Risk-averse user equilibrium traffic assignment: an application of game theory

Michael G. H. Bell, Chris Cassir

Transportation Research Part B, Vol. 36, (2002), pp.671-681

2020/05/12

M2 出原 昇馬

概要

リスク回避型交通配分へのゲーム理論手法の適用

- **決定論的な利用者均衡配分**と、**利用者各個人の混合戦略に基づく非協力ゲーム**の等価性を証明

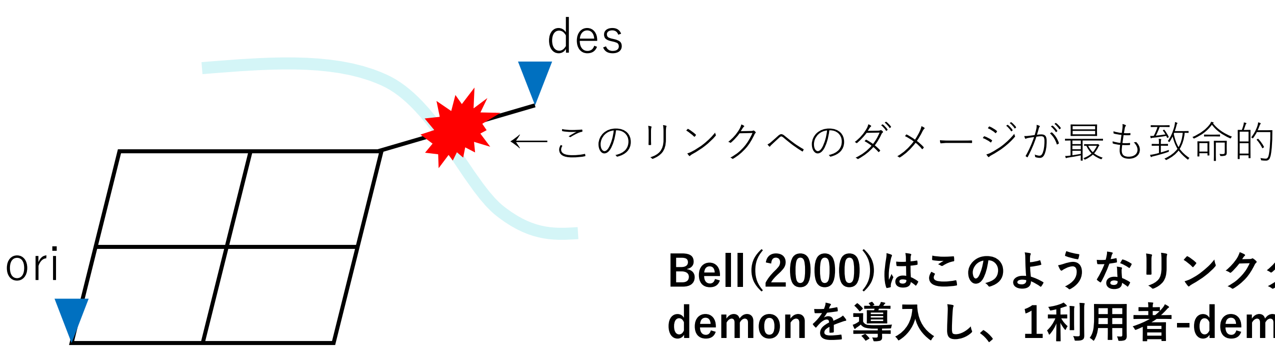
◎ ネットワーク配分において、利用者が不測の事態を考慮する**リスク回避型の交通量配分**を定式化（均衡配分の拡張）

- ネットワーク上におけるリスクを、**Network Demon**の導入により表現

ネットワーク利用者に対するリスクをどう扱うか

- ネットワーク配分における前提：**各利用者は最大効用（＝最小コスト）の経路を選択**
- 実際には、**利用者は各リンクのもつ不確実性を把握しておらず**、経路選択にはリスクが存在

- 各利用者がリスクを考慮して経路選択をしている状況を考える
  — 各利用者はすべての経路について、リスクを考慮(play through)
  — **リスクには“悪意”が働いているものとする**



Bell(2000)はこのようなリンクダメージを与える主体であるdemonを導入し、1利用者-demonの2人ゲームを記述。

- 本論文では、Bell(2000)のアプローチを拡張し、**n人の利用者-m体のdemonの非協力ゲーム**を定式化するとともに、ネットワーク配分理論との等価性を示す。

ゲーム理論の適用以前の手法

safety marginの導入

- **Hall(1983)**：ネットワーク旅行者は経路選択時に**safety margin**を考慮する

実効旅行時間 ＝ 予定到着時刻 － 出発時刻
＝ 平均旅行時間 ＋ safety margin

↓ 旅行時間が正規分布に従うと仮定

- **Uchida&Iida(1993)**

- 予定到着時刻
- 遅刻ペナルティ
- 旅行時間の確率分布

が所与のとき、最適な出発時刻を計算可能であり、最適なsafety marginの大きさが固定される。

Optimal safety margin

$$= \begin{cases} \sigma\phi^{-1}(\sigma/\gamma) & \text{if } \sigma/\gamma < (2\pi)^{-1/2}, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

σ ：旅行時間の標準偏差
γ ：遅刻ペナルティ
$\phi^{-1}(\cdot)$：標準正規分布の確率密度関数の逆関数

$$\underbrace{\mu}_{\text{平均旅行時間}} = p(v)\underbrace{\mu_{\mathrm{c}}}_{\text{平均旅行時間（非混雑時）}} + (1 - p(v))\underbrace{\mu_{\mathrm{u}}}_{\text{平均旅行時間（混雑時）}}$$

$p(v)$：フローに応じた混雑発生確率

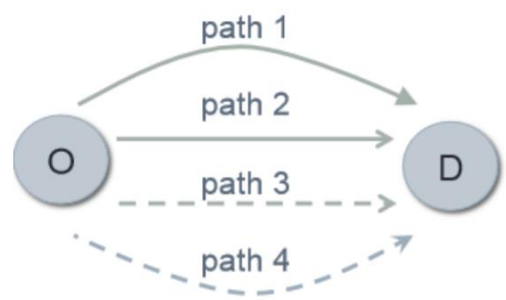
実際の交通データをもとに、旅行時間の分布を算出するので大変

等価性の証明

Prop. 1： n人による決定論的利用者均衡は、nが大であるとき、非協力ゲームにおける混合ナッシュ均衡と等価である。

条件

- 単一ＯＤペア
- 複数経路
- n人の同質な利用者



$\mathbf{h}$：経路交通量ベクトル
$\mathbf{g}$：経路コストベクトル
h_k：経路kの交通量
g_k：経路kのコスト

前提：利用者均衡の必要十分条件

$$\begin{cases} h_j = 0 \Leftarrow g_j(\mathbf{h}) > \min_k g_k(\mathbf{h}) \text{ for all paths } j, \\ h_j > 0 \Rightarrow g_j(\mathbf{h}) = \min_k g_k(\mathbf{h}) = g_{\mathrm{OD}}(\mathbf{h}). \end{cases}$$

：最小コストでない経路は選択されない（交通量ゼロ）

：選択されている経路は最小コスト（＝等時間原則）

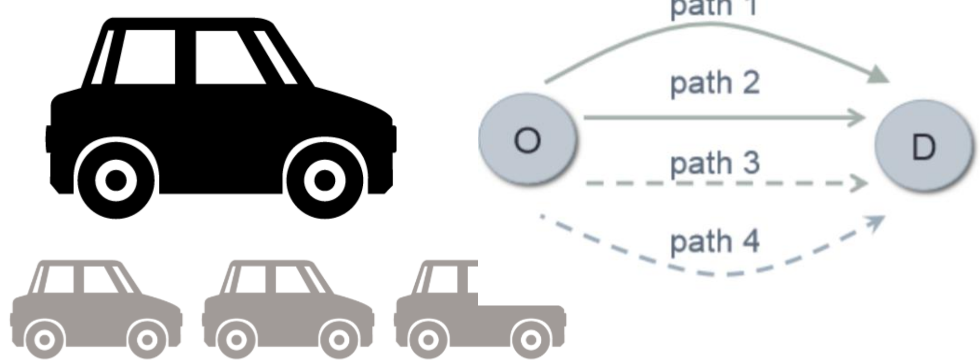
nが大のとき大数の法則により $h_j = np_j$　　p_j：経路jの選択確率

n人非協力ゲームとして捉える

利用者aが他の利用者に対して
どの経路を選択するか
＝**混合戦略s_aとして表現**

※**純粋戦略**：一つの選択肢を確定的に選ぶ戦略
⇔**混合戦略**：確率に基づき様々な選択肢を選ぶ戦略

利用者a（混合戦略s_a）



利用者aの混合戦略 $$s_a = \sum_j \pi_{aj} p_{aj}$$

利用者aが経路jを選択する純粋戦略　　利用者aが経路jを選択する確率

利用者aの被るコストの期待値

n次元混合戦略ベクトル　　利用者a以外の利用者の混合戦略ベクトル

$$c_a(\mathbf{s}) = \sum_j p_{aj} c_a(\mathbf{s}_{-a}, \pi_{aj})$$

利用者aが経路jを選択して被るコスト

利用者均衡とゲーム理論

利用者の同質性の仮定により、すべての利用者がコストを同様に認知するため、**各利用者がコスト最小化**をすると

$$p_{1j} = p_{2j} = \cdots = p_{nj} = p_j$$ ：経路jの選択確率は等しい

$$c_1(\mathbf{s}_{-1}, \pi_{1j}) = c_2(\mathbf{s}_{-2}, \pi_{2j}) = \cdots = c_n(\mathbf{s}_{-n}, \pi_{nj})$$ ：経路jのコストは等しい

nが大のとき、大数の法則により経路jのコストは交通量に基づくコストに近づく

$$c_a(\mathbf{s}_{-a}, \pi_{aj}) \cong g_j(\mathbf{h})$$

戦略に基づく
経路jのコスト

交通量に基づく
経路jのコスト

経路交通量ベクトル

$$\mathbf{h} \cong \mathbf{p}n$$

経路選択確率ベクトル

混合戦略ナッシュ均衡の必要十分条件

$$\begin{cases} p_{aj} = 0 \Leftarrow c_a(\mathbf{s}_{-a}, \pi_{aj}) > \min\limits_k c_a(\mathbf{s}_{-a}, \pi_{ak}) \quad \forall a \text{ and } \forall j \\ p_{aj} > 0 \Rightarrow c_a(\mathbf{s}_{-a}, \pi_{aj}) = \min\limits_k c_a(\mathbf{s}_{-a}, \pi_{ak}) \quad \forall a \text{ and } \forall j \end{cases}$$

（1行目）：利用者aが最小コストでない経路jを選択する確率は0

（2行目）：経路jの選択確率が0より大ならば、コストは最小

これは利用者均衡と等価である ■

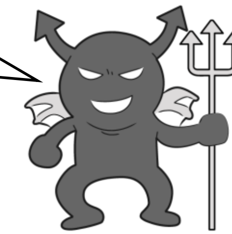
リスク回避型交通配分とn+1人ゲーム

Network demonの導入

条件

- 単一ＯＤペア
- 複数経路からなるＮＷ
- n人の同質な利用者
  ＋**1体のdemon**(Bell(2000))

1つのリンクにダメージを与えて
利用者のコストを最大化したい！



リンクへのダメージ＝シナリオkの発生とする

G1：n+1人混合戦略ゲーム

利用者a

期待コスト最小化

シナリオkにおいて利用者aが経路j
を選択することで被るコスト

$$\underset{\mathbf{p}_a}{\mathrm{Min}}\, c_a(\mathbf{s},\mathbf{q}) = \sum_j p_{aj} \sum_k q_k c_{ak}(\mathbf{s}_{-a}, \pi_{aj})$$

シナリオの発生確率ベクトル

シナリオkの発生確率

demon

期待コスト最大化

$$\underset{\mathbf{q}}{\mathrm{Max}}\, c_{n+1}(\mathbf{s},\mathbf{q}) = \sum_k q_k c_{n+1,k}(\mathbf{s})$$

demonがシナリオkを選択することで得るutility
（＝利用者に与えるコスト）

$$c_{n+1,k}(\mathbf{s}) = \sum_a \sum_j p_{aj} c_{ak}(\mathbf{s}_{-a}, \pi_{aj}) = \sum_a c_{ak}(\mathbf{s})$$

➡ nが大のとき均衡点を見つけるのが困難→二段階最適化問題への書き換えを提案

リスク回避型交通配分とn+1人ゲーム

二段階最適化問題への書き換え

B1：求解可能な形式への変換

Upper：demonの期待コスト最大化（全経路、全シナリオ）←demon視点

$$U : \mathop{\mathrm{Max}}_{\mathbf{q}} \sum_j \sum_k q_k \underline{g_{jk}(\mathbf{h})} h_j \quad \text{subject to} \quad \sum_k q_k = 1,\ \mathbf{q} \geqslant \mathbf{0},$$

シナリオk時の経路jのコスト

n：利用者数
$\mathbf{h}$：経路交通量ベクトル
h_j：経路jの交通量
q_k：シナリオk発生確率

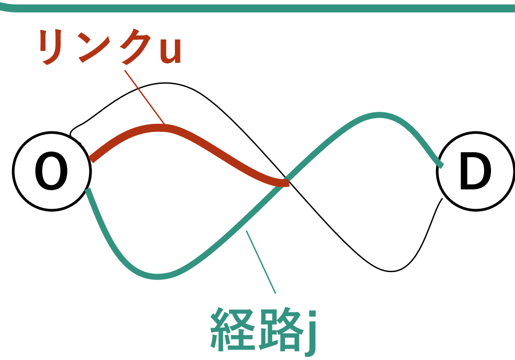
Lower：利用者の期待コスト最小化（全リンク、全シナリオ）←標準的なUE

$$L : \mathop{\mathrm{Min}}_{\mathbf{h}} \sum_u \sum_k q_k \int_0^{vu(\mathbf{h})} \underline{t_{uk}}(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{subject to} \quad \underline{v_u} = \sum_j \underline{a_{uj}} h_j,\ \sum_j h_j = n,\ \mathbf{h} \geqslant \mathbf{0},$$

シナリオk時、リンクuの
リンクパフォーマンス関数

リンクuの交通量

リンクuがリンクjに含まれて
いるか否か（○：1,×：0）



これが前スライドG1と等価であることを示す

リスク回避型交通配分とn+1人ゲーム

等価性の証明

B1に関して以下の条件が成立

For $U : \forall k$ 

$$\begin{cases} q_k = 0 \Leftarrow \boxed{\sum_j g_{jk}(\mathbf{h}) h_j} < \max_r \sum_j g_{jr}(\mathbf{h}) h_j, \\ q_k > 0 \Rightarrow \boxed{\sum_j g_{jk}(\mathbf{h}) h_j} = \max_r \sum_j g_{jr}(\mathbf{h}) h_j. \end{cases}$$

：総コストが最大でないシナリオの発生確率は0

：シナリオkの発生確率が正ならば、総コスト最大

For $L : \forall j$ 

$$\begin{cases} h_j = 0 \Leftarrow \boxed{\sum_k g_{jk}(\mathbf{h}) q_k} > \min_r \sum_k g_{rk}(\mathbf{h}) q_k, \\ h_j > 0 \Rightarrow \boxed{\sum_k g_{jk}(\mathbf{h}) q_k} = \min_r \sum_k g_{rk}(\mathbf{h}) q_k. \end{cases}$$

：期待コストが最小でない経路jの交通量は0

：経路jの交通量が正ならば、期待コスト最小

nが大ならば大数の法則により、**総コストは、個人の期待コストの和に近けられる**

$$\boxed{\sum_j g_{jk}(\mathbf{h}) h_j} \cong c_{n+1,k}(\mathbf{s})$$

総コスト　個人の期待コストの和

スライド8ページ

$$c_{n+1,k}(\mathbf{s}) = \sum_a \sum_j p_{aj} c_{ak}(\mathbf{s}_{-a}, \pi_{aj}) = \sum_a c_{ak}(\mathbf{s})$$

すべての経路jについても大数の法則から

$$\boxed{\sum_k g_{jk}(\mathbf{h}) q_k} \cong \sum_k c_{ak}(\mathbf{s}_{-a}, \pi_{aj}) q_k = c_a(\mathbf{s}_{-a}, \pi_{aj})$$

交通量に基づく経路jの期待コスト　戦略に基づく経路jの期待コスト

リスク回避型交通配分とn+1人ゲーム

以上より

Upper

$$\begin{cases} q_k = 0 \Leftarrow c_{n+1,k}(\mathbf{s}) < \max\limits_r c_{n+1,r}(\mathbf{s}) \\ q_k > 0 \Rightarrow c_{n+1,k}(\mathbf{s}) = \max\limits_r c_{n+1,r}(\mathbf{s}) \end{cases}$$

Lower

$$\begin{cases} p_{aj} = 0 \Leftarrow c_a(\mathbf{s}_{-a}, \pi_{aj}) < \max\limits_r c_a(\mathbf{s}_{-a}, \pi_{ar}) \\ p_{aj} > 0 \Rightarrow c_a(\mathbf{s}_{-a}, \pi_{aj}) = \max\limits_r c_a(\mathbf{s}_{-a}, \pi_{ar}) \end{cases}$$

これはn+1人非協力ゲームにおける混合戦略ナッシュ均衡問題の必要十分条件（Nash(1951)）を満たす。 ■

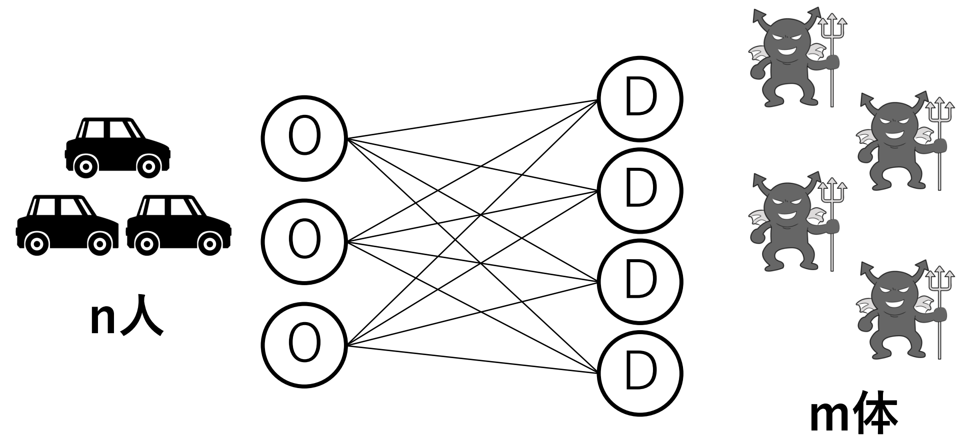
大数の法則の利用により、B1を解くことで、G1の近似解を得ることができる
←利用者均衡とゲーム理論の等価性の利用

リスク回避型交通配分の拡張

複数ODへの拡張

条件

- **m組**のＯＤペア
- 複数経路からなるＮＷ
- n人の同質な利用者
  ＋**m体のdemon（ODペア固有）**



B2：複数ODペアへの拡張　※B1の二段階問題をODペアごとに並列

B_2 : For each origin–destination pair OD $\in (1, \ldots, m)$ solve simultaneously :

$$U_{\mathrm{OD}} : \underset{\mathbf{q}\mathrm{OD}}{\mathrm{Max}} \sum_j \sum_k q_{k\mathrm{OD}} g_{jk\mathrm{OD}}(\mathbf{h}) h_{j\mathrm{OD}} \quad \text{subject to} \ \sum_k q_{k\mathrm{OD}} = 1, \ \mathbf{q}_{\mathrm{OD}} \geqslant \mathbf{0},$$

$$L_{\mathrm{OD}} : \underset{\mathbf{h}\mathrm{OD}}{\mathrm{Min}} \sum_u \sum_k q_{k\mathrm{OD}} \int_0^{vu(\mathbf{h})} t_{uk}(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{subject to} \ v_u = \sum_j a_{uj} h_j, \ \sum_j h_{j\mathrm{OD}} = n_{\mathrm{OD}}$$

次章でB2の求解アルゴリズムの提示

求解アルゴリズム

MSA: Method of Successive Averageによる求解

STEP 0.：初期設定（iter = 1, link flow = 0, リンク障害確率=1/(リンク数))

STEP 1.：各ODペアに対して、期待リンクコストを計算

STEP 2.：OD表に基づき、各ODペアに対する最小コストの経路に交通量配分

STEP 3.：ODごとのリンクフローをMSAにより更新

$$h_{\mathrm{OD}}^{t} = \frac{t-1}{t} h_{\mathrm{OD}}^{t-1} + \frac{1}{t} h_{\mathrm{OD}}^{*}$$

h_{OD}^{*}:STEP 2で得られたOD交通量

STEP 4.：ODペアごとに、最も期待コストの大きいシナリオを特定し、該当するリンク障害確率を1、それ以外を0に更新

STEP 5.：ODペアごとにリンク障害確率をMSAにより更新

STEP 6.：収束するまでSTEP 1~6を繰り返し

数値実験

簡易NWのシミュレーション

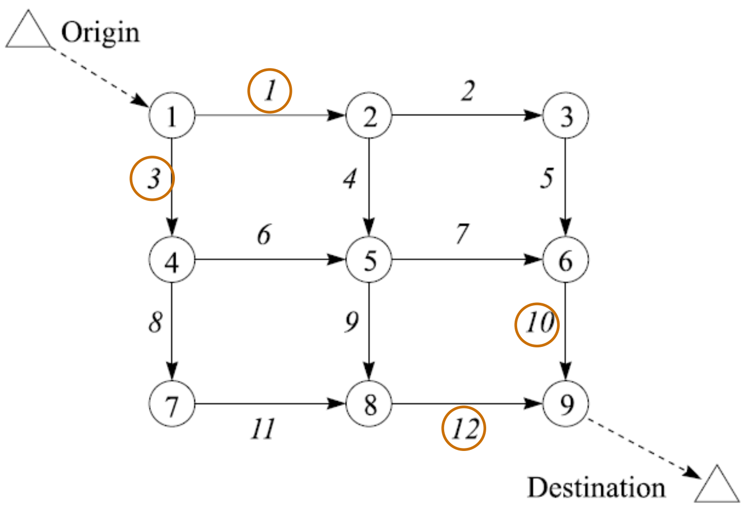


Fig. 1. Example network.

- **リンクコスト**

$$\mathrm{Cost}_i = 10 + 10(\mathrm{flow}_i/\mathrm{capacity}_i)^4, \quad i = 1, \ldots, 12,$$

- **リンク容量**

すべて通常時500台/時
→ダメージを受けると50%減少

- **OD交通量**

1000台/時

リンク選択確率

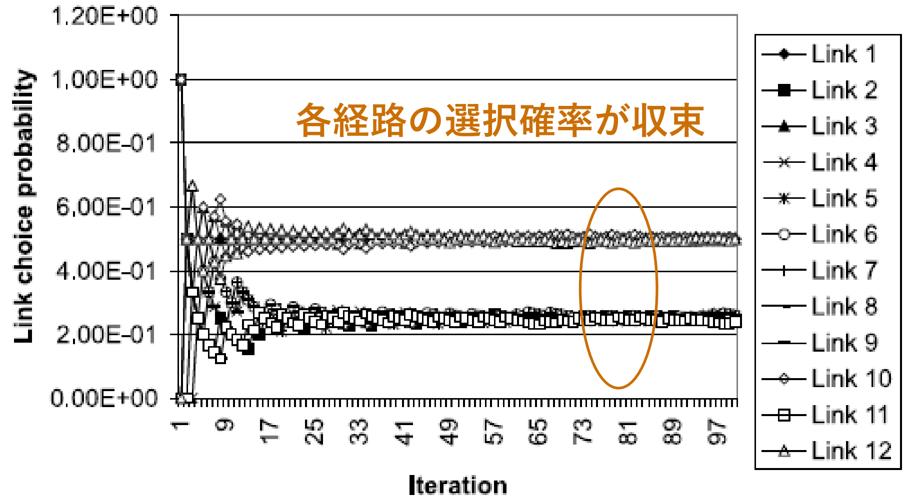


Fig. 3. Link choice probabilities.

シナリオ選択確率

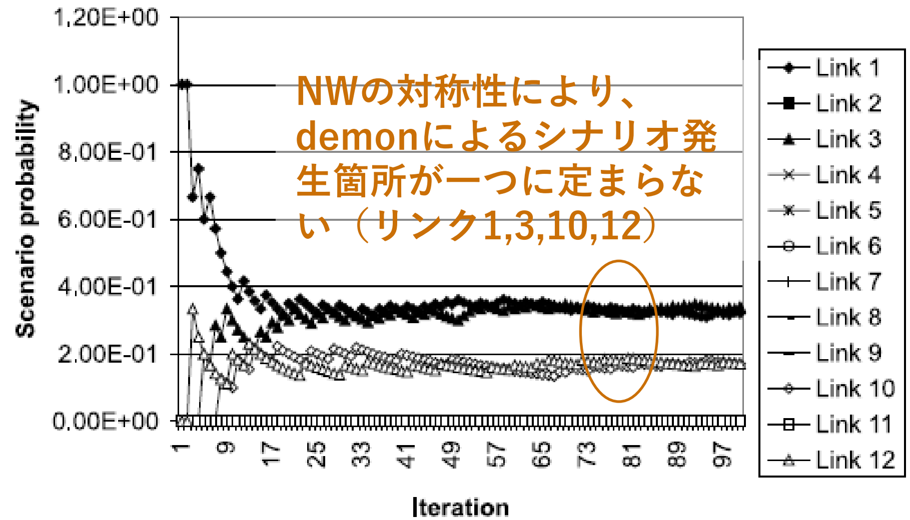


Fig. 4. Scenario probabilities.

結論

総括

- 利用者とdemonの間の非協力ゲームの考え方に基づき、**リスク回避型交通均衡配分の新たな手法を提案**
- 混合戦略ナッシュ均衡の均衡解は各ODペアについて脆弱なリンクを特定するため、**ネットワークの信頼性を測るのに有効**

展望

- **前提が限定的**

  - demonは利用者コストの最大化 = 世界観が過度に悲観的

  - 1つのリンクにのみダメージを与える = 現実にはどのような状況？

  →ドライバーの経路選択状況に適した仮定が必要
- **どのプレイヤーも他者の次の行動を把握していない**

  - demonが利用者の反応を完全に把握し、かつ利用者が極度にリスクに悲観的であればリーダーフォロワーゲーム（＝シュタッケルベルグゲーム）として扱える

  →現実にはdemonによって経路選択が直接制限されるとは考えにくく、リスク回避行動のモデルとしては不適切

参考：混合戦略ナッシュ均衡の例

「男女の争い」

- プレイヤー：男（A）、女（B）
- 戦略：山に行く or 海に行く

A/B	山	海
山	2, 1	0, 0
海	0, 0	1, 2

純粋戦略ゲームの場合、
（山、山）or（海、海）がナッシュ均衡

参考：混合戦略ナッシュ均衡の例

混合戦略の場合を考える

Bの選択確率

Aの選択確率	A/B	山 (q)	海 (1-q)
p	山	2, 1	0, 0
1-p	海	0, 0	1, 2

この場合、Aの期待利得は

$$EU_A = 2pq + 0p(1-q) + 0(1-p)q + 1(1-p)(1-q)$$
$$= 2pq + (1-p)(1-q)$$
$$= (3q-1)p + 1 - q$$

参考：混合戦略ナッシュ均衡の例

Aのとるべき戦略は $\max_{p} EU_A = (3q-1)p + 1 - q$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} p = 1 \quad \text{if} \quad q > 1/3 \\ p = 0 \quad \text{if} \quad q < 1/3 \\ 0 \le p \le 1 \quad \text{if} \quad q = 1/3 \end{array}$$

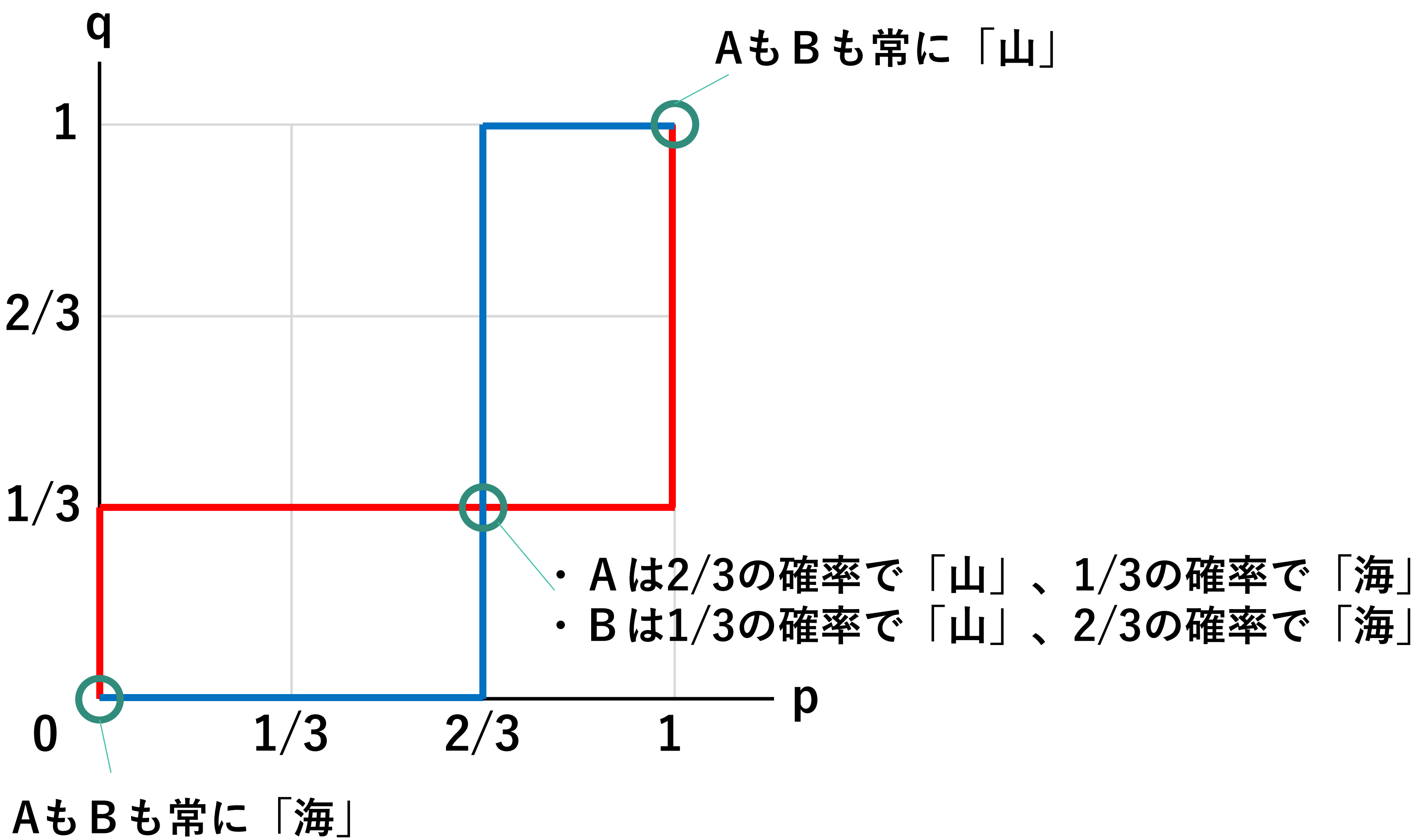
同様に、Bの期待利得を計算し、戦略を求めると

$$\max_{p} EU_B = (3p-2)q + 2 - 2p$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} q = 1 \quad \text{if} \quad p > 2/3 \\ q = 0 \quad \text{if} \quad p < 2/3 \\ 0 \le q \le 1 \quad \text{if} \quad p = 2/3 \end{array}$$

参考：混合戦略ナッシュ均衡の例

以上を図示すると



期待利得最大化問題を解くことにより、
混合戦略におけるナッシュ均衡が導かれた