吸収マルコフ過程による交通量配分理論

佐佐木綱

2020/05/26
B4 鈴木大樹

発表の流れ

1. 概要
2. 吸収マルコフ連鎖の性質
3. 吸収マルコフ連鎖としての交通流
4. 各OD交通ごとに吸収マルコフ連鎖を考える場合
5. 結論

概要

- 街路交通を巨視的に眺める
  - ➢ 交差点で一定の確率で方向転換
  - ➢ 交差点間で車が発生・吸収

⬇

- 同一方向で交差点に入る場合，右左折率と直進率は同じと仮定

- 車の流れを1つの吸収マルコフ連鎖として考えて，交通量の分布を考える

Appendix：吸収マルコフ連鎖とは？

＜マルコフ性＞

- 確率過程のある時点から将来の振る舞いがしたがう確率法則が，現在の状態のみに依存して過去の状態推移には無関係に決まる性質のこと．

確率過程$\{X_t; t = 0, 1, 2, \cdots\}$がマルコフ性を持つ

$$\Updownarrow$$

任意の$t \geq 1$と状態の組$(i_0, i_1, \cdots, i_{t-1}, j)$に対して，次の式が成り立つ

$$P\{X_t = j | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_{t-1} = i_{t-1}\} = P\{X_t = j | X_{t-1} = i_{t-1}\} = p(i_{t-1}, j)$$

- マルコフ性を持つ確率過程$\{X_t\}$のうち，tの値が離散的なものをマルコフ連鎖という．

Appendix：吸収マルコフ連鎖とは？

＜吸収状態＞

- マルコフ連鎖のおいて，確率1で自分自身にジャンプする状態のこと.

確率過程$\{X_t; t = 0, 1, 2, \cdots\}$において状態$j$が吸収状態

⇕

$$P(X_t = j |\, X_{t-1} = j) = p(j, j) = 1$$
$$P(X_t = i |\, X_{t-1} = j) = p(j, i) = 0 \quad i \neq j$$

- 吸収状態を持つマルコフ連鎖のことを吸収マルコフ連鎖という.

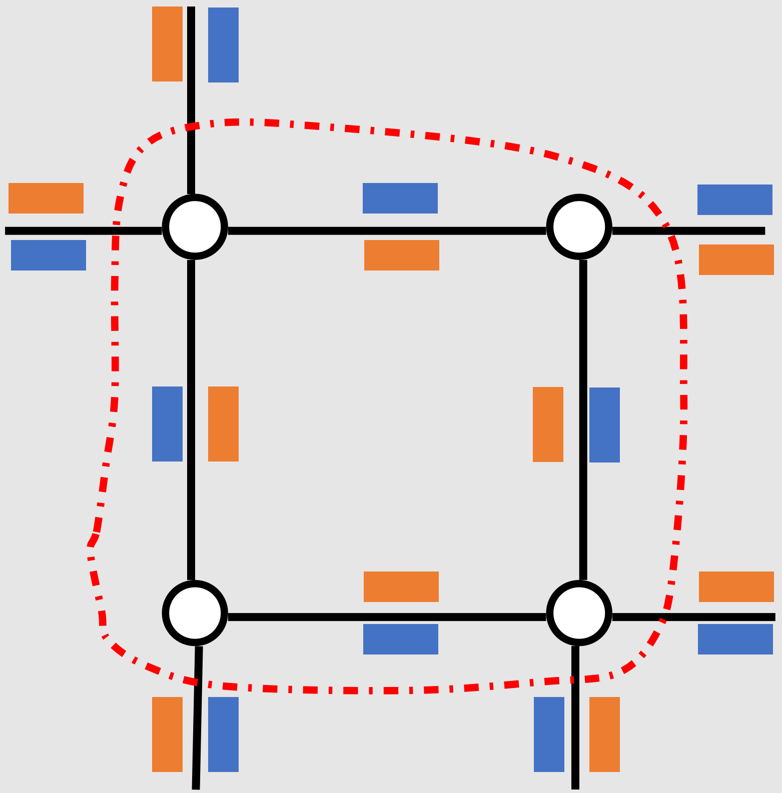
概要：街路系のモデル化

- 発生源：交通量が発生するところ
- 吸収源：交通量が吸収するところ

- 発生交通量：単位時間に各発生源から発生する車の数
- 吸収交通量：単位時間に各吸収源に吸収される車の数

- 各交差点間に1個ずつ発生源と吸収源を持つ

- 対象地域外からの連絡道路にはその背後地を代表する発生源と吸収源とを考える



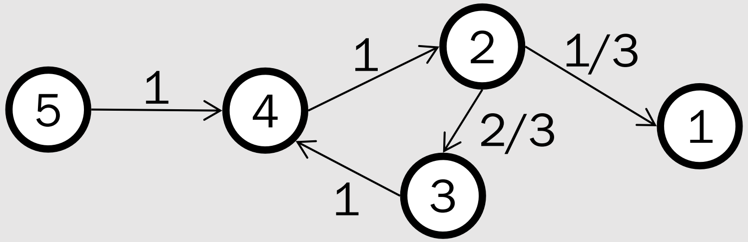
🟧：発生源

🟦：吸収源

吸収マルコフ連鎖の性質

- シャノン線図によって遷移確率を与える.
- 吸収的な状態がr個，非吸収的な状態がs個あるとする.
- 遷移確率行列Pの標準形は以下の通り.
  - I：吸収状態を表す．$r \times r$.
  - 0：零行列．$r \times s$.
  - R：非吸収状態から吸収状態への遷移確率．$s \times r$.
  - Q：非吸収状態相互の遷移確率．$s \times s$.

$$P = \left(\begin{array}{c:c} I & 0 \\ \hdashline R & Q \end{array}\right) \quad (1)$$



$r = 1$（①）
$s = 4$（②・③・④・⑤）

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ \end{array} \\ P = & \left(\begin{array}{c:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \\ ⑤ \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} ② & ③ & ④ & ⑤ \end{array} \\ Q = & \left(\begin{array}{cccc} 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} ② \\ ③ \\ ④ \\ ⑤ \end{array} \end{array}$$

Appendix：遷移確率行列とは？

- N個の状態を考える.

＜遷移確率＞
- 状態iにあるとき，次の状態jに遷移する確率$p(i,j) = P(j|i)$のこと.

＜遷移確率行列＞
- 遷移確率$p(i,j)$を(i,j)成分とする$N\times N$行列のこと.

$$
P = \begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} \text{①} & \text{②} & \text{③} & \text{④} & \text{⑤} \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & \bigcirc\!\!\!\!1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right)
\end{array}
\begin{array}{c} \text{①} \\ \text{②} \\ \text{③} \\ \text{④} \\ \text{⑤} \end{array}
$$

状態④から状態②に遷移する確率
$p(4,2) = P(2|4)$

吸収マルコフ連鎖の性質

- Qに対して，以下の式が成立.

$$I + Q + Q^2 + \cdots$$
$$= \boxed{(I - Q)^{-1}} \quad (2)$$

吸収マルコフ連鎖の基本行列

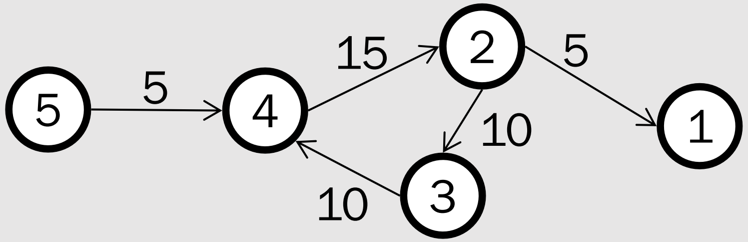
- 基本行列の(i, j)成分は，ⓘ地点を出発または通過した1台の車がⓙ地点を通過する回数の期待値を表す.

$$(I - Q)^{-1} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \text{②} & \text{③} & \text{④} & \text{⑤} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \text{②} \\ \text{③} \\ \text{④} \\ \text{⑤} \end{array} \end{array}$$

地点⑤を通過した1台の車は地点②を3回通る.
地点⑤から5台の車が出発するとすると，

区間②→①：$3 \times \frac{1}{3} \times 5 = 5$台
区間②→③：$3 \times \frac{2}{3} \times 5 = 10$台
…

各リンクの交通量が求まる



吸収マルコフ連鎖の性質

- 各地点（非吸収状態）の発生交通量をu_iで表すと，各地点（非吸収状態）を通る交通量は以下のように表せる．

$$\boxed{(u_1, u_2, \cdots, u_s)(I-Q)^{-1} \quad (3)}$$

(j成分)

$$= \sum_k (k\text{地点の発生交通量}) \times (k\text{地点を出た車が}j\text{地点を通る回数})$$

$$= (j\text{地点の交通量})$$

- 各吸収源に吸収される交通量は，以下のように表せる．

$$\boxed{(u_1, u_2, \cdots, u_s)(I-Q)^{-1}R \quad (4)}$$

(j成分)

$$= \sum_k (k\text{地点の交通量}) \times (k\text{地点から吸収源}j\text{への遷移確率})$$

$$= (\text{吸収源}j\text{に吸収される交通量})$$

⇩

発生交通量と遷移確率行列が分かれば，各非吸収状態と吸収状態（＝全ての状態）の交通量が分かる！

- 各地点の交通量は，

$$(0,0,0,5)\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (15, 10, 15, 5)$$

② ③ ④ ⑤

- 吸収される交通量vは，

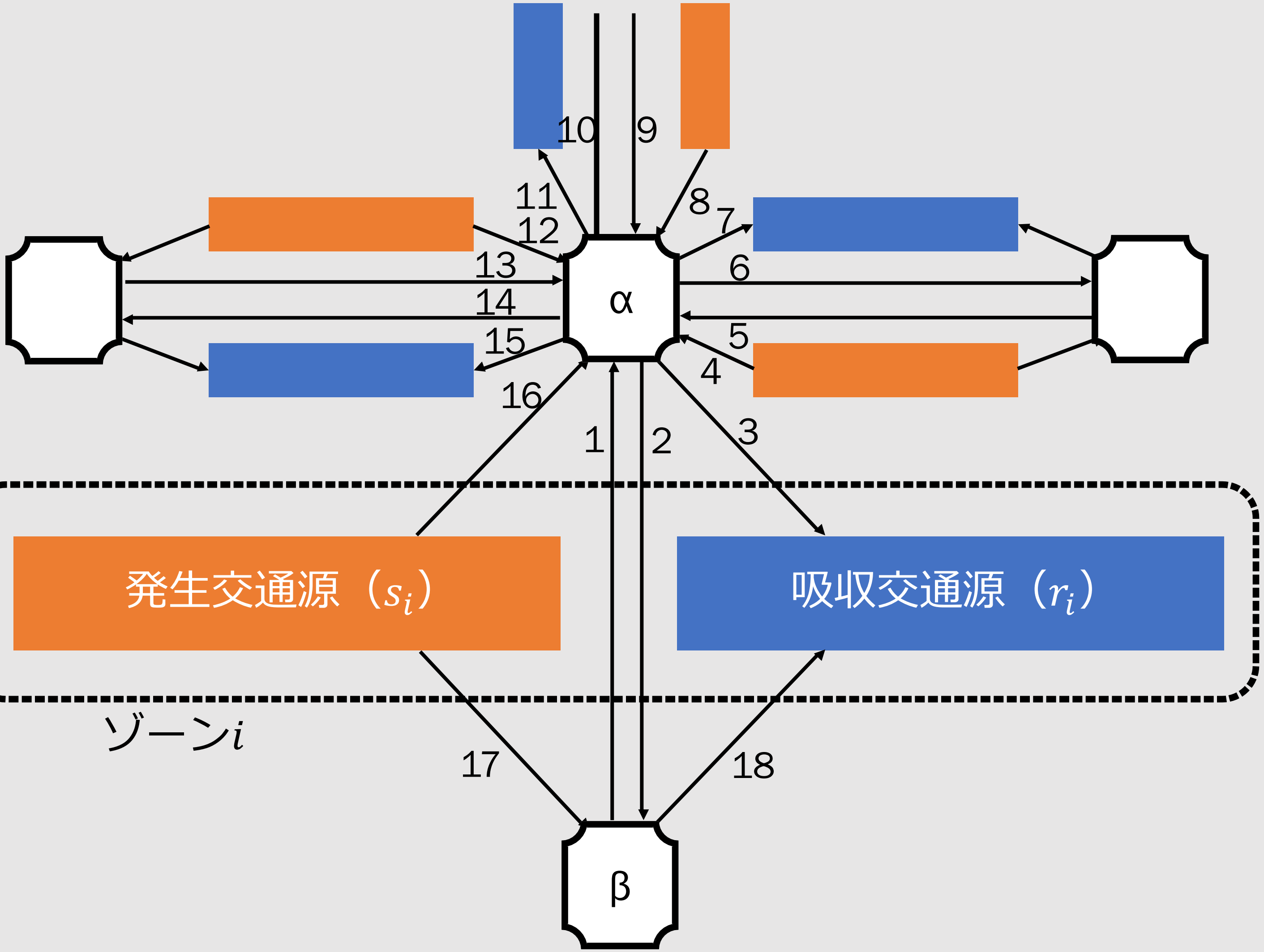
$$v = (15, 10, 15, 5)\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 5$$

吸収マルコフ連鎖としての交通流：街路モデル

- 発生源，集中源及び過渡状態の3つの「状態」が存在.

$$\begin{cases} \text{非吸収状態} \begin{cases} \text{発生源} \\ \text{過渡状態} \end{cases} \\ \text{吸収状態} = \text{吸収源} \end{cases}$$

- 各隣接交差点間を1つのゾーンと考え，そのゾーンには1対の発生源と集中源とが存在すると仮定.
- 1つの交差点ごとに合計16個の過渡状態が考えられる.
  - ➢ 発生源からの流入4個
  - ➢ 吸収源への流出4個
  - ➢ 交差点間の通過交通8個



吸収マルコフ連鎖としての交通流：街路モデル

- 状態1に対する交差点αにおける遷移確率は以下の6個.

$p_{1,6}, p_{1,7}, p_{1,10}, p_{1,11}, p_{1,14}, p_{1,15}$

  - 合計は1
  - $p_{1,6} + p_{1,7}$が右折率
  - $p_{1,14} + p_{1,15}$が左折率

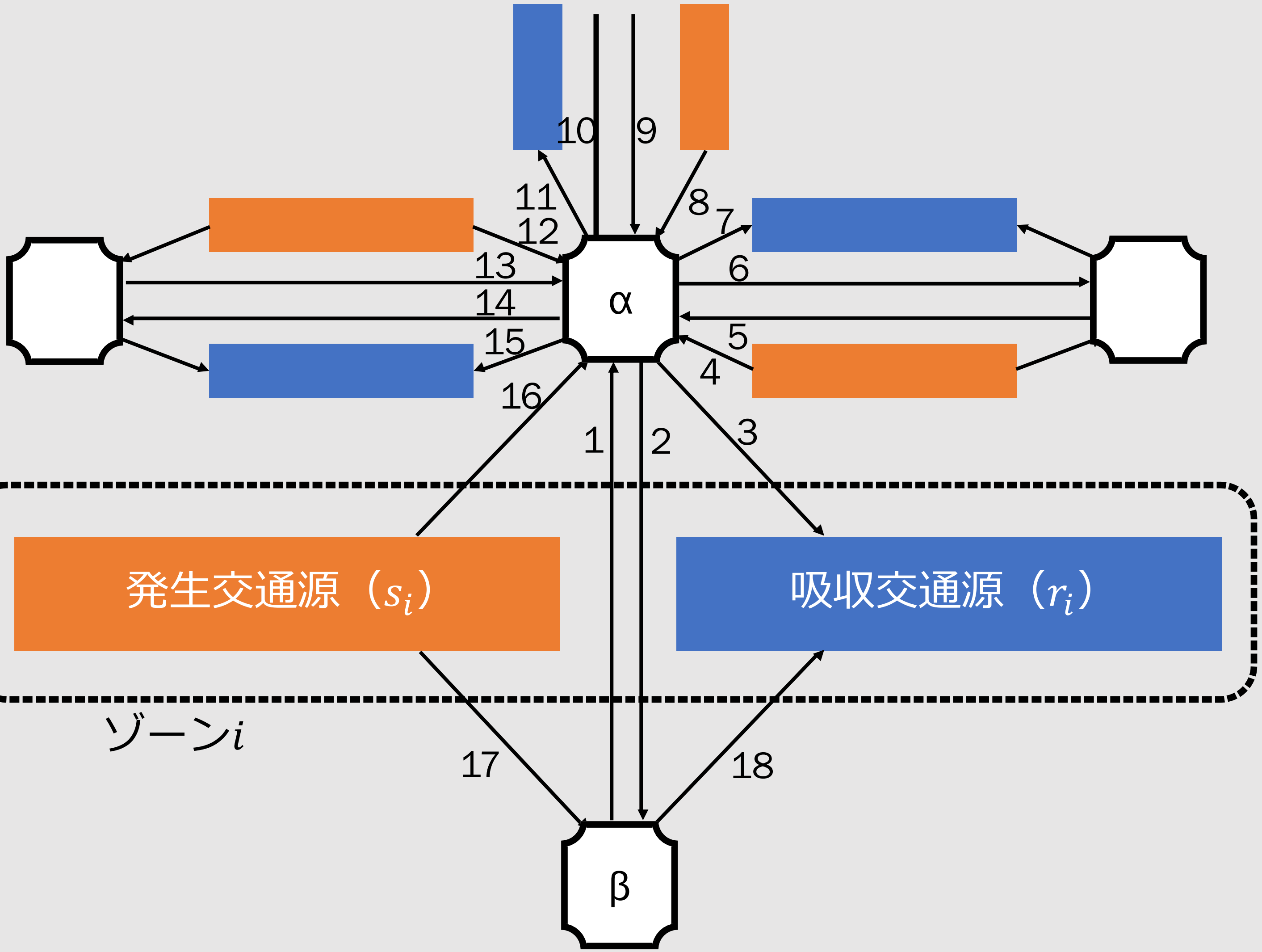
- 発生源から隣接交差点への遷移確率は以下のように表せる.

$p_{s_i,16}, p_{s_i,17}$

  - 和は1

- 状態3・状態18から吸収源への遷移確率は1

$$p_{3,r_i} = p_{18,r_i} = 1$$



吸収マルコフ連鎖としての交通流：文字の定義

- ゾーンの数 = 発生源の数 = 吸収源の数 = r個とする.
  - ➢ 交通量が発生するだけで吸収源がないゾーンは実際には考えられないため.

- 過渡状態の数を$(s-r)$個とする.

$$\begin{cases} \text{非吸収状態}s\text{個} \begin{cases} \text{発生源}r\text{個}：s_1, s_2, \cdots, s_r \\ \text{過渡状態}(s-r)\text{個}：s_{r+1}, s_{r+2}, \cdots, s_s \end{cases} \\ \text{吸収状態} = \text{吸収源}r\text{個}：r_1, r_2, \cdots, r_r \end{cases}$$

- ゾーンiの吸収源r_iに吸収される交通量をv_{r_i}，ゾーンjの発生源s_jから発生する交通量をu_{s_j}とする.

吸収マルコフ連鎖としての交通流：文字の定義

- 遷移確率行列を以下のように作成する.

$$P = \begin{array}{cc} \begin{matrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_r & s_1 & \cdots & s_r & s_{r+1} & \cdots & s_s \end{matrix} & \\ \left(\begin{array}{c:c} I & 0 \\ \hdashline R & Q \end{array}\right) & \begin{matrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_r \\ s_1 \\ \vdots \\ s_r \\ s_{r+1} \\ \vdots \\ s_s \end{matrix} \end{array} \qquad (6)$$

吸収マルコフ連鎖としての交通流：文字の定義

- Q，Rを以下のように分割する.

$$Q = \begin{array}{cc} \begin{matrix} s_1 & \cdots & s_r & s_{r+1} & \cdots & s_s \end{matrix} & \\ \left(\begin{array}{c:c} 0 & Q_1 \\ \hdashline 0 & Q_2 \end{array}\right) & \begin{matrix} s_1 \\ \vdots \\ s_r \\ s_{r+1} \\ \vdots \\ s_s \end{matrix} \end{array} \tag{7}$$

$$R = \begin{array}{cc} \begin{matrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_r \end{matrix} & \\ \left(\begin{array}{c} R_1 \\ \hdashline R_2 \end{array}\right) & \begin{matrix} s_1 \\ \vdots \\ s_r \\ s_{r+1} \\ \vdots \\ s_s \end{matrix} \end{array} \tag{8}$$

吸収マルコフ連鎖としての交通流：吸収交通量

- 過渡状態からの発生交通量は0なので，式(4)より

$$\underbrace{\left(v_{r_1}, v_{r_2}, \cdots, v_{r_r}\right)}_{r} = \left(\underbrace{u_{s_1}, u_{s_2}, \cdots, u_{s_r}}_{r}, \underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{s-r}\right)(I-Q)^{-1}R \quad (5)$$

- これをベクトル表記すると，以下の通り．

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}(I-Q)^{-1}R \quad (9)$$

※ $(u_1, u_2, \cdots, u_s)(I-Q)^{-1}R \quad (4)$

吸収マルコフ連鎖としての交通流：制約条件①

- 交通流の持つ性質は2つが挙げられる.
    - 各ゾーンで発生する交通量とそのゾーンで吸収される交通量とは定常状態においては等しい.
    - 各発生源から発生して任意の吸収源に吸収される交通量は与えられたOD交通量を満足している.

- 任意のゾーンで発生する交通量と吸収される交通量が等しいためには，以下の式が成り立たなくてはならない.

$$\left(u_{s_1}, u_{s_2}, \cdots, u_{s_r}\right) = \left(v_{r_1}, v_{r_2}, \cdots, v_{r_r}\right) \quad (10)$$

吸収マルコフ連鎖としての交通流：制約条件①

- 以下のようにSをおくと，Sは$s \times r$行列となる．

$$S = (I - Q)^{-1} R \quad (11)$$

$\big((i, j)$成分$\big)$

$= \sum_{k}$(状態s_iを出発した1台の車が状態s_kを通過する回数の期待値)×(状態s_kから吸収源r_jへの遷移確率)

$=$ $\big($状態s_iを出発した1台の車のうち吸収源r_jに辿り着く台数$\big)$

$=$ (状態s_iから吸収源r_jに遷移する確率)

- 更に，Sを以下のように分割する．
  - ➢ P_0は$r \times r$行列で，OD間の遷移確率p_{s_i, r_j}の行列である．

$$S = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} r_1 & r_2 & \cdots & r_r \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c} P_0 \\ \hdashline P_0{}' \end{array}\right) & \begin{array}{c} s_1 \\ \vdots \\ s_r \\ s_{r+1} \\ \vdots \\ s_s \end{array} \end{array} \quad (12)$$

吸収マルコフ連鎖としての交通流：制約条件①

- 以下のように$\boldsymbol{u}^*$を定義する.

$$\boldsymbol{u}^* = \left(u_{s_1}, u_{s_2}, \cdots, u_{s_r}\right) \quad (14)$$

- 式(10)の右辺は式(5)より，以下のように書ける.

$$\left(v_{r_1}, v_{r_2}, \cdots, v_{r_r}\right) = (\boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{0}^T)(I - Q)^{-1}R = (\boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{0}^T)\begin{pmatrix} P_0 \\ {P_0}' \end{pmatrix} = \boldsymbol{u}^* P_0 \quad (13)$$

- したがって式(10)の関係は，以下のようになる.

$$\boxed{\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{u}^* P_0 \quad (15)}$$

⇩

式(10)（＝発生交通量と集中交通量に関する制約条件）が，$\boldsymbol{u}^*$とP_0に関する制約条件(＝発生交通量とOD間の遷移確率に関する制約条件)に書き換えられた.

※$\left(v_{r_1}, v_{r_2}, \cdots, v_{r_r}\right) = \left(u_{s_1}, u_{s_2}, \cdots, u_{s_r}, 0, 0, \cdots, 0\right)(I - Q)^{-1}R \quad (5)$
※$\left(u_{s_1}, u_{s_2}, \cdots, u_{s_r}\right) = \left(v_{r_1}, v_{r_2}, \cdots, v_{r_r}\right) \quad (10)$

吸収マルコフ連鎖としての交通流：制約条件①

- 交通量の分布を求める問題では，P_0と$\boldsymbol{u}^*$（＝OD表）を与えるのであるが，条件式(15)のもとでは，P_0と$\boldsymbol{u}^*$とを全く独立に与えることはできない．

- 遷移確率P_0と交通発生量の和uを与えて，式(15)と連立させて各交通発生量$u_{s_1}, u_{s_2}, \cdots, u_{s_r}$を求めれば良い．

$$u = u_{s_1} + u_{s_2} + \cdots + u_{s_r} \quad (16)$$

- 各車はそのトリップが終了したゾーンで，そのゾーンにおける次の発生交通量とみなすことができる．Nトリップ目の発生交通量$\boldsymbol{u}^*(N)$は$(N-1)$トリップ目の吸収量に等しいので，かの式が成り立つ．

$$\boldsymbol{u}^*(N) = \boldsymbol{u}^*(N-1) \cdot P_0 = \boldsymbol{u}^*(N-2) \cdot P_0^2 = \cdots = \boldsymbol{u}^*(0) \cdot P_0^N \quad (17)$$

- $N \to \infty$のとき，P_0^Nは極限行列Wに近づく（P_0は正則と仮定）．

$$\boldsymbol{u}^*(\infty) = \boldsymbol{u}^*(0) \cdot W \quad (18)$$

※$\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{u}^* P_0 \quad (15)$

吸収マルコフ連鎖としての交通流：制約条件①

- ここで，Wは以下を満たす．

$$W = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_r \\ \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_r \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_r) = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_r)P_0 \quad (20)$$

$$\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_r = 1 \quad (21)$$

（式(20)が成り立つ理由）

$$W = WP_0$$

$$\Leftrightarrow (W\text{の}(i,j)\text{成分}) = \sum_k (W\text{の}(i,k)\text{成分})\times(P_0\text{の}(k,j)\text{成分})$$

$$\Leftrightarrow \omega_j = \sum_k \omega_k \cdot p_{s_k, r_j} \Leftrightarrow (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_r) = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_r)P_0$$

（式(21)が成り立つ理由）

$$\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_r = \sum_j (W\text{の}(i,j))\text{成分}) = \sum_j (\text{発生源}s_i\text{から無限回トリップ後に吸収源}r_j\text{に遷移する確率}) = 1$$

吸収マルコフ連鎖としての交通流：制約条件①

- 式(16)のuを1とおくと，式(15)と式(16)とを連立して解くということは，式(20)を解くことと等価である．したがって，以下が成立する．

$$\boxed{u_{s_1} = u\omega_1, u_{s_2} = u\omega_2, \cdots, u_{s_r} = u\omega_r \quad (21)}$$

⇩

制約条件のもとで，P_0を与えたときの$\boldsymbol{u}^*(=\left(u_{s_1}, u_{s_2}, \cdots, u_{s_r}\right))$を決定することができた．

＝制約条件のもとでOD表を作成できた．

※$\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{u}^* P_0 \quad (15)$
※$u = u_{s_1} + u_{s_2} + \cdots + u_{s_r} \quad (16)$
※$(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_r) = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_r)P_0 \quad (20)$

吸収マルコフ連鎖としての交通流：制約条件②

- 交通流の持つ性質は2つが挙げられる.
  - 各ゾーンで発生する交通量とそのゾーンで吸収される交通量とは定常状態においては等しい.
  - 各発生源から発生して任意の吸収源に吸収される交通量は与えられたOD交通量を満足している.

- P_0（＝OD間の遷移確率行列≒OD交通量）を与えたとき，これに矛盾のない遷移確率行列Pを作れば良い.

- 式(7)より，以下の式が成り立つ.

$$(I-Q)^{-1} = \begin{pmatrix} I & Q_1(I-Q_2)^{-1} \\ 0 & (I-Q_2)^{-1} \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$※Q = \begin{array}{cc} \begin{matrix} s_1 & \cdots & s_r & s_{r+1} & \cdots & s_s \end{matrix} & \\ \left(\begin{array}{c:c} 0 & Q_1 \\ \hdashline 0 & Q_2 \end{array}\right) & \begin{matrix} s_1 \\ \vdots \\ s_r \\ s_{r+1} \\ \vdots \\ s_s \end{matrix} \end{array} \quad (7)$$

吸収マルコフ連鎖としての交通流：制約条件②

- 式(8)のR_1は0であるから，式(11)に代入すると，以下のようになる．

$$\begin{pmatrix} I & Q_1(I-Q_2)^{-1} \\ 0 & (I-Q_2)^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ R_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 \\ P_0{}' \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$Q_1(I-Q_2)^{-1}R_2 = P_0$$

$$\boxed{(I-Q_2)^{-1}R_2 = P_0' \quad (23)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{Q_1P_0' = P_0 \quad (24)}$$

- これらを満足するようにQ_1, Q_2, R_2を決定$(=P$を決定$)$すれば良い．

$$\text{※}R = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} r_1 & r_2 \quad \cdots & r_r \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c} R_1 \\ \\ \hdashline \\ R_2 \end{array}\right) & \begin{array}{c} s_1 \\ \vdots \\ s_r \\ s_{r+1} \\ \vdots \\ s_s \end{array} \end{array} \quad (8)$$

$$\text{※}S = (I-Q)^{-1}R \quad (11)$$

吸収マルコフ連鎖としての交通流：街路交通量

- 制約条件を満たすような $\boldsymbol{u}^*$ と P とを用いることによって，各街路区間の交通量 $\boldsymbol{X}$ が求まる．

$$\boxed{\boldsymbol{X} = \boldsymbol{u}^* Q_1 (I - Q_2)^{-1} \quad (25)}$$

(j成分)

$= \sum_k \{ \sum_l$(発生源s_lからの発生交通量)×(発生源s_lから過渡状態s_{r+k}への遷移確率)$\}$×(過渡状態s_{r+k}を通過した1台の車が過渡状態s_{r+j}を通る回数の期待値)

$= \sum_k$ (過渡状態s_{r+k}の交通量)×(過渡状態s_{r+k}を出発した1台の車が過渡状態s_{r+j}を通る回数の期待値)

$=$ (過渡状態s_{r+j}の交通量)

吸収マルコフ連鎖としての交通流：実際の街路への適応

交差点における観測資料から遷移確率行列Pを決定

P_0を決定

式(21)から発生交通量$\boldsymbol{u}^*$を決定

OD交通量が決定

- このようにして求めたOD交通量が実際のOD交通量と一致していれば，全体の交通流を1つの吸収マルコフ連鎖として取り扱って差し支えない．

吸収マルコフ連鎖としての交通流：実際の街路への適応

- しかし，全てのOD交通を1つの吸収マルコフ連鎖として捉えるのは，道路混雑が著しいときに限られる．
  - ぐるぐる回ってなかなか吸収されない事態が生じ，実際の交通量以上に各街路に配分される．

- 実際の交通量以上に配分される交通量の増大を知る1つの尺度として，発生源を出発した車が通過した過渡状態の延べ数τを考える．
  - ξは非吸収状態の数sだけ1が並んだ列ベクトル
  - τは発生源の数rだけの要素を持つ列ベクトル

$$\tau = [I, Q_1(I - Q_1)^{-1}]\xi \quad (26)$$

$$(i\text{成分}) = \sum_k (\text{状態}s_i\text{を出発した1台の車が状態}s_k\text{を通る回数の期待値})\times 1$$

$$= (\text{発生源}s_i\text{を出発した1台の車が通過した非吸収状態の延数の期待値})$$

- τに交差点間の平均所要時間を乗じ，OD交通量のウェイトで加重平均すれば，トリップの平均所要時間が得られる．

- トリップの平均所要時間と実際のトリップ時間とを比較し，前者が極端に長いときは，全体を1つの吸収マルコフ連鎖として考えることが不都合であると言える．

各OD交通ごとに吸収マルコフ連鎖を考える場合

- 交通量が少ない場合は，ほとんどの車は最短経路を選択するので，1つのマルコフ連鎖として捉えた交通量は実際の交通量より大きくなる.

⇩

- 各ODごとに1つの発生源(s_i)と1つの吸収源(r_j)とをもったマルコフ連鎖を考え，それらを足し合わせる.

各OD交通ごとに吸収マルコフ連鎖を考える場合

- 発生源がs_i，吸収源がr_jの各OD交通に対して，遷移確率行列P_{ij}及びQ_{ij}を以下のように設定する．

$$P = \begin{array}{cc} \begin{matrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_r & s_1 & \cdots & s_r & s_{r+1} & \cdots & s_s \end{matrix} & \\ \left(\begin{array}{c:c} I & 0 \\ \hdashline R_{ij} & Q_{ij} \end{array}\right) & \begin{matrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_r \\ {\color{red} s_i} \\ s_1 \\ \vdots \\ s_r \\ s_{r+1} \\ \vdots \\ s_s \end{matrix} \end{array}$$

各OD交通ごとに吸収マルコフ連鎖を考える場合

- まず，1つのOD交通のみを考えたときの配分交通量を考える.
- OD交通量をu_{s_i,r_j}とすると，各非吸収状態の交通量は以下のように表せる.

$$\underbrace{\left(u_{s_i,r_j}, 0, 0, \cdots, 0\right)}_{s}\left(I - Q_{ij}\right)^{-1} \quad (27)$$

(j成分)

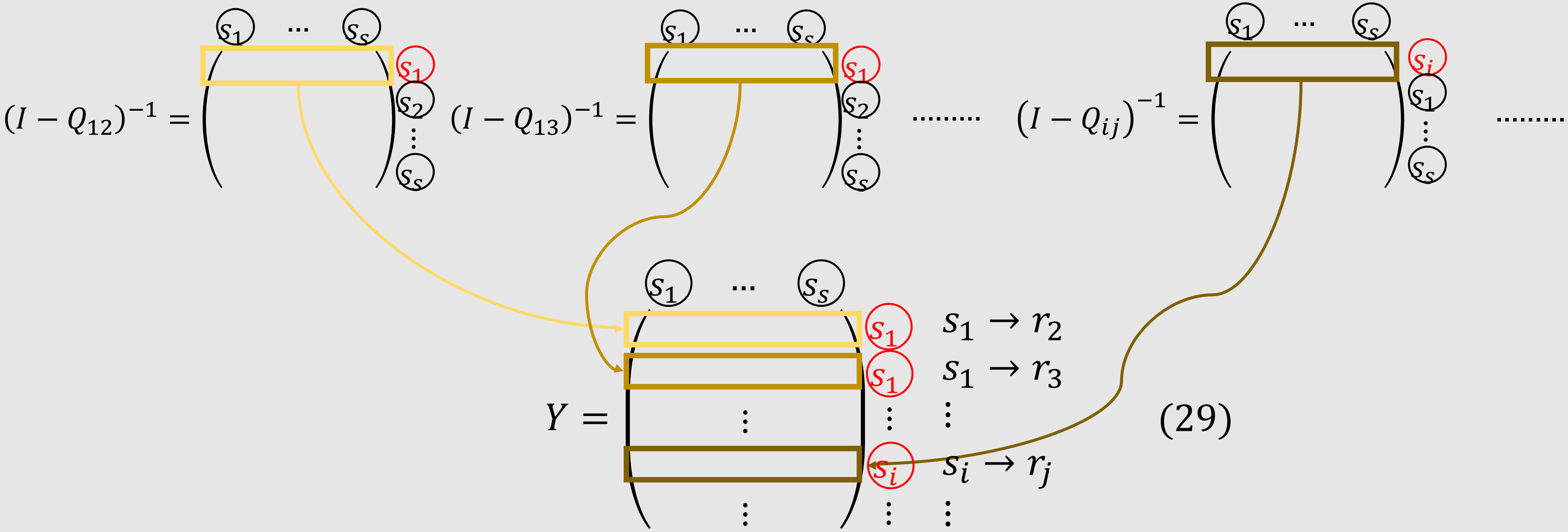
$= \sum_{k}$(k成分)×((k, j)成分) k = 1のとき以外は0

$= u_{s_i,r_j}$×(状態s_iを出発した1台の車がs_jを通過する回数の期待値) = (状態s_jの交通量)

各OD交通ごとに吸収マルコフ連鎖を考える場合

- 次に，各OD交通を重ねたときの配分交通量を考える．
- 各ODの組に対して$\left(I-Q_{ij}\right)^{-1}$を作り，その第1行のみをとって順序良く並べると，$r(r-1)\times s$の行列$Y$ができる．

  $(Y$の(i,j)成分$)$ = i番目のODを考えたときの，発生源を出発した1台の車が状態s_jを通る回数の期待値



$(I-Q_{12})^{-1} =$ $(I-Q_{13})^{-1} =$ ……… $\left(I-Q_{ij}\right)^{-1} =$ ………

$Y =$

$s_1 \rightarrow r_2$
$s_1 \rightarrow r_3$
⋮
$s_i \rightarrow r_j$
⋮

(29)

各0D交通ごとに吸収マルコフ連鎖を考える場合

- ベクトル$\boldsymbol{u}$を以下のように定義する．

$$\boldsymbol{u} = \left(u_{s_1,r_2}, u_{s_1,r_3}, \cdots, u_{s_r,r_{r-1}}\right) \quad (29)$$

- 各非吸収状態の交通量$\boldsymbol{X}$は，以下のように表せる．

$$\boxed{\boldsymbol{X} = \boldsymbol{u}Y \quad (28)}$$

(j成分)

$$= \sum_k (k\text{番目の0D交通量}) \times (k\text{番目の0D交通を考えたときの，発生源を出発した1台の車が状態}s_j\text{を通る回数の期待値})$$

$$= \sum_k (k\text{番目の0D交通を考えたときの，状態}s_j\text{の交通量}) = (\text{全ての0D交通を考えたときの状態}s_j\text{の交通量})$$

- 観測によってP_{ij}を求められれば，式(28)で交通量分布が求まる．

- 理論的にP_{ij}を与えることが，今後の中心課題となる．各0D交通ごとの遷移確率行列P_{ij}が他の0D交通の経路選択によって影響を受ける場合が問題になる．

結論

- 道路混雑が著しいときは全体を1つのマルコフ連鎖として考えても差し支えない.
  - 遷移確率行列を考えることによって，短期的な交通予測や，右折禁止・一方通行の実施の影響などを求めることができる.
  - 可能な最長経路まで残らず配分される点に特徴がある.

- 総発生交通量uとOD間遷移確率P_0を推定し，式(24)を満足する範囲でQ_1, Q_2, R_2を決定すれば，街路網上の交通量分布を式(25)を用いて決定できる.

- 実際の街路網に適応するには，過渡状態の数が非常に多くなるので多大な時間を要する.
適当な大きさのゾーンを考え，主要交差点を取り上げることで，実際の都市に適応できる.