar{V}}$

とする.

以上より,$\boldsymbol{\bar{V}}$の写像として$\boldsymbol{\Lambda}(\cdot)$が,$\boldsymbol{P}$の写像として$\boldsymbol{\Phi}(\cdot)$が得られた.
この2つの写像の合成写像を$\boldsymbol{\Psi}(\cdot) \equiv \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\Phi}(\cdot))$とすると,この$\boldsymbol{\Psi}(\cdot)$がCCPオペレータ

→解のあらゆる候補を$\boldsymbol{\Psi}(\cdot)$に代入し,

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{P})$$

が成り立てば,その不動点$\boldsymbol{P}$が求める候補.

Aguirregabiria & Mira (2002)が探索アルゴリズムを提案

政策反復法(policy iteration)

■ **Aguirregabiria & Mira (2002)の命題**

仮定AS，仮定CI，仮定DISが満たされるとき，

a. $\boldsymbol{\Psi}$は一意的な不動点$\boldsymbol{P}$を持つ

b. 任意の$\boldsymbol{P}^{(0)}$に対して，列$\boldsymbol{P}^{(K)} = \boldsymbol{\Psi}\left(\boldsymbol{P}^{(K-1)}\right), K = 1,2, \dots,$は$\boldsymbol{P}$に収束する.

c. 任意の$\boldsymbol{P}^{(0)}$に対して，$\overline{\boldsymbol{V}}^{(K)} = \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{P}^{(K)}\right), \boldsymbol{P}^{(K+1)} = \boldsymbol{\Lambda}\left(\overline{\boldsymbol{V}}^{(K)}\right)$となるような列$\left\{\overline{\boldsymbol{V}}^{(K)}, \boldsymbol{P}^{(K)}\right\}$を考えると，列$\left\{\overline{\boldsymbol{V}}^{(K)}\right\}$は一意的な解に収束して，(★)のBellman方程式の解になる.

この命題より，$\boldsymbol{P}$を繰り返し，$\boldsymbol{\Psi}$に代入し，$\boldsymbol{P}$を更新していくことで，不動点を求めることが可能になる.

→CCPオペレータを用いて，不動点を求める方法：**政策反復法(policy iteration)**

Appendix: policy iteration

■ **政策反復法(policy iteration)**

STEP 0 : 最初の$\boldsymbol{P}^{(0)}$の各要素に適当な$[0,1]$間の値を割り当てる.

以降，$K = 0,1,\ldots$に対して，次の2ステップを繰り返す.

STEP 1: $\boldsymbol{P}^{(K)}$を式P2の右辺に代入して$\overline{\boldsymbol{V}}^{(K)} = \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{P}^{(K)}\right)$とする.

STEP 2: $\overline{\boldsymbol{V}}^{(K)}$を式P1の右辺に代入して$\boldsymbol{P}^{(K+1)} = \boldsymbol{\Lambda}\left(\overline{\boldsymbol{V}}^{(K)}\right)$とする.

適当なノルムと$\epsilon > 0$に対し，$\left\|\boldsymbol{P}^{(k+1)} - \boldsymbol{P}^{(k)}\right\| < \epsilon$が成り立てば収束し，計算を終了.

一般的には，写像$\boldsymbol{\Lambda}(\cdot)$および$\boldsymbol{\Phi}(\cdot)$を導出するのが困難.

→ロジット型モデルの適用(仮定CLOGIT)により計算を簡単にする.

Appendix: policy iteration

ロジット型モデルにおけるBellman方程式の求解

仮定CLOGITの下で，条件付き選択確率は

$$P(a|x) = \frac{\exp\{u(x^m, a^j) + \beta \boldsymbol{F}(x^m, a^j)\overline{\boldsymbol{V}}\}}{\sum_{a \in A} \exp\{u(x^m, a) + \beta \boldsymbol{F}(x^m, a)\overline{\boldsymbol{V}}\}} \longrightarrow \boxed{\Lambda(\cdot): \overline{\boldsymbol{V}} \to \boldsymbol{P}}$$

さらに， $\boldsymbol{E}(a) = -\ln(\boldsymbol{P}(a))$ となることから，式P2より

$$\overline{\boldsymbol{V}} = \left[\boldsymbol{I}_M - \beta \sum_{a \in A} \boldsymbol{P}(a) * \boldsymbol{F}(a)\right]^{-1} \sum_{a \in A} \boldsymbol{P}(a) * \{\boldsymbol{u}(a) - \ln(\boldsymbol{P}(a))\} \longrightarrow \boxed{\Phi(\cdot): \boldsymbol{P} \to \overline{\boldsymbol{V}}}$$

政策反復法が計算可能

また，仮定CLOGITの下で，期待価値関数は

$$\bar{V} = \ln\left(\sum_{a \in A} \exp\{u(x^m, a) + \beta \boldsymbol{F}(x^m, a)\overline{\boldsymbol{V}}\}\right)$$

行列・ベクトル表現

$$\boxed{\overline{\boldsymbol{V}} = \ln\left(\sum_{a \in A} \exp\{\boldsymbol{u}(a) + \beta \boldsymbol{F}(x^m, a)\overline{\boldsymbol{V}}\}\right)}$$

この式の右辺を価値オペレータ $\boldsymbol{\Gamma}$ として， $\overline{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{\Gamma}(\overline{\boldsymbol{V}})$ の一意的な不動点 $\overline{\boldsymbol{V}}$ を求める**価値反復法**(value iteration)によってもDP問題の解を求めることが可能.

Single-agent models: Keane & Wolpin's model

次に，いくつかのRustの仮定が緩和されたモデルの例を見てみる.

Ex.2 職業選択モデル（Keane & Wolpin(1997)）

16歳以上の個人iが職業選択に関してt期に行動$a_{it}(=0,\dots,4)$を選択.
$a_{it}=0$：無職，1：ホワイトカラー，2：ブルーカラー，3：軍職，4：就学

■ t期の効用関数

$$U(0,s_{it})=\omega_i(0)+\varepsilon_{it}(0)$$
$$U(4,s_{it})=\omega_i(4)-\theta_{tc1}I(h_{it}\geq 12)-\theta_{tc2}I(h_{it}\geq 16)+\varepsilon_{it}(4)$$
$$U(a,s_{it})=W_{it}(a)\quad \text{for } a=1,2,3$$

h_{it}: 就学年数

$W_{it}(a)$: 賃金

$\theta_{tc1},\theta_{tc2}$: 大学，大学院の授業料に対するパラメータ

$\varepsilon_{it},\omega_i$: 観測不能な状態（後述）

■ t期の賃金

ε_{it}が利得変数$W_{it}(a)$に含まれている→仮定AS,CI-Y：×

$$W_{it}(a)=r_a\exp\left\{\omega_i(a)+\theta_{a1}h_{it}+\theta_{a2}k_{it}(a)-\theta_{a3}\left(k_{it}(a)\right)^2+\boxed{\varepsilon_{it}(a)}\right\}$$

r_a: その職業のスキルプライス（skill price） k_{it}: 勤労年数

■ 観測不能な状態（ショック）$\varepsilon_{it}, \omega_i$に関して

$\varepsilon_{it}(a)$: **選択肢固有**（個人，時系列で相関なし）
平均0，制約なしの分散共分散行列を持つ．

仮定IID,CLOGIT：×

$\omega_i(a)$: **職業+個人に特有**（個人の適性や経済状態などの**恒久的な異質性**）
個人ごとに16歳以降固定値で，確率分布はノンパラメトリックな手法で特定．

両者とも，個人には知覚されるが，分析者には観察されない．
→個人の行動はω_iに依存し，セレクションバイアスが生じる可能性がある．

有限混合モデルの導入による個人の異質性の考慮

$\omega_i \in \Omega = \{\omega^1, \dots, \omega^L\}$のとき，個人$i$がタイプ$l$であるときの尤度関数を

$$L_i(\theta, \omega^\ell) \equiv \prod_{t=1}^{T_i} P(a_{it} | x_{it}, \theta, \omega^\ell) f_Y(y_{it} | a_{it}, x_{it}, \theta, \omega^\ell) \times \prod_{t=1}^{T_i - 1} f_x(x_{i,t+1} | a_{it}, x_{it}, \theta_f, \omega^\ell).$$

とする．
個人iの対数尤度関数は，初期状態x_{i1}で$\omega_i = \omega^l$となる条件付き確率$\pi_{l|x_{i1}}$をウエイトとして，

$$l_i(\theta, \Omega, \pi) = \log\left(\sum_{\ell=1}^{L} L_i(\theta, \omega^\ell) \pi_{\ell|x_{i1}}\right) \longleftarrow \pi_{l|x_{i1}} \equiv \Pr\left(\omega_i = \omega^l \middle| x_{i1}\right)$$

と書ける．→**逐次的EMアルゴリズム**によるパラメータ推定（後述：3章）

Single-agent models: Keane & Wolpin’s model

■ モデル分析

Keane & Wolpinはモデル推定により，16歳時の(観測不能な)資性の蓄積の差が，米国における生涯収入格差の重要な要因であるため，大学授業料補助等の施策の効果は相対的に小さくなると結論付けた.

■ 議論

- **初期条件**
  すべての個人が同一の状態をとる期間を設定し，最初の期間をサンプルから観測することで観測不能な異質性を推定.
  ：Keane & Wolpin(1997)は，16歳時点での学校教育のばらつきが，他の異質性に関する要素と相関があるものとしてモデルを推定.

- **観察不能な状態ε_{it}の選択肢間の相関**
  多重積分の繰り返し計算→Keane & Wolpinのシミュレーション補間法

- **自己選択バイアス**
  個人はε_{it}を観測可能であるため，最適な職業選択をおこなう.
  →賃金関数の推定時にサンプルのバイアスの影響を受けてしまう.

Competitive equilibrium models

競争的均衡モデル

ここまで扱ったのは，価格と総量が所与である**部分均衡モデル**.
＝政策変数の変化に対して，価格が不変であるという仮定.

↕

経済全体の動向を分析したい → **一般均衡モデル(General equilibrium)**
＝政策変数の変化の影響が，経済全体に波及

- Heckmanら(1998)：人的資本と賃金に関する異質性を考慮した動的一般均衡モデル.
  米国経済における賃金格差の上昇の原因を分析.

- Lee(2005),Lee & Wolpin (2006)：Heckmanら(1998)のいくつかの仮定を緩和することで，均衡制約を推定過程に組み込む.

Competitive equilibrium models

Ex.3 均衡下における職業選択モデル

Ex.2 の職業選択モデルを以下のようにアレンジ.

16歳以上の個人iが職業選択に関してt期に行動$a_{it}(=0,\ldots,4)$を選択.
$a_{it}=0$：主婦/夫， 1：ホワイトカラー(WC)， 2：ブルーカラー(BC)， ~~3：軍職，~~ 4：就学

■ **t期の効用関数**$(a_{it}=0)$

$$U(0,s_{it})=\omega_i(0)+\theta_c n_{it}+\varepsilon_{it}(0)$$

n_{it}: 年齢，性別，教育，コホートに関する観測可能な状態

※$a_{it}=1,2,\ldots$についてはEx. 2と同一

■ **t期の賃金**

$$W_{it}(a)=\boxed{r_a}\exp\left\{\omega_i(a)+\theta_{a1}h_{it}+\theta_{a2}k_{it}(a)-\theta_{a3}\left(k_{it}(a)\right)^2+\varepsilon_{it}(a)\right\}$$

職業aのスキルプライス→**均衡の結果**として，内生的に決定

■ 労働市場

- 労働供給側：16~65歳までの世代が重複しており，効用に基づき職業を決定
- 労働需要側：規模に対して収穫一定のコブダグラス型生産関数

$$Y_t = z_t S_{1t}^{\alpha_{1t}} S_{2t}^{\alpha_{2t}} K_t^{1-\alpha_{1t}-\alpha_{2t}}$$

Y_t: 総生産高

S_{1t}, S_{2t}: WC,BCのスキル蓄積

z_t: 全要素生産性

K_t: 総資本ストック

外生的に決定された過程にしたがう

技術の変化は要素シェア
$\{\alpha_{1t}, \alpha_{2t}\}$で決定論的に捕捉

※全要素生産性：資本と労働の増加によらない生産の増加を表すもの（技術進歩，効率化など）

需要側の競争行動
＝以下の**VMP条件**(value-of-marginal-product: 限界生産物価値) が成立

$$\left(\frac{\partial Y_t}{\partial S_{at}} =\right) r_{at} = (\alpha_{at}/S_{at}) \left(z_t S_{1t}^{\alpha_{1t}} S_{2t}^{\alpha_{2t}} K_t^{1-\alpha_{1t}-\alpha_{2t}}\right) \quad \text{for } a = 1, 2.$$

Competitive equilibrium models

技能の総供給量は全個人のスキル供給量の総和

$$S_{at} = \int_{X,\omega,\epsilon} k_{it}(a) I\left\{a = \alpha(x_{it}, \omega_i, \varepsilon_{it}, \widetilde{X}_t)\right\} \quad \text{for } a = 1, 2$$

$k_{it}(a)$: 個人iの職業aにおけるスキルストック　　α: 最適行動ルール

$\tilde{X}_t$: 個人の職業選択問題に関する状態変数集合（現在のスキルプライス含む）

スキルプライス列$\{r_{1t}, r_{2t}: t = 1,2, \dots\}$および$\tilde{X}_t$は以下の均衡条件を満たす.

① 個人は所与の$\tilde{X}_t$に基づき，職業を選択.

② WC/BCの２つの労働市場において，①で得られる総スキル供給量およびスキルプライスがVMP条件を満たす.

③ $\tilde{X}_t$の実際の挙動が個人の信念と一致.

※均衡は必ずしも定常ではなく，初期条件$\tilde{X}_1$に依存するだけでなく，生産要素の時間変動や，コホート規模の変化，出生率に関するコホート効果などの要因に影響される.

一般均衡モデルのまとめ

- 均衡モデルの主眼：「**フィードバック」効果が政策による影響をどの程度相殺するか**ということの分析

- Lee & Wolpin(2006)は，過去50年間の米国におけるサービス部門の雇用の大幅な伸びの決定要因を分析し，コホート規模の変化や出生率の低下といった供給側の要因よりも，需要側の要因（技術革新や製品・資本価格の動き）のほうがはるかに重要であるとした.

- 均衡モデルの推定における課題
  - 均衡制約により推定の計算負荷が桁違いに増加
  - 複数のデータソースを組み合わせる必要があり，推定と推論が困難

動学ゲームの目的

目的：寡占市場において介在する，**複数の企業の長期的な戦略的相互作用**の分析

企業の選択
- ・長期的な選択（参入・退出，投資など）
- ・短期的な選択（価格，生産量など）

→他企業の利潤や選択に影響

動学ゲームにおける均衡

マルコフ完全均衡(MPE: Markov perfect equilibrium)
：**プレイヤーの戦略が互いに最適反応となっている状態**

① すべてのプレイヤーは他のプレイヤーの現在および将来における行動に関する予測をもとに信念を形成し，その信念のもとで利得の割引価値総和の期待値を最大化.

② すべてのプレイヤーが形成する信念は，他のプレイヤーのとる行動と整合的.

すべてのプレイヤーは各期において，ほかのプレイヤーの戦略を所与としたBellman方程式を設定してDP問題を解き，それにより選択された行動と状態によって次の状態が実現．この過程において，特定の期に依存せずに状態によって決まる均衡は，他のプレイヤーの戦略に対する最適反応となっている.

動学ゲームの基本モデル

企業iは各期において，観察した状態をもとに以下の利潤の割引総和の条件付き期待値を最大化するように行動を選択

$$E_t\left[\sum_{j=0}^{T-t}\beta^j U_i(a_t,x_t,\varepsilon_t)\right]$$

それぞれの企業は
・他者の現在および将来の行動
・将来の共有知識
・自身の将来の私的情報の変動
に対して，不確実性を持つ.

$t\in[0,T]$: **期間**　　$i\in I=\{1,2,\dots,N\}$: **企業**（プレイヤー）

$a_{it}\in A=\{0,1,\dots,J\}$: t期における企業iの**行動**

$x_t\equiv(x_{1t},x_{2t},\dots x_{Nt})$: t期の状態のうち，だれにでも観察できる**共有知識**

$\varepsilon_t\equiv(\varepsilon_{1t},\varepsilon_{2t},\dots\varepsilon_{Nt})$: t期の状態のうち，企業iにしか観察できない**私的情報**

$\beta\in(0,1)$: **割引率**

状態$\{x_t,\varepsilon_t\}$の推移に関する企業の主観的確率(**信念**)は**推移確率**$F(x_{t+1},\varepsilon_{t+1}|a_t,x_t,\varepsilon_t)$にしたがうものとする（すべての企業に共通な共有知識）.

Dynamic discrete games

プレイヤーiの行動は以下のBellman方程式で記述される.

$$V_i^{\alpha}(x_t, \varepsilon_{it}) = \max_{a_i \in A}\left\{v_i^{\alpha}(a_i, x_t, \varepsilon_{it})\right\}$$

価値関数

自分以外のプレイヤーの戦略は所与

t期の期待利潤

$$v_i^{\alpha}(a_i, x_t, \varepsilon_{it}) \equiv E_{\varepsilon_{-it}}\left\{U_i(a_i, \underline{\alpha_{-i}(x_t, \varepsilon_{-it})}, x_t, \varepsilon_{it})\right\}$$

選択価値関数

$$+ \beta E_{\varepsilon_{-it}}\left\{\int V_i^{\alpha}(x_{t+1}, \varepsilon_{t+1}) \mathrm{d}F(x_{t+1}, \varepsilon_{t+1} | a_i, \underline{\alpha_{-i}(x_t, \varepsilon_{-it})}, x_t, \varepsilon_t)\right\}$$

いずれも他者の私的情報に依存するため,期待値をとる

行動選択時の将来に渡る期待効用

$\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_i(x_t, \varepsilon_t) : i \in I\}$: プレイヤーの戦略関数ベクトル
(企業iの戦略は$\{\varepsilon_{it} : j \neq i\}$ に依存しない)

このときマルコフ完全均衡解は以下

$$\alpha_i^*(x_t, \varepsilon_{it}) = b_i(x_t, \varepsilon_{it}, \alpha_{-i}^*)$$

$b_i(x_t, \varepsilon_{it}, \alpha_{-i}) = \arg\max_{a_i \in A}\{v_i^{\alpha}(a_i, x_t, \varepsilon_{it})\}$: プレイヤーiの最適応答関数(他者の行動に対する最適戦略)

モデルにおいて，以下の仮定を適用する．

モデルにおける仮定

■ **仮定 AS-Game** (Additive Separability)：**加法分離性**

効用関数Uは共有知識に関する部分と私的情報に関する部分に分離できる．

$U(a_t, x_t, \varepsilon_{it}) = u(a_t, x_t) + \varepsilon_{it}(a_t)$　　$\varepsilon_{it}(a)$はベクトルε_{it}のa番目の要素

■ **仮定 IID-Game** (iid Unobservables)：**独立同分布**

私的情報ショックε_{it}は互いに独立で同一の確率分布$G_\varepsilon(\varepsilon_{it})$にしたがう．

■ **仮定 CI-X-Game** (Conditional Independence of Future x)：**条件付き独立性**

t+1期の状態$x_{i,t+1}$はt期の状態$x_{i,t}$に依存する一方で，ε_{it}には依存しない．

$CDF(x_{t+1}|a_t, x_t, \varepsilon_t) = F_x(x_{t+1}|a_t, x_t)$

シングルエージェントモデルと同様に
積分価値関数(Emax関数) $\bar{V}_i^{\alpha}(x_t) \equiv \int V_i^{\alpha}(x_t, \varepsilon_{it}) dG_{\varepsilon}(\varepsilon_{it})$を導入すると,

$$\bar{V}_i^{\alpha}(x_t) = \int \max_{a_i \in A}\{v_i^{\alpha}(a_i, x_t) + \varepsilon_{it}(a_i)\}\, dG_{\varepsilon}(\varepsilon_{it})$$

$$v_i^{\alpha}(a_i, x_t) = E_{\varepsilon_{-it}}\Big\{u_i(a_i, \alpha_{-i}(x_t, \varepsilon_{-it}), x_t) + \beta \int \bar{V}_i^{\alpha}(x_{t+1}) dF_x(x_{t+1} | a_i, \alpha_{-i}(x_t, \varepsilon_{-it}), x_t)\Big\}$$

条件付き選択確率ベクトルを$\mathbf{P}^{\alpha} = \{P_i^{\alpha}(a_i|x_i) : (i, a_i, x) \in I \times A \times X\}$とすると,

$$P_i^{\alpha}(a_i|x) \equiv \Pr(\alpha_i(x_t, \varepsilon_{it}) = a_i | x_t = x) = \int I\Big\{a_i = \arg\max_{j \in A}\{v_i^{\alpha}(j, x_t) + \varepsilon_{it}(j)\}\Big\} dG_{\varepsilon}(\varepsilon_{it})$$

この確率は，企業i以外の視点における，企業iの期待される行動を表す.
（他者の戦略は，他者の選択確率によって企業iに認知される）

価値関数における企業iの期待利潤は以下のように表される.

他者の行動の選択確率　他者の行動が所与の時の利潤

$$E_{\varepsilon_{-it}}\{U_i(a_i, \alpha_{-i}(x_t, \varepsilon_{-it}), x_t, \varepsilon_{it})\} = \sum_{a_{-i}} \Pr(a_{-i}|x_t; \boldsymbol{\alpha})\, U_i(a_i, a_{-i}, x_t, \varepsilon_{it})$$

$$\Pr(a_{-i}|x_t; \boldsymbol{\alpha}) = \prod_{j \neq i} P_j^{\alpha}(a_j|x_t)$$

v_i^{α}をv_i^{P}で表すと，企業iの最適応答確率は

$$\Lambda(a_i|v_i^{\mathbf{P}}(\cdot, x_t)) \equiv \int I\left\{a_i = \arg\max_{j \in A}\{v_i^{\mathbf{P}}(j, x_t) + \varepsilon_{it}(j)\}\right\} dG_{\varepsilon}(\varepsilon_{it})$$

$I(\cdot)$: 指示関数

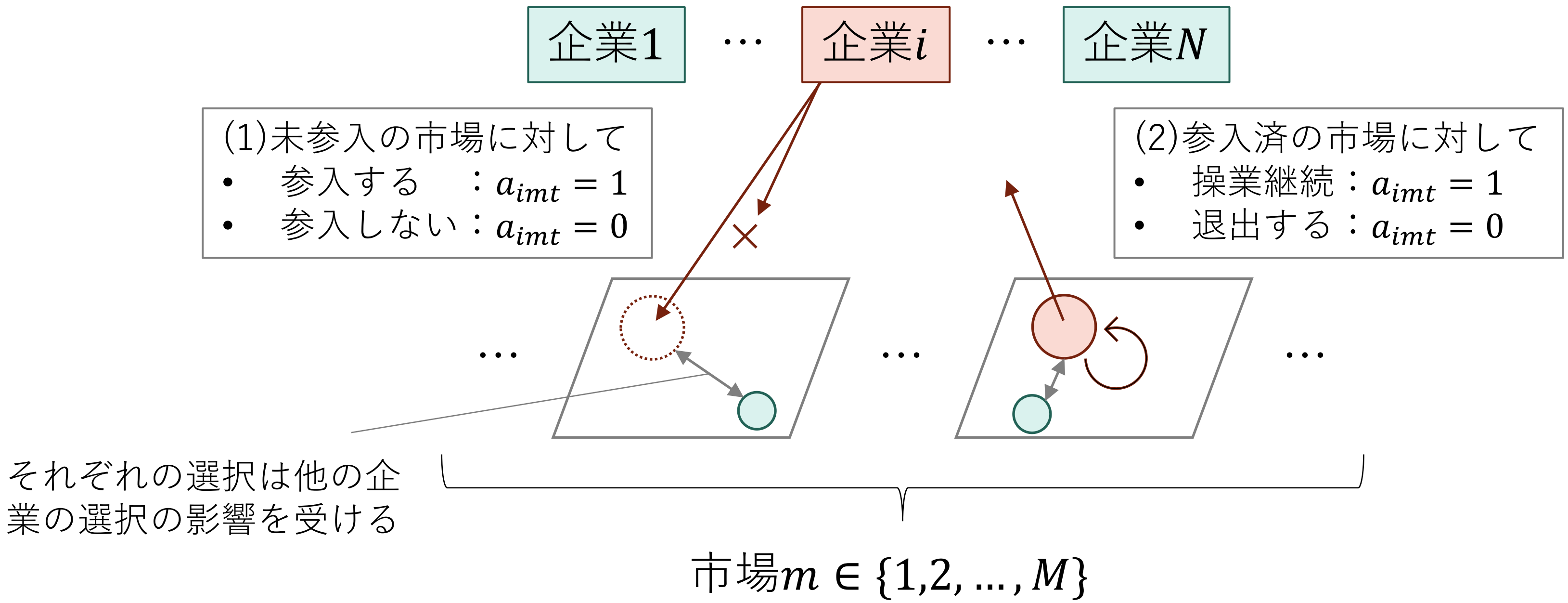
$\boldsymbol{\alpha}^*$：MPE戦略，$\mathbf{P}^* \equiv \{P_i^*(a_i|x)\colon \forall(i, a_i, x)\}$：MPE戦略に伴う条件付き選択確率

とすると，$\mathbf{P}^*$は，$\mathbf{P} = \boldsymbol{\Lambda}(v^{\boldsymbol{P}}), \boldsymbol{\Lambda}(v^{\boldsymbol{P}}) \equiv \{\Lambda(a_i|v_i^{\mathbf{P}^*}(\cdot, x_t))\colon \forall(i, a_i, x)\}$の不動点.

プレイヤーの選択確率ベクトルに対して連続な最適応答確率関数を定義すると，
Browerの不動点定理により，少なくとも一つの均衡解が存在する.

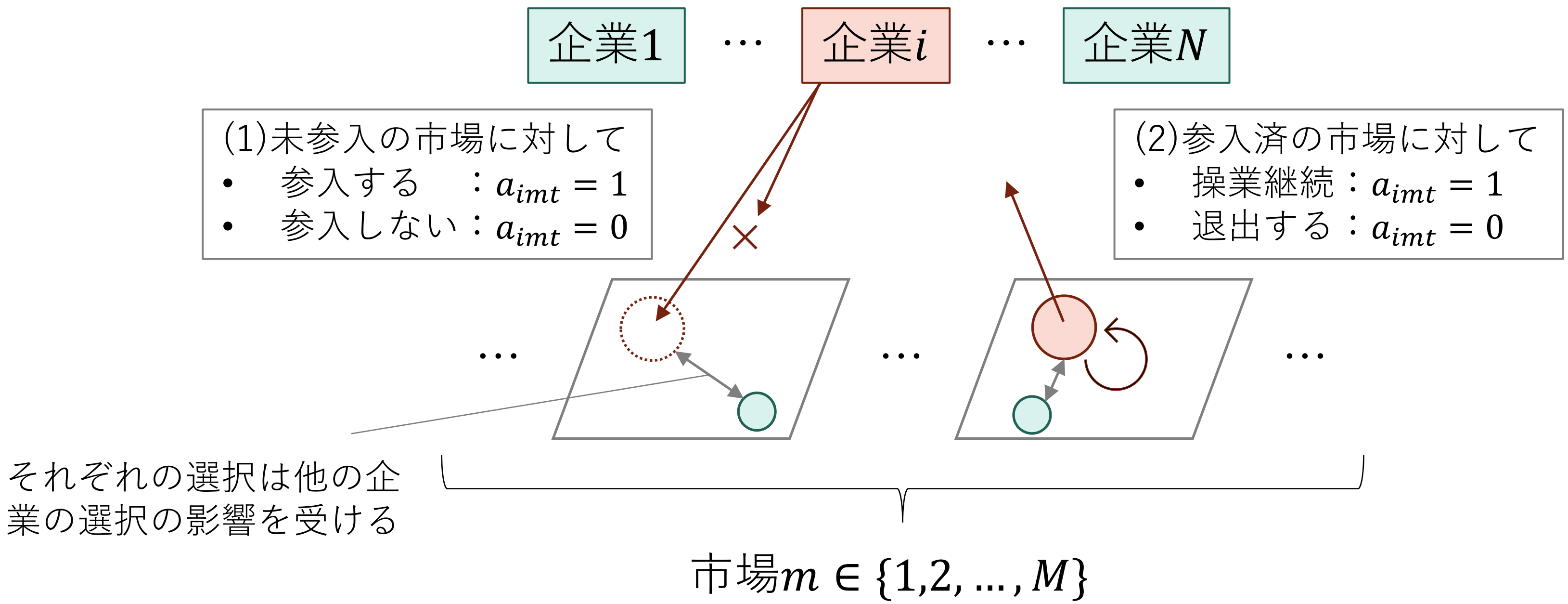
Dynamic discrete games

Ex. 4: 不完全情報下の参入/退出ゲーム（Aguirregabiria & Mira (2007)）



- 毎期，各企業は**各市場で店舗を操業するか否か**（ $a_{imt} = 1 \text{ or } 0$ ）を決定.
- 分割された各市場は十分に小さい.
- 各企業は1つの市場に高々1店舗しか出店しない（複数市場で操業可能）.

Dynamic discrete games



■ **企業iの利潤**（t期に市場mで操業）

$$U_{imt}(1) = \underbrace{\theta_{RS}\log(S_{mt})}_{\text{市場規模}} - \underbrace{\theta_{RN}\log\left(1+\sum_{j\neq i} a_{jmt}\right)}_{\text{他企業との競合}} - \underbrace{\theta_{FC,i}}_{\text{固定費用}} - \underbrace{\theta_{EC,i}(1-a_{im,t-1})}_{\text{参入費用}} + \varepsilon_{imt}(1)$$

S_{mt}: t期における市場mのサイズ（共有知識）　$\boldsymbol{\theta}=(\theta_{RS},\theta_{RN},\theta_{FC,i},\theta_{EC,i})$: パラメータ

ε_{imt}: 企業iの私的情報（時間依存）

操業しない場合，機会費用として利潤$U_{imt}(0)=\varepsilon_{imt}(0)$を得るものとする．

このモデルにおいて分析者が観測可能な状態は$x_{mt} = \left(S_{mt}, \underline{a_{im,t-1}} \text{ for } \forall i\right)$

‖

店舗の所有状況

企業の戦略関数$\alpha_i(x_{imt}, \varepsilon_{imt})$は二項選択（確定的）であり，企業が市場で操業する確率は$P_i^{\alpha}(1|x_{mt})$で与えられる.

→**推定法は後述(4章)**

■ モデル分析

Aguirrebiria & Mira(2007)はチリの地方小売市場のデータを用いてモデルを推定.
5つの異なる小売業について個別に推計を行い，固定費，アクティブな企業数に対する利益の感度，サンクコストが，産業間の操業企業数の違いに与える影響について分析している.

動学ゲームの推定

- Ex.4のような単純な例でも，プレイヤー固有の状態変数を含む場合，状態空間が指数関数的に増大する．

- Ex.3の競争均衡モデルと同様，このモデルでは最適応答均衡条件と個々のプレイヤーのDP問題が入れ子になった不動点問題を解く必要がある．

- t期の決定ルールが他者のt-1期の行動に依存するため，計算がより複雑．

- 与えられたパラメータ値に対して，複数の均衡点が存在する可能性があり，経験的なモデルや追加の構造を要する場合がある．

3. Estimation methods for single-agent models

Methods for Rust’s model

Rustモデルに対する推定法

① NFXP 法 (Rust(1987))　←パラメータの更新ごとにDP問題を解く

② CCP法(Hotz & Miller(1993))

③ NPL法(Aguirregabiria & Mira(2002))

④ simulation-based CCP法(Hotz et al.(1994))

DP問題の求解の繰り返しを回避

Methods for Rust's model

NFXP: nested fixed point algorithm（Rust(1987)）

構造パラメータを推定する**外部ループ**(BHHH法)と，ある構造パラメータのもとで動的計画法を解く**内部ループ**(政策反復法or価値反復法)を組み合わせたもの.

Initialize: 構造パラメータ初期値$\hat{\theta}_0$に任意の値を割り付け.

Outer loop: BHHH法によるパラメータ更新.

$$\hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k + \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial l_i(\hat{\theta}_k)}{\partial \theta} \frac{\partial l_i(\hat{\theta}_k)}{\partial \theta'} \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial l_i(\hat{\theta}_k)}{\partial \theta} \right) \quad \cdots \text{Eq.(28)}$$

$l_i(\theta)$: 個人iの対数尤度関数

$$\frac{\partial l_i(\theta)}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{T_i} \frac{\partial}{\partial \theta_u} \log P(a_{it}|x_{it}, \theta) \\ \sum_{t=1}^{T_i} \frac{\partial}{\partial \theta_Y} \log P(a_{it}|x_{it}, \theta) + \sum_{t=1}^{T_i} \frac{\partial}{\partial \theta_Y} \log f_Y(y_{it}|a_{it}, x_{it}, \theta_Y) \\ \sum_{t=1}^{T_i} \frac{\partial}{\partial \theta_f} \log P(a_{it}|x_{it}, \theta) + \sum_{t=1}^{T_i - 1} \frac{\partial}{\partial \theta_f} \log f_x(x_{i,t+1}|a_{it}, x_{it}, \theta_f) \end{bmatrix}$$

$\frac{\partial}{\partial \theta} \log P$を得るために，パラメータの更新ごとにDP問題を解き，条件付き選択確率を計算する必要がある.

T: finite→**後向き帰納法**(backward induction)

T: infinite→**価値反復法**or**政策反復法**

Methods for Rust's model

Inner loop: 価値反復法(value function iteration)による価値関数計算.

ロジット型モデルの仮定により，価値関数$\bar{V}$は以下のBellman方程式（再掲）の不動点となる．

$$\bar{\mathbf{V}} = \log\left(\sum_{a=0}^{J} \exp\left\{\mathbf{u}(a,\theta) + \beta \mathbf{F}_x(a)\bar{\mathbf{V}}\right\}\right) \quad \cdots \text{Eq.(30)}$$

※行列,ベクトルの定義はスライドp16参照

このとき，条件付き選択確率（再掲）は

$$P(a|x,\theta) = \frac{\exp\left\{u(a, x_{it}, \theta) + \beta \mathbf{F}_x(a,x)'\bar{\mathbf{V}}(\theta)\right\}}{\sum_{j=0}^{J} \exp\left\{u(j, x_{it}, \theta) + \beta \mathbf{F}_x(j,x)'\bar{\mathbf{V}}(\theta)\right\}} \quad \cdots \text{Eq.(31)}$$

!

パラメータについての勾配は

$$\frac{\partial \log P_{it}}{\partial \theta_u} = \frac{\partial u(a_{it}, x_{it})}{\partial \theta_u} + \beta \frac{\partial \bar{\mathbf{V}}'}{\partial \theta_u} \mathbf{F}_x(a_{it}, x_{it}) - \frac{\partial \bar{V}(x_{it})}{\partial \theta_u}$$

$$\frac{\partial \log P_{it}}{\partial \theta_f} = \beta \left(\frac{\partial \mathbf{F}_x(a_{it}, x_{it})'}{\partial \theta_f} \bar{\mathbf{V}} + \frac{\partial \bar{\mathbf{V}}'}{\partial \theta_f} \mathbf{F}_x(a_{it}, x_{it}) \right) - \frac{\partial \bar{V}(x_{it})}{\partial \theta_f} \quad \cdots \text{Eq.(32)}$$

Methods for Rust's model

Bellman方程式より，Jacobian行列は

$$\mathbf{P}(a|\theta) = \{P(a|x,\theta): x \in X\}$$

$$\boxed{\frac{\partial \bar{\mathbf{V}}(\theta)}{\partial \theta_u'}} = \left(I - \beta \sum_{a=0}^{J} \mathbf{P}(a|\theta) * \mathbf{F}_x(a)\right)^{-1} \times \left(\sum_{a=0}^{J} \mathbf{P}(a|\theta) * \frac{\partial \mathbf{u}(a,\theta)}{\partial \theta_u'}\right)$$

$$\boxed{\frac{\partial \bar{\mathbf{V}}(\theta)}{\partial \theta_f'}} = \beta \left(I - \beta \sum_{a=0}^{J} \mathbf{P}(a|\theta) * \mathbf{F}_x(a)\right)^{-1} \times \left(\sum_{a=0}^{J} \mathbf{P}(a|\theta) * \frac{\partial \mathbf{F}_x(a)}{\partial \theta_f'} \bar{\mathbf{V}}(\theta)\right)$$

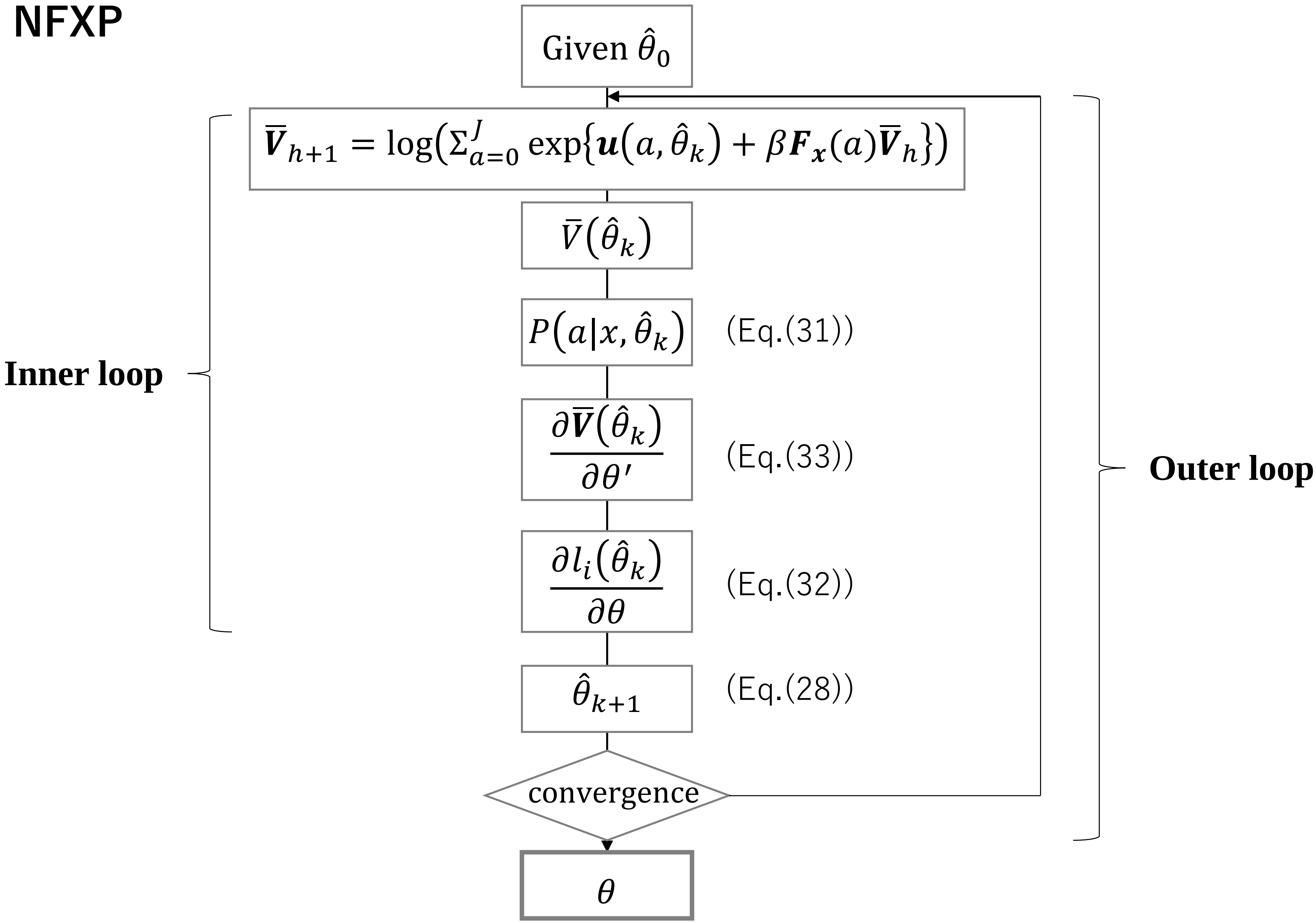
…Eq.(33)

価値関数の勾配を，比較的単純な形で得ることができた＝**仮定CLOGITによるDP求解の副産物**

※価値関数勾配が求められない場合，計算が困難.

Methods for Rust's model

■ NFXP



Methods for Rust's model

※ T: finiteの場合→**後向き帰納法**(backward induction)
→Inner loop が以下のようになる.

$T, T-1, \ldots$の順に価値関数を算出

$\bar{\boldsymbol{V}}_T(\hat{\theta}) = \log\left(\Sigma_{a=0}^{J} \exp\left\{\boldsymbol{u}_T(a,\hat{\theta})\right\}\right)$からスタート

↓

$\bar{\boldsymbol{V}}_t(\hat{\theta}) = \log\left(\Sigma_{a=0}^{J} \exp\left\{\boldsymbol{u}_T(a,\hat{\theta}) + \beta \boldsymbol{F}_{x,t}(a)\bar{\boldsymbol{V}}_{t+1}(\hat{\theta})\right\}\right)$より，価値関数を計算

↓

選択確率および勾配計算

いずれの場合に関しても，尤度関数は大域的な凸関数であるとは限らず,
大域解への収束をチェックする必要がある.

Methods for Rust's model

CCP法 (Hotz & Miller(1993))

NFXP法(Rust(1987))ではDP問題を繰り返し解くため計算負荷が膨大になってしまうという問題に対して，DP問題を解かずに構造パラメータを推定する方法を提案（**2ステップアルゴリズム**）．

■ 基本的な考え方

- ロジット型モデルの条件付き選択確率は，選択価値関数を用いて，

$$P\left(a^j \middle| x\right) = \frac{\exp\{v(x, a^j)\}}{\sum_{a \in A} \exp\{v(x, a)\}}$$

- a^1を基準として，次のような選択価値関数の差を考える．

$$\Delta v\left(x, a^j\right) \equiv v\left(x, a^j\right) - v(x, a^1), \qquad j = 2, \dots, J$$

すると，$\Delta v\left(x, a^j\right)$より$P\left(a^j \middle| x\right)$が求まる．これを$\Delta v\left(x, a^j\right)$から$P\left(a^j \middle| x\right)$への写像$Q$とすると，任意の$x$に対して$Q$は逆写像を持つ(Hotz & Miller(1993))．ロジット型モデルの場合は，$Q^{-1}\left(P\left(a^j \middle| x\right)\right) = \ln\left(P\left(a^j \middle| x\right)\right) - \ln\left(P(a^1 | x)\right)$とすれば，$\Delta v\left(x, a^j\right)$が求まる．

Methods for Rust’s model

- 推定は以下の手順.
  1. 観察されたデータを用いて各状態に対する選択された行動の相対度数を求める.
  2. これを条件付き確率の推定値とし，Qの逆写像により価値関数を求める.
  3. この価値関数の推定値より，構造パラメータを推定する.

このように，CCP推定法はDP問題を解く必要がなく，計算が容易であるが，この推定量は漸近性を持つとは限らない.

→このCCP推定法を繰り返すことで，良い性質を持つ推定量を求めるために考えられた方法：**NPL**

楠田(2019)準拠

CCP法 詳細

$u(a, x_{it}, \theta_u) = \underline{z(a, x_{it})}'\theta_u$とする. ※線形関数のパラメータ分離表記

基底関数ベクトル

例：Ex.4参入/退出ゲームで$\theta_{RN} = 0$とする（他者の影響なし）

観察可能な状態：$(S_t, a_{i,t-1})$

$$u(0, x_{it}, \theta_u) = 0$$
$$u(1, x_{it}, \theta_u) = \theta_{RS}\log(S_t) - \theta_{FC} - \theta_{EC}(1 - a_{i,t-1})$$

$$\Big\downarrow \quad u(a, x_{it}, \theta_u) = z(a, x_{it})'\theta_u \qquad \theta_u = (\theta_{RS}, \theta_{FC}, \theta_{EC})$$

$$z(0, x_{it})' = (0,0,0)$$
$$\mathrm{z}(1, x_{it})' = \left(\log(S_t), -1, -(1 - a_{i,t-1})\right)$$

Methods for Rust's model

選択価値関数を以下で表す.

$$v(a, x_t, \theta) = \underline{\tilde{z}(a, x_t, \theta)}\theta_u + \underline{\tilde{e}(a, x_t, \theta)}$$ … **Hotz & Miller の表現** Eq.(34)

$\tilde{z}(a, x_t, \theta)$：現在および将来の$\{z(a_{t+j}, x_{t+j}): j = 0,1,2, \dots\}$の割引総和の期待値

$$\begin{aligned}\tilde{z}(a, x_t, \theta) &= z(a, x_t) + \sum_{j=1}^{T-t} \beta^j E_{(x_{t+j}, \varepsilon_{t+j})|a_t=a, x_t}\left[z\left(\alpha\left(x_{t+j}, \varepsilon_{t+j}, \theta\right), x_{t+j}\right)\right] \\ &= z(a, x_t) + \sum_{j=1}^{T-t} \beta^j E_{x_{t+j}|a_t=a, x_t}\left[\sum_{a_{t+j}=0}^{J} P(a_{t+j}|x_{t+j}, \theta) z(a_{t+j}, x_{t+j})\right]\end{aligned}$$

Eq.(35)

$\tilde{e}(a, x_t, \theta)$：現在および将来の$\{\varepsilon(a_{t+j}): j = 0,1,2, \dots\}$の割引総和の期待値

$$\begin{aligned}\tilde{e}(a, x_t, \theta) &= \sum_{j=1}^{T-t} \beta^j E_{(x_{t+j}, \varepsilon_{t+j})|a_t=a, x_t}\left[\varepsilon\left(\alpha\left(x_{t+j}, \varepsilon_{t+j}, \theta\right)\right)\right] \\ &= \sum_{j=1}^{T-t} \beta^j E_{x_{t+j}|a_t=a, x_t}\left[\sum_{a_{t+j}=0}^{J} P(a_{t+j}|x_{t+j}, \theta) e(a_{t+j}, x_{t+j})\right]\end{aligned}$$

$$e(a, x_t) \equiv E(\varepsilon_t(a)|x_t, \alpha(x_t, \varepsilon_t) = a)$$

最適な行動選択肢をとった
ときのε_tの期待値

Eq.(36)

Methods for Rust's model

ここで，$e(a,x_t)$は選択確率およびεの分布に依存し，

最適行動ルール

$$\begin{aligned} e(a,x_t) &= E\Big(\varepsilon_t(a) \mid x_t, \underline{v(a,x_t)+\varepsilon_t(a)} \\ &\underline{\geq v(a',x_t)+\varepsilon_t(a') \text{ for any } a' \neq a}\Big) \\ &= \frac{1}{P(a|x_t)} \int \varepsilon_t(a) I\left\{\varepsilon_t(a') - \varepsilon_t(a) \right. \\ &\left. \leq v(a,x_t) - v(a',x_t) \forall a' \neq a\right\} \mathrm{d}G_\varepsilon(\varepsilon_t) \end{aligned}$$

価値関数の差：$\tilde{v}(x_t) \equiv \{v(a,x_t) - v(0,x_t) : a \in A\}$

また，選択確率についても

$$P(a|x_t) = \int I\{\varepsilon_t(a') - \varepsilon_t(a) \leq \underbrace{v(a,x_t) - v(a',x_t)}_{\text{価値関数の差}} \forall a' \neq a\} dG_\varepsilon(\varepsilon_t)$$

すなわち，価値関数の差を考えることで，$\tilde{v}(x_t)$から$P(a|x_t)$への写像Qを考えることができ，任意のxに対してQは逆写像を持つ（Hotz & Miller(1993)）
→上式の逆写像を考えることで，$e(a,x_t)$を選択確率と分布関数のみによって与えることができる

Methods for Rust's model

ロジット型モデルの場合，選択確率は

$$P(a|x_t) = \frac{\exp\{\tilde{v}(x_t)\}}{1 + \sum_{a\neq 0} \exp\{\tilde{v}(x_t)\}}$$

$$\tilde{v}(x_t) \equiv \{v(a, x_t) - v(0, x_t): a \in A\}$$

となり，この逆写像は

$$\tilde{v}(x_t) = \ln\big(P(a|x_t)\big) - \ln\big(P(0|x_t)\big)$$

で与えられる．さらに仮定CLOGITの下で,

$$e(a, x_t) = \gamma - \log P(a|x_t, \theta)$$

γ：Euler定数

となる．

$\theta^0 = \left(\theta_u^0, \theta_f^0\right)$を集団における$\theta$の真値とする

仮に$\mathbf{P}^0, \theta_f^0$が既知ならば， $\tilde{z}^{\boldsymbol{P}}(a, x_t), \tilde{e}^{\boldsymbol{P}}(a, x_t)$を算出可能であり，選択価値関数 $v(a, x, \theta)$をθ_uの線形関数で近似可能.

→（DP問題を解かずに）$\mathbf{P}^0, \theta_f^0$を推定したい

推移確率の推定はθ_f^0に関する（部分的）最尤法により求められる.

$$\max \ \sum\nolimits_{i,t} \log f_x(x_{i,t+1} | a_{it}, x_{it}, \theta_f)$$

条件付き選択確率はノンパラメトリックな回帰手法で推定する（Nadaraya-Watsonモデル/ 相対度数）

$\hat{\mathbf{P}}, \hat{\theta}_f$を$\mathbf{P}^0, \theta_f^0$の推定量とする.
以上の推定に基づき，Hotz & Miller の表現から条件付き選択確率を得る（Eq.31）

Methods for Rust's model

以下の式をθ_uに関して解く（一般化モーメント法: GMM）

Hotz & Miller推定量(GMM推定量)

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T_i} H(x_{it}) \times \begin{bmatrix} I\{a_{it}=1\} - \dfrac{\exp\left\{\tilde{z}^{\hat{\mathbf{P}}}(1,x_{it})\theta_u + \tilde{e}^{\hat{\mathbf{P}}}(1,x_{it})\right\}}{\sum_{a=0}^{J}\exp\left\{\tilde{z}^{\hat{\mathbf{P}}}(a,x_{it})\theta_u + \tilde{e}^{\hat{\mathbf{P}}}(a,x_{it})\right\}} \\ \vdots \\ I\{a_{it}=J\} - \dfrac{\exp\left\{\tilde{z}^{\hat{\mathbf{P}}}(J,x_{it})\theta_u + \tilde{e}^{\hat{\mathbf{P}}}(J,x_{it})\right\}}{\sum_{a=0}^{J}\exp\left\{\tilde{z}^{\hat{\mathbf{P}}}(a,x_{it})\theta_u + \tilde{e}^{\hat{\mathbf{P}}}(a,x_{it})\right\}} \end{bmatrix} = 0 \qquad \text{Eq.(38)}$$

$H(x_{it})$: 操作変数(x_{it}の関数)
（$\dim(\theta_u)\times J$次元行列）

この手法は計算が単純.

$\tilde{z}^{\boldsymbol{P}}(a,x_t), \tilde{e}^{\boldsymbol{P}}(a,x_t)$は式35,36の再帰的な表現を用いて一度だけ計算され，Hotz & Miller推定量の探索において固定されたまま.

また，パラメータに関して線形な効用を持つロジット型モデルの場合，推定量を定義する式38は階の一意性が保証される.

従来のNFXP：計算の多大な負荷
Hotz & Millerの手法：計算負荷が小さいが，**推定量が漸近性を持つとは限らない**．

↓

Aguirregabiria &Mira(2002)：**Hotz & Miller推定量の擬似的な尤度最大化**が，最尤法と漸近的に等価であることを示した．

擬似対数尤度関数(pseudo-maximam likelihood: PML)

$$Q(\theta_u, \hat{\mathbf{P}}, \hat{\theta}_f) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T_i} \log \frac{\exp\left\{\tilde{z}^{\hat{\mathbf{P}}}(a_{it}, x_{it})\theta_u + \tilde{e}^{\hat{\mathbf{P}}}(a_{it}, x_{it})\right\}}{\sum_{a=0}^{J} \exp\left\{\tilde{z}^{\hat{\mathbf{P}}}(a, x_{it})\theta_u + \tilde{e}^{\hat{\mathbf{P}}}(a, x_{it})\right\}}$$

→ これの最大化によりθ_uを決定

Eq.(39)

$\tilde{z}^{\boldsymbol{P}}(a,x_t), \tilde{e}^{\boldsymbol{P}}(a,x_t)$に関して，式35,36は，以下の再帰的な表現を満たす．

$$\begin{aligned}\tilde{z}_t^{\mathbf{P}}(a,x_t) &= z(a,x_t) + \beta \sum_{x_{t+1}\in X} f_x(x_{t+1}|a,x_t) \\ &\quad \times \left[\sum_{a'=0}^{J} P_{t+1}(a'|x_{t+1})\tilde{z}_{t+1}^{\mathbf{P}}(a',x_{t+1})\right] \\ \tilde{e}_t^{\mathbf{P}}(a,x_t) &= \beta \sum_{x_{t+1}\in X} f_x(x_{t+1}|a,x_t) \\ &\quad \times \left[\sum_{a'=0}^{J} P_{t+1}(a'|x_{t+1})\left(e_{t+1}(a',x_{t+1}) + \tilde{e}_{t+1}^{\mathbf{P}}(a',x_{t+1})\right)\right]\end{aligned} \quad \text{Eq.(40)}$$

Tが有限の時， 後向き帰納法により得られる．

$$\tilde{z}_T{}^{\mathbf{P}}(a,x_T) = z(a,x_T)$$
$$\tilde{e}_T{}^{\mathbf{P}}(a,x_T) = 0$$

$\longrightarrow$

上式から
$\{\tilde{z}^{\boldsymbol{P}}(a,x_t) \text{ and } \tilde{e}^{\boldsymbol{P}}(a,x_t): t = 1,2,\dots,T\}$
を得る．

Methods for Rust's model

Tが無限の時，式40を以下のように書き換え．

$$\tilde{z}^{\mathbf{P}}(a, x_t) = z(a,x) + \beta \sum_{x' \in X} f_x(x'|a,x) W_z^{\mathbf{P}}(x')$$
$$\tilde{e}^{\mathbf{P}}(a, x_t) = \beta \sum_{x' \in X} f_x(x'|a,x) W_e^{\mathbf{P}}(x')$$

$$\begin{cases} W_z^{\mathbf{P}}(x) = \sum_{a'=0}^{J} P(a|x)\tilde{z}^{\mathbf{P}}(a,x) & : \quad 1 \times \dim(\theta_u)\text{ベクトル} \\ W_e^{\mathbf{P}}(x) = \sum_{a'=0}^{J} P(a|x)\left(e(a,x) + \tilde{e}^{\mathbf{P}}(a',x)\right) & : \quad \text{スカラー量} \end{cases}$$

：policy valuation operatorに対する基底関数

$\boldsymbol{W_z^{\mathbf{P}}}(x)\theta_u + \boldsymbol{W_e^{\mathbf{P}}}(x)$：選択確率$\mathbf{P}$に現在から無限の将来までしたがった時の割引効用の期待値(see Aguirregabiria & Mira(2002))

行列$\mathbf{W}^{\mathbf{P}} \equiv \{[W_z^{\mathbf{P}}(x), W_e^{\mathbf{P}}(x)] : x \in X\}$とすると，$\mathbf{W}^{\mathbf{P}}$は以下の方程式の唯一解となる．

$$\mathbf{W} = \sum_{a=0}^{J} \mathbf{P}(a) * \{[\mathbf{z}(a), \mathbf{e}(a)] + \beta \mathbf{F}_x(a)\mathbf{W}\} \qquad \text{Eq.(41)}$$

where $\mathbf{P}(a)$ is the column vector of choice probabilities $\{P(a|x) : x \in X\}$; $\mathbf{z}(a) = \{z(a,x) : x \in X\}$; and $\mathbf{e}(a) \equiv \{e(a,x) : x \in X\}$.

→右辺の縮約写像を反復しながら，逐次近似を行うことで，$\mathbf{W}^{\mathbf{P}}$を計算可能．

また，式41は線形系であり， $\mathbf{W}^\mathbf{P}$はclosed formの形で表される.

$$\mathbf{W}^\mathbf{P} = \left(I - \beta \sum_{a=0}^{J} \mathbf{P}(a) * \mathbf{F}_x(a) \right)^{-1} \sum_{a=0}^{J} \mathbf{P}(a) * [\mathbf{z}(a), \mathbf{e}(a)]$$

Xのセル数が十分に小さい場合，この逆行列を用いたアルゴリズムは，逐次近似の手法よりも好ましい場合がある.

Hotz & Millerは吸収状態をもたらす行動である”terminating action”の問題に対して，選択価値関数の別の表現を導出（Hotz & Miller(1993)）.

Murphy(2008)：住宅供給の動的モデル推定．土地所有者は将来価格とコストに関する期待値を考慮に入れた最適建設時期選択.

Methods for Rust's model

NPL法: nested pseudo-likelihood algorithm (Aguirregabiria & Mira(2002))

擬似尤度関数を用いることでDP問題の求解の繰り返しを避ける.

まず，構造パラメータのうち$\boldsymbol{\theta_f}$だけは先に求めておき，改めて$\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta_u}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{f}})$とする.

Step 0: 最初の$\boldsymbol{P}^{(0)}$の各要素に適当な[0,1]間の値を割り当てる.

以降，$k = 0,1, \ldots$に対して次の2ステップを繰り返す.

Step 1: 次のようにして$\boldsymbol{\theta}$の次の候補を見つける.

$\boldsymbol{\Psi_\theta}$: 構造パラメータがθの時のCCPオペレータ

擬似尤度関数

$$\boldsymbol{\theta}^{(k)} = \arg\max_{\boldsymbol{\theta}} \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T_i} \sum_{m=1}^{M} \sum_{j=1}^{J} \ln \underline{\boldsymbol{\Psi_\theta}\left(\boldsymbol{P}^{(k-1)}\right)\left(a_{it} = a^j \middle| x_{it} = x^m\right)}$$

$\boldsymbol{\Psi_\theta}(\boldsymbol{P})$の$m$行$j$列目の要素

Step 2: 次のようにして$\boldsymbol{P}$の次の候補を見つける.

$$\boldsymbol{P}^{(k)} = \boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{\theta}^{(k)}}\left(\boldsymbol{P}^{(k-1)}\right)$$

この計算を$\boldsymbol{P}^{(k)}$と$\boldsymbol{\theta}^{(k)}$が収束するまで行う.

楠田(2019)準拠

Methods for Rust's model

NPL法の詳細

$\hat{\theta}_u$を式39における擬似尤度関数(PML)の推定量とする．この推定量から選択確率を導くことができ，

$$\widehat{\mathbf{P}}_1 = \left\{\widehat{\mathbf{P}}_1(a|x)\right\} \qquad \widehat{\mathbf{P}}_1(a|x) = \frac{\exp\left\{\tilde{z}^{\widehat{\mathbf{P}}}(a,x)\hat{\theta}_u + \tilde{e}^{\widehat{\mathbf{P}}}(a,x)\right\}}{\sum_{j=0}^{J}\exp\left\{\tilde{z}^{\widehat{\mathbf{P}}}(j,x)\hat{\theta}_u + \tilde{e}^{\widehat{\mathbf{P}}}(j,x)\right\}}$$

ここから， $\widehat{\mathbf{P}}_1$が得られると，新たな$\tilde{z}^{\widehat{\mathbf{P}}}(a,x)$と$\tilde{e}^{\widehat{\mathbf{P}}}(a,x)$および擬似尤度関数(PML) $Q(\theta_u, \widehat{\mathbf{P}}_1, \hat{\theta}_f)$，擬似尤度関数を最大化するPML推定量が得られる，

このようにして繰り返し計算を行うことで，構造パラメータおよび条件付き選択確率の列$\{\hat{\theta}_{u,K}, \widehat{\mathbf{P}}_K : K = 1,2,\ldots\}$を得ることができる．すなわち，

$$\hat{\theta}_{u,K} = \arg\max_{\theta_u \in \Theta} Q\left(\theta_u, \hat{\mathbf{P}}_{K-1}, \hat{\theta}_f\right)$$

and

$$\hat{\mathbf{P}}_K(a|x) = \frac{\exp\left\{\tilde{z}^{\hat{\mathbf{P}}_{K-1}}(a,x)\hat{\theta}_{u,K} + \tilde{e}^{\hat{\mathbf{P}}_{K-1}}(a,x)\right\}}{\sum_{j=0}^{J}\exp\left\{\tilde{z}^{\hat{\mathbf{P}}_{K-1}}(j,x)\hat{\theta}_{u,K} + \tilde{e}^{\hat{\mathbf{P}}_{K-1}}(j,x)\right\}}$$

Methods for Rust’s model

すべての推定量は漸近的に最尤法および2ステップPML(Aguirregabiria & Mira(2002))と等価であり，この手順で反復しても漸近的なgainは得られない（？）．しかし，擬似尤度関数がモデルの構造を利用した選択確率の推定値から構築されている場合，サンプルバイアスと分散がより小さな構造パラメータの推定値を得ることができると考えられた.

↓

Aguirregabiria & Mira (2002)：モンテカルロ実験により，繰り返し計算が，実際に有限標本バイアスの有意な減少をもたらすことを実証.

Kasahara & Shimotsu (2007) ：一連のPML推定量のバイアスと分散の高次展開により， Aguirregabiria & Mira (2002)の結果を証明.

この結果は、$\mathbf{P}^0$の初期推定値に関係なく保持され、この手法は**nested pseudo-likelihoodアルゴリズム（NPLアルゴリズム**）と呼ばれている。

Aguirregabiria and Alonso-Borrego (2009)：労働需要分析
Sanchez-Mangas (2002) and Lorincz (2005)：機械交換と企業投資
De Pinto and Nelson (2009)：土地利用の動的モデルおよび開発途上国の森林減少問題への適用

NFXPとNPLの比較

- **NFXP**
  外部ループの中で，$\boldsymbol{\theta}$の更新が行われ，各$\boldsymbol{\theta}$に対する内部ループの中で$\mathbf{P}$の収束計算を行う（＝**独立した2つのループが入れ子**の形）.
  全体として「$\mathbf{P}$の更新回数× $\boldsymbol{\theta}$の更新回数」の計算が必要.

- **NPL**
  外部ループと内部ループが同時に更新されており，内部ループの中で擬似尤度関数を最大化するように$\boldsymbol{\theta}$が更新され，外部ループの中で，この$\boldsymbol{\theta}$と1期前の$\mathbf{P}$によって$\mathbf{P}$が更新される.
  $\mathbf{P}$を求めるごとに動的計画法を解く必要がなく，NFXPに比べて計算回数が少ない.

Aguirregabiria & Mira(2002)：

- NFXPとNPLの解の同一性を証明.
- ある条件の下でNPLによる推定量が一致性と漸近正規性を持ち，最尤推定量と漸近的に等しくなる

Methods for Rust’s model

simulation-based CCP法 (Hotz et al.(1994))

モンテカルロ・シミュレーションにより将来の効用を足し合わせることで価値関数を計算.

ある条件付き選択確率の下でHotz & Milerの表現（式34）の2項をそれぞれ計算し，将来の行動と将来の状態の列を求める．このような列を何度も求め，その平均を将来の期待割引価値とし，推定量を求める.

※状態空間の次元が非常に大きい場合に有効

詳細はこのスライドでは省略

有限混合モデル（観測不能な恒久的異質性の考慮）

Ex.2より再掲(スライドp22-23)

$\omega_i \in \Omega = \{\omega^1, \dots, \omega^L\}$のとき，個人$i$がタイプ$l$であるときの尤度関数を

$$L_i(\theta, \omega^\ell) \equiv \prod_{t=1}^{T_i} P(a_{it}|x_{it}, \theta, \omega^\ell) f_Y(y_{it}|a_{it}, x_{it}, \theta, \omega^\ell) \times \prod_{t=1}^{T_i-1} f_x(x_{i,t+1}|a_{it}, x_{it}, \theta_f, \omega^\ell).$$

とする．

個人iの対数尤度関数は，初期状態x_{i1}で$\omega_i = \omega^l$となる条件付き確率$\pi_{l|x_{i1}}$をウエイトとして，

$$l_i(\theta, \Omega, \pi) = \log\left(\sum_{\ell=1}^{L} L_i(\theta, \omega^\ell)\pi_{\ell|x_{i1}}\right) \longleftarrow \pi_{l|x_{i1}} \equiv \Pr\left(\omega_i = \omega^l \middle| x_{i1}\right)$$

と書ける．→**逐次的EMアルゴリズム**によるパラメータ推定

■ **逐次的EMアルゴリズム**（Arcidiacono & Jones(2003)）

次の2つのステップを，パラメータが収束するまで交互に繰り返す

E step: あるパラメータ$\{\widehat{\boldsymbol{\theta}}, \widehat{\Omega}, \widehat{\boldsymbol{\pi}}\}$の下で，個人の状態，行動，利得の履歴が$(\widetilde{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{i}}, \widetilde{\boldsymbol{x}}_i, \widetilde{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{i}})$であるときの$\omega^l$の条件付き選択確率（以下）を計算.

$$\Pr\left(l \middle| \widetilde{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{i}}, \widetilde{\boldsymbol{x}}_i, \widetilde{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{i}}; \widehat{\boldsymbol{\theta}}, \widehat{\Omega}, \hat{\pi}\right) = \frac{\hat{\pi}_l L_i\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}, \widehat{\omega}^l\right)}{\exp\left\{l_i\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}, \widehat{\Omega}, \hat{\pi}\right)\right\}}$$

(Sequential) M step:

$\Pr\left(\omega^l \middle| \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{y}; \widehat{\boldsymbol{\theta}}, \widehat{\Omega}, \hat{\pi}\right)$を最大化するように$\{\widehat{\boldsymbol{\theta}}, \widehat{\Omega}, \widehat{\boldsymbol{\pi}}\}$を推定する.

$$\hat{\pi}_\ell = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \Pr(\ell | \widetilde{a}_i, \widetilde{x}_i, \tilde{y}_i; \hat{\theta}, \hat{\Omega}, \hat{\pi}) \quad (\hat{\theta}, \hat{\Omega}) = \arg\max_{\{\theta, \Omega\}} \sum_{i=1}^{N}\sum_{\ell=1}^{L} \Pr(\ell | \widetilde{a}_i, \widetilde{x}_i, \tilde{y}_i; \hat{\theta}, \hat{\Omega}, \hat{\pi}) \log L_i(\theta, \omega^\ell)$$

楠田(2019)準拠

詳細はこのスライドでは省略

Keane-Wolpinのシミュレーション補間法

無限時間($T=\infty$)，状態空間大，観測不能変数の選択肢間の相関を考慮する問題に用いられる．
推定基準はFIML（完全情報最尤法）であり，選択肢間の相関のため，多重積分についてモンテカルロ積分を用いる．

詳細はこのスライドでは省略

4. Estimation methods for dynamic discrete games

動学ゲームの推定

推移確率に関するパラメータθ_fは(部分)尤度関数の最大化により求める.

↓

$$\sum_{m=1}^{M}\sum_{t=1}^{T_m-1}\log f_x(x_{m,t+1}|a_{mt},x_{mt};\theta_f)$$

以降，βは既知であり，θ_fは上式で推定されているものとし，効用関数のパラメータθ_uの推定について述べる.

■ 仮定 One-MPE-Data

$\mathbf{P}^0_{mt}\equiv\{\Pr(a_{mt}=a|x_{mt}=x):(a,x)\in A^N\times X\}$ (m:市場)

(A) すべての(m,t)について，$\mathbf{P}^0_{mt}=\mathbf{P}^0$

＝データを**1つのマルコフ完全均衡(MPE)によってのみ**生成されたものとする.

(B) プレイヤーは将来の選択確率に$\mathbf{P}^0$を予測

(C) 観測変数$\{a_{mt},x_{mt}\}$は市場間で独立であり，$\Pr(x_{mt}=x)>0\ \forall x\in X$

$\Lambda\left(v^{\mathbf{P}}(\theta)\right) \equiv \{\Lambda(a_i|v_i^{\mathbf{P}}(\cdot,x,\theta)):(i,a_i,x) \in I \times A \times X\}$を均衡における**最適応答写像**(equilibrium best response mapping)とする.

Aguirregabiria & Mira(2007)：
所与のθに対して，条件付き選択確率ベクトル$\mathbf{P}$は，不動点条件$\mathbf{P} = \Lambda(v^{\mathbf{P}}(\theta))$を満たす場合に限ってゲームのマルコフ完全均衡(MPE)である.

ここで，以下の**擬似尤度関数(PML)**を導入する.

$$Q(\theta, \mathbf{P}) = \sum_{m=1}^{M}\sum_{t=1}^{T_m}\sum_{i=1}^{N} \ln \underbrace{\Lambda(a_{imt}|v_i^{\mathbf{P}}(\cdot, x_{mt}, \theta))}_{\text{他者の行動についての任意の信念}\mathbf{P}\text{への最適応答}}$$

$\mathbf{P}$：プレイヤーの選択確率の任意ベクトル

このとき最尤推定量は以下となる.

$$\hat{\theta}_{MLE} = \arg\max_{\theta\in\Theta}\left\{\sup_{\mathbf{P}\in(0,1)^{N|X|}} Q(\theta, \mathbf{P}) \text{ subject to } : \mathbf{P} = \Lambda(v^{\mathbf{P}}(\theta))\right\}$$

2ステップ法

シングルエージェントモデルと同様にCCP法を適用する.

$$u_i(a_{mt}, x_{mt}, \theta_u) = \underbrace{z_i(a_{mt}, x_{mt})}_{\text{基底関数（ベクトル）}}{}'\theta_u$$

このとき選択価値関数を以下のように表す.

$$v_i^{\mathbf{P}}(a_i, x_t) = \underbrace{\tilde{z}_i^{\mathbf{P}}(a_i, x_t)}_{\text{現在，将来のzの割引総和の期待値}}\,\theta_u + \underbrace{\tilde{e}_i^{\mathbf{P}}(a_i, x_t)}_{\text{現在，将来の}\varepsilon\text{の割引総和の期待値}}$$

${\tilde{z}_i}^{P}(a, x_t), {\tilde{e}_i}^{P}(a, x_t)$を再帰的に表現すると

他者の行動

$$\tilde{z}_i^{\mathbf{P}}(a_i, x_t) \equiv \sum_{a_{-i}} \left(\prod_{j \neq i} P_j(a_j | x_t) \right) \times \left[z_i(a_i, a_{-i}, x_t) + \beta \sum_{x_{t+1}} f_x(x_{t+1} | a_i, \boxed{a_{-i}}, x_t) W_{zi}^{\mathbf{P}}(x_{t+1}) \right]$$

$$\tilde{e}_i^{\mathbf{P}}(a_i, x_t) \equiv \beta \sum_{a_{-i}} \left(\prod_{j \neq i} P_j(a_j | x_t) \right) \times \left[\sum_{x_{t+1}} f_x(x_{t+1} | a_i, \boxed{a_{-i}}, x_t) W_{ei}^{\mathbf{P}}(x_{t+1}) \right]$$

Eq.57

Estimation for dynamic discrete models

$$W_{zi}^{\mathbf{P}}(x_{t+1}) = \sum_{a_i \in A} P_i(a_i|x_{t+1}) \tilde{z}_i^{\mathbf{P}}(a_i, x_{t+1})$$

$$W_{ei}^{\mathbf{P}}(x_{t+1}) = \sum_{a_i \in A} P_i(a_i|x_{t+1}) \left[e(a_i, x_{t+1}) + \tilde{e}_i^{\mathbf{P}}(a_i, x_{t+1}) \right]$$

policy valuation operator

行列$\mathbf{W}_i^{\mathbf{P}} = \{(W_{zi}^{\mathbf{P}}(x), W_{ei}^{\mathbf{P}}(x)) : x \in X\}$とすると，**W**は以下の不動点問題の唯一解

$$\mathbf{W} = \sum_{a \in A^N} [\prod_{j=1}^N \mathbf{P}_j(a_j)] * \{[\mathbf{z}_i(a), \mathbf{e}_i(a)] + \beta \mathbf{F}_x(a) \mathbf{W}\}$$

$\mathbf{P}^0, \theta_f^0$の推定量を$\hat{\mathbf{P}}, \hat{\theta}_f$とする．これらの初期推定値に基づき，$\theta_u$の2ステップ推定量を，以下の条件を満たす**GMM推定量**として求めることができる

$$\sum_{m=1}^{M} \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T_m - 1} H_i(x_{mt}) \times \begin{bmatrix} I\{a_{imt} = 1\} - \Lambda\left(0|\tilde{z}_i^{\hat{\mathbf{P}}}(\cdot, x_{mt})\theta_u + \tilde{e}_i^{\hat{\mathbf{P}}}(\cdot, x_{mt})\right) \\ \vdots \\ I\{a_{imt} = J\} - \Lambda\left(J|\tilde{z}_i^{\hat{\mathbf{P}}}(\cdot, x_{mt})\theta_u + \tilde{e}_i^{\hat{\mathbf{P}}}(\cdot, x_{mt})\right) \end{bmatrix} = 0 \qquad \text{Eq.59}$$

$H(x_{mt})$：操作変数行列$(\dim(\theta_u) \times J)$

参入/退出ゲームの推定

Ex.4の参入/退出ゲームを考える.

$$x_t = (S_t, a_{it-1}, a_{-i,t-1})$$

市場規模　自身の直近の行動　他者の直近の行動

効用関数：$U_{imt}(1) = \theta_{RS} \log(S_{mt}) - \theta_{RN} \log\left(1 + \sum_{j \neq i} a_{jmt}\right) - \theta_{FC,i} - \theta_{EC,i}(1 - a_{im,t-1}) + \varepsilon_{imt}(1)$

$$u_i(a_{mt}, x_{mt}, \theta_u) = z_i(a_{mt}, x_{mt})' \theta_u$$

■ パラメータベクトル　■ 基底ベクトル

$$\boldsymbol{\theta}_u = \begin{pmatrix} \theta_{RS} \\ \theta_{RN} \\ \theta_{FC,1} \\ \theta_{EC,1} \\ \cdots \\ \theta_{FC,i} \\ \theta_{EC,i} \\ \cdots \\ \theta_{FC,N} \\ \theta_{EC,N} \end{pmatrix} \quad z_i(1, a_{-it}, x_t) = \begin{pmatrix} \log(S_t) \\ \log\left(1 + \sum_{j \neq i} a_{jt}\right) \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ -1 \\ -(1 - a_{i,t-1}) \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad z_i(0, a_{-it}, x_t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

さらに，最適応答写像を以下で表す.

$$\Lambda\left(1 \middle| v_i^{\mathbf{P}}(\cdot, x_{mt}, \theta)\right) = \Phi\left(\left(v_i^{\mathbf{P}}(1, x_t) - v_i^{\mathbf{P}}(0, x_t)\right)/\sigma\right)$$

σ^2: $\varepsilon_{imt}(1) - \varepsilon_{imt}(0)$の分散

εが多変量正規分布に従うとき,

$$e(a, x_t) = \frac{var(\varepsilon_i(a)) - cov(\varepsilon_i(0), \varepsilon_i(1))}{\sigma} \frac{\phi\left(\Phi^{-1}\left(P_i(a|x)\right)\right)}{P_i(a|x)}$$

したがって，擬似対数尤度の最大化を解き，$W_i^{\widehat{\mathbf{P}}}$を求めると，式57 より
$\tilde{z}_i{}^{\boldsymbol{P}}(a, x_t), \tilde{e}_i{}^{\boldsymbol{P}}(a, x_t)$が計算される.

この方法は，GMM推定量の特殊なケースであり，行列$H_i(x_{mt})$が

$$\{\partial \log \Lambda_{imt}(1)/\partial\theta_u, \partial \log \Lambda_{imt}(2)/\partial\theta_u, \ldots, \partial \log \Lambda_{imt}(J)/\partial\theta_u\}$$

に等しい場合について，擬似尤度方程式が式59の形で表される.

Estimation for dynamic discrete models

さらにこの論文では，他の推定量（Pesendorfer & Schmidt-Denger(2008), Ryan(2006)）やプレイヤーの異質性を考慮した場合の動的ゲームの推定法（Aguirregabiria and Mira (2007)）についても解説されている．

ここでは省略

5. General equilibrium models

→省略

Conclusion

結論

- 動的離散選択モデルに関するレビューを行った.

- 扱ったモデルは以下の通り
  1. シングルエージェントモデル（Rust）
  2. シングルエージェントモデル（Eckstein-Keane-Wolpin）
  3. 動的一般均衡モデル
  4. 動学ゲーム

- それぞれについて応用例を示しながら基本形を解説したうえで，推定法について概説した.