Optimal Transport Networks In Spatial Equilibrium

Pablo D. Fajgelbaum Edouard Schaal (2017)

NATIONAL BUREAU OF ECONOMIC RESEARCH 1050
Massachusetts Avenue
Cambridge, MA 02138

February 2017, Revised March 2017

理論談話会2019 #4
B4 小関玲奈
2019/05/10

Contents

1. Introduction

◘ 目的：交通インフラ投資の最適化

- 交通インフラはTrade cost (輸送コスト)に強く影響する
  →社会基盤投資の地域的分配とそれによる全体としての利得を最適化したい

- しかし，現実のインフラ投資は地域の軋轢や利権にも左右されて最適ではない交通ネットワークが築かれ，貿易や発展を阻害しうる.
  → 既存のネットワークの効率性を，最適な社会基盤投資を考えることによって考察する.

◘ モデルの特徴

基本は多財を扱う新古典派経済モデルだが，本研究の特徴は，

- 空間的展開
- <u>輸送コスト</u>が経路選択に反映される
  →輸送量(混雑)とインフラ投資の大小とによって内生的に決定
- 交通ネットワーク(インフラ投資)問題，需給の配分問題，輸送のフロー，を同時に解く

◘ ヨーロッパの道路ネットワークへの適用

- 応用として，道路ネットワークの最適化による国レベルでの統合的な効用を測る.
- 現在の道路の誤配置(misallocation)によるpotential lossも測る

2. Relation to the Literature

- 最適輸送問題を解く既存の研究は交通ネットワークを所与としている
- 最適輸送問題に関する既往研究では混雑を考慮に入れていないため，どの一般均衡解からも独立して解くことができる→本研究では**混雑を考慮**
- 既存研究では，それぞれの地域はただ一つの生産地からそれぞれの商品を仕入れる
  - Armington model では一つの商品は一つの場所で生産される
  - →本論文は配分問題の一般均衡解，つまり一つの商品も複数のlocationsから仕入れる
- 交通ネットワーク(インフラ投資)問題，需給の配分問題，全体のフローを同時に解く既存研究はない

3. Model

3.1 Model　Environment

Preferences

utility function：$u = U(c_j, h_j)$　(1)

c_j:貿易財の消費単位数
h_j:日貿易財の消費単位数

- *locations:* $J = \{1, .., J\}$:経済は離散した地点から構成される
- L_j：jにおける労働者数，L：労働者の総数
- 2つのケースを検討：
  (1) L_j がモデル自身によって内生的に決まる(mobile)
  (2) L_j が 固定(immobile)
- C_j：地点jで供給される財の集合体．n=1,…,Nのセクターに分かれている．
- C_j^n：セクターnの消費量の総和
- c_j： C_j/L_j:労働者一人当たりの貿易財の消費量

Production

production function: $Y_j^n = F_j^n(L_j^n, \boldsymbol{V}_j^n, \boldsymbol{X}_j^n)$

- $\boldsymbol{V}_j = (V_j^1, \dots, V_j^n)'$:労働力$L_j^n$の他の生産要素(供給一定).
  地域を超えては動かせないが，同一地点でのセクター間での移動は可能.
- $\boldsymbol{X}_j = (X_j^{1n}, \dots, X_j^{Nn})$:セクターn以外の生産物からセクターnの生産に中間財として割り当てられる量
- F_j^n：規模に関して収穫一定，全ての因数に関して凹な増加関数

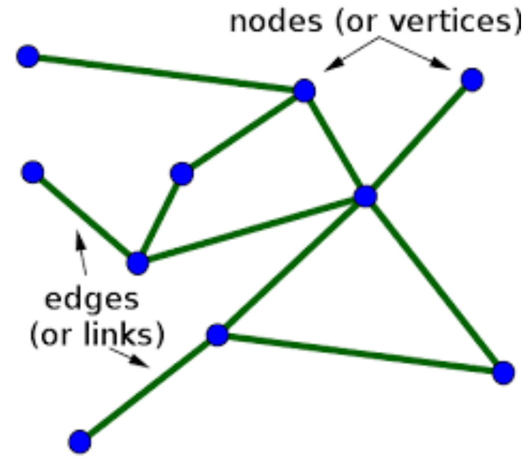
3.1 Model　Environment

Underlying Graph

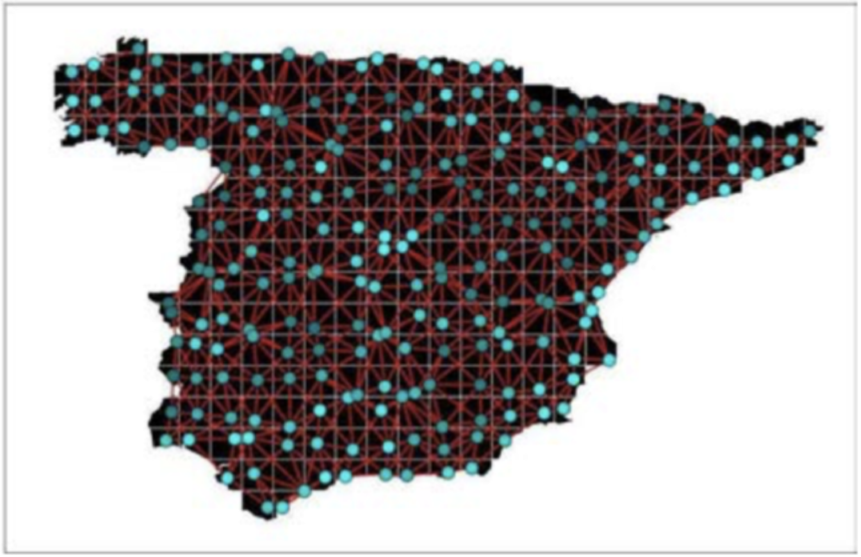
- 地域Lは，無向グラフ上に配置

$$G = (J, E)$$ J: locations, E: edges

- $\mathcal{N}(j)$; 地域jと隣接した地域の個数.
財は隣接した地域間で輸送される.
(航空/海上輸送で直接輸送できる場合も含められる)



(b) Nodes and Edges in the Baseline Graph



交通network の設計は，このノード間をつなげるインフラのレベルを決めること.

3.1 Model　Environment

Transport Technology

$$\tau_{jk}^{n} = \tau_{jk}(\mathrm{Q_{jk}^{n}}, I_{jk}) \qquad (4)$$

- τ_{jk}^{n} ：輸送費(財nを地域jから隣接する地域kへ．輸送される財自身の単位数として表す)
  →iceberg cost(氷塊型輸送費用): 財の輸送に伴い財の一部が(溶けて)消失するという仮定．財nを輸送先の地域kで1単位消費するためには，地域jから$(1+\tau_{jk}^{n})$ 単位輸送する必要がある．（消費者負担）
- $\mathrm{Q_{jk}^{n}}$: 輸送量
- I_{jk} ：インフラのレベル

$$\frac{\partial \tau_{jk}^{n}}{\partial \mathrm{Q_{jk}^{n}}} \geq 0 \qquad (5)$$

：輸送セクターでの収穫逓減＝混雑

→輸送量が増えるほど，1単位あたりの輸送費が増加する.

道路使用量の増加や倉庫業・特産品の生産など土地集約的な生産要素の存在など.

$$\frac{\partial \tau_{jk}^{n}}{\partial \mathrm{I_{jk}^{n}}} \leq 0$$

→インフラ改善により輸送費を下げることを可能にする.

舗装状況，レーン数，ロードサイドサービスなど

- $\tau_{jk}(\mathrm{Q_{jk}^{n}}, 0) = \infty, \tau_{jk}(\mathrm{Q_{jk}^{n}}, \infty) = 0$ ：インフラ無限なら輸送費０，インフラ0なら輸送費無限
- 輸送費τ_{jk}^{n}はインフラや輸送量が同じでもノードや方向によって異なる(距離や起伏を反映)

3.1 Model　Environment

Flow Constraint

iceberg cost

$$C_j^n + \sum_{n'} \boxed{X_j^{nn'}} + \sum_{k \in N(j)} \boxed{\left(1 + \tau_{jk}^n\right)} Q_{jk}^n \leq Y_j^n + \sum_{i \in N(j)} Q_{ij}^n \qquad (6)$$

jでの
nの
消費量

nの生産量のうち，他
のセクターn′で**中間財**
として使われる量

全輸出量

生産量

輸入量
(iからjへ)

- P_j^n をこの制約条件のラグランジュ乗数とする→財nの地域jにおける価格と等しくなる(定理4)

Network Building Technologies

交通ネットワークの最適化＝インフラ投資の分配の最適化

Network building constraint

J-k間のインフラ建設に
必要なKのユニット数

$$\sum_j \sum_{k\in N(j)} \boxed{\boxed{\delta^I_{jk}} I_{jk}} = \boxed{K} \quad (7)$$

δ^I_{jk}: jkにおけるインフラ建設コストを示すパラメータ.
リンクごとの違いは，インフラ資源の分配による地域間のトレードオフを示す.

K: インフラをつくるのに必要で運搬可能な資源(コンクリートなど）の総量(一定)，他の用途には使えない

インフラ建設量の制約

$$0 \leq \underline{I}_{jk} \leq I_{jk} \leq \overline{I}_{jk} \leq \infty.$$

既存量　　　空間的に可能な量の上限

3.2 Model　Planner's Problem

Definition 1
(without labor mobility)

$$W = \max_{\substack{c_j, h_j, C_j, \{I_{jk}\}_{k\in\mathcal{N}(j)}, \\ \left\{C_j^n, L_j^n, \mathbf{V}_j^n, \mathbf{X}_j^n, \{Q_{jk}^n\}_{k\in\mathcal{N}(j)}\right\}_n}} \sum_j \boxed{\omega_j} L_j U(c_j, h_j)$$

Plannerが地域jのそれぞれのworkerに対する重み付け

subject to:

(i) 貿易財と非貿易財の利用可能性

$$c_j L_j \le C_j^T \left(C_j^1, \ldots, C_j^N\right) \text{ for all } j; \qquad h_j L_j \le H_j \text{ for all } j;$$

(ii) フローバランスに関する制約条件　　*production function*: Y_j^n

$$C_j^n + \sum_{n'} X_j^{nn'} + \sum_{k\in\mathcal{N}(j)} \left(1 + \tau_{jk}\left(Q_{jk}^n, I_{jk}\right)\right) Q_{jk}^n \le F_j^n\left(L_j^n, \mathbf{V}_j^n, \mathbf{X}_j^n\right) + \sum_{i\in\mathcal{N}(j)} Q_{ij}^n \text{ for all } j, n;$$

(iii) インフラ建設(network building)に関する制約条件

$$\sum_j \sum_{k\in\mathcal{N}(j)} \delta_{jk}^I I_{jk} \le K,$$

$$s.t. \quad 0 \le \underline{I}_{jk} \le I_{jk} \le \overline{I}_{jk} \le \infty \text{ for all } j, k \in \mathcal{N}(j);$$

(iv) 地域の労働力，その他の生産要素の上限

$$\sum_n L_j^n \le L_j \text{ for all } j;$$

$$\sum_n V_j^{mn} \le V_j^m \text{ for all } j \text{ and } m;$$

(vi)消費，流通，生産要素は負でない

$$\begin{aligned} C_j^n, c_j, h_j &\ge 0 \text{ for all } j \in \mathcal{N}(j), n \\ Q_{jk}^n &\ge 0 \text{ for all } j, k \in \mathcal{N}(j), n \\ L_j^n, V_j^{mn} &\ge 0 \text{ for all } j, m, n. \end{aligned}$$

3.2 Model　Planner's Problem

Definition 2
(with labor mobility)

$$W = \max_{\substack{u, c_j, h_j, C_j, \{I_{jk}\}_{k \in \mathcal{N}(j)}, \boxed{L_j}, \\ \left\{C_j^n, L_j^n, \mathbf{V}_j^n, \mathbf{X}_j^n, \{Q_{jk}^n\}_{k \in \mathcal{N}(j)}\right\}_n}} u$$

Subject to: restrictions (i)~(vi) above; as well as:

(vii) 労働力の可動性について

$$L_j u \leq L_j U(c_j, h_j) \;\; for\ all\ j;$$

(viii) 労働力総数の整合性

$$\sum_j L_j = L.$$

→最適配分により全地域における効用の均等化.
Uは単調増加だから，プランナーは，人口のある地域ではどこでも$\mathrm{u} = \mathrm{U}(c_j, h_j)$を配分し，人口がゼロのところであれば， $c_j = 0$とすることを示唆

3.2 Model　Planner's Problem

Definition1 を入れ子式で表すと，(Definition2 も同様)

$$W = \underbrace{\max_{I_{jk}} \underbrace{\max_{Q^n_{jk}} \underbrace{\max_{\{C^n_j, L^n_j, \mathbf{V}^n_j, \mathbf{X}^n_j\}} \sum_j \omega_j L_j U\left(c_j, h_j\right)}_{\text{Optimal Allocation}}}_{\text{Optimal Flows}}}_{\text{Optimal Network}}$$

→新古典派経済学の一般的な配分問題

Planner's Problem —Optimal Flows—

Optimal Flow Problem

→最適な輸送量Q_{ij}^nを決めるが，同時に
「輸送の最適化問題」も含む
(1) 生産地から目的地への繋ぎ方
(2) 混雑問題の中，輸送コストを最小化

$$W = \max_{I_{jk}} \underbrace{\max_{Q_{jk}^n} \underbrace{\max_{\{C_j^n, L_j^n, \mathbf{V}_j^n, \mathbf{X}_j^n\}} \sum_j \omega_j L_j U(c_j, h_j)}_{\text{Optimal Allocation}}}_{\text{Optimal Flows}}$$

Optimal Network

Planner's problem(ii)フローバランスに関する条件

$$C_j^n + \sum_{n'} X_j^{nn'} + \sum_{k \in \mathcal{N}(j)} (1 + \tau_{jk}(Q_{jk}^n, I_{jk})) Q_{jk}^n \leq F_j^n (L_j^n, \mathbf{V}_j^n, \mathbf{X}_j^n) + \sum_{i \in \mathcal{N}(j)} Q_{ij}^n \ \textit{for all } j,\ n;$$

→Pはこれの乗数

$$\frac{P_k^n}{P_j^n} \leq \underbrace{\boxed{1 + \tau_{jk}^n}}_{\text{iceberg cost}} + \underbrace{\boxed{\frac{\partial \tau_{jk}^n}{\partial Q_{jk}^n} Q_{jk}^n}}_{\text{marginal transport cost}} = \text{if } Q_{jk}^n > 0. \quad (8)$$

→輸送2地点間の価格比はmarginal transport cost以下でなければならない
(輸送量1単位を増やした時，輸送費がどれだけ増えるか．)

→プランナーの視点で，混雑による収穫逓減を考慮に入れている．混雑がなければ，$\frac{\partial \tau_{jk}^n}{\partial Q_{jk}^n} = 0$

Gravity trade model などの既存の研究による輸送費用最小化は，本モデルにおける「混雑なし」ケースにあたり，その場合は輸送最適化問題はモデルの他の部分から独立して解ける．しかし，本モデルで輸送費用最適化問題を求めるには，flow，supply，demandについての情報が必要(Optimal Allocationと一緒に解く必要)

Planner's Problem —Optimal Flows—

$$\frac{P_k^n}{P_j^n} \leq \underbrace{\boxed{1+\tau_{jk}^n}}_{\text{iceberg cost}} + \underbrace{\boxed{\frac{\partial \tau_{jk}^n}{\partial Q_{jk}^n} Q_{jk}^n}}_{\text{marginal transport cost}}, \; = \text{ if } Q_{jk}^n > 0.$$

$$W = \underbrace{\max_{I_{jk}} \underbrace{\max_{Q_{jk}^n} \underbrace{\max_{\{C_j^n, L_j^n, \mathbf{V}_j^n, \mathbf{x}_j^n\}} \sum_j \omega_j L_j U\left(c_j, h_j\right)}_{\text{Optimal Allocation}}}_{\boxed{\text{Optimal Flows}}}}_{\text{Optimal Network}}$$

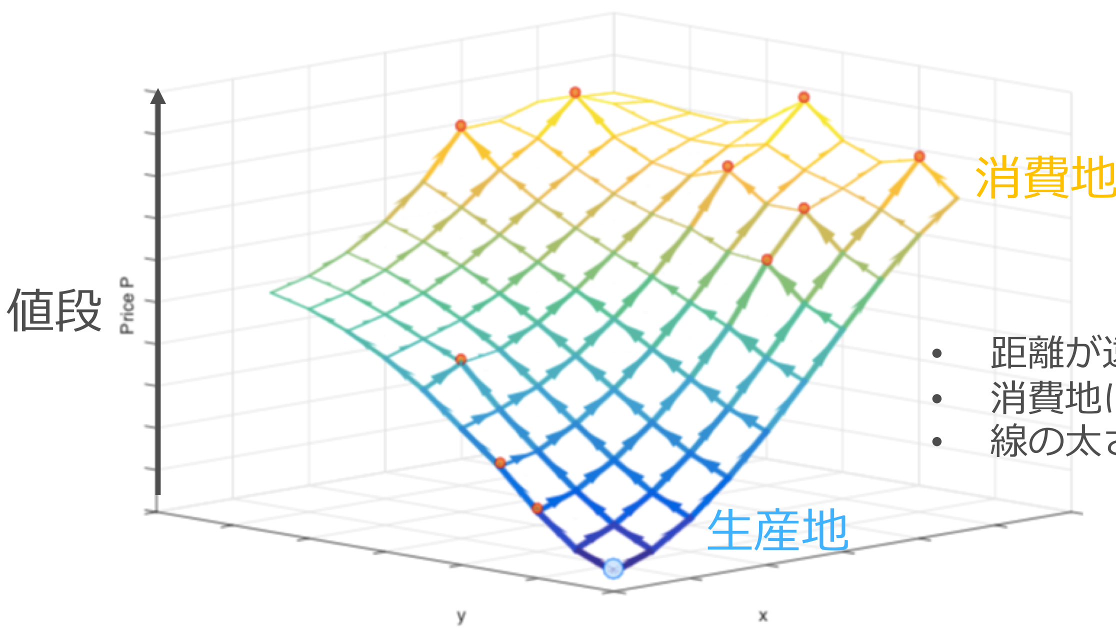
特徴

- 輸送費の総額$Q_{jk}^n \tau_{jk}^n$がQ_{jk}^nに関して凸の時，

インフラ投資が与えられれば(→τ_{jk}^nはQによって決まる)流通量Qを価格比として示すことになる．

→製品がより希少なところへのflowが大きい

- それぞれのセクター内での流通は一方向のみ



- 距離が遠くなるにつれ価格は上昇
- 消費地において値段はlocal peak
- 線の太さが輸送量

Figure 1: Example of Optimal Flows as a Function of the Price Field

Planner's Problem —Optimal Network—

Optimal Network Problem

$$W = \underbrace{\max_{I_{jk}} \underbrace{\max_{Q_{jk}^n} \underbrace{\max_{\{C_j^n, L_j^n, \mathbf{V}_j^n, \mathbf{x}_j^n\}} \sum_j \omega_j L_j U(c_j, h_j)}_{\text{Optimal Allocation}}}_{\text{Optimal Flows}}}_{\text{Optimal Network}}$$

Planner's problem(ⅲ) インフラ建設に関する条件

$$\sum_j \sum_{k \in \mathcal{N}(j)} \delta_{jk}^I I_{jk} \leq K,$$

$$s.t. \quad 0 \leq \underline{I}_{jk} \leq I_{jk} \leq \overline{I}_{jk} \leq \infty \; for \; all \; j, k \in \mathcal{N}(j);$$

→μはこの制約条件の乗数とする

Trade flows

$$\underbrace{\mu \delta_{jk}^I}_{\text{Marginal Building Cost}} \geq \underbrace{\sum_n P_j^n Q_{jk}^n \boxed{\left(-\frac{\partial \tau_{jk}^n}{\partial I_{jk}}\right)}}_{\text{Marginal Gain from Infrastructure}}$$

1単位あたりの
輸送費の減少

限界建設費用:

インフラ建設による限界収益

μ：インフラ資源Kの限界価格(marginal value)

$\delta_{\mathrm{jk}}^{\mathrm{I}}$：j-k間のインフラに対し材料Kがしめる割合(建設コストを示すパラメータ)

Optimal Flowsで求められたPの比の関数として表されるQを代入すれば，IもPの比の関数で表される.
→広大な空間に広がる膨大な"ネットワーク数"よりはるかに少ないデータセットである"全ての価格"を与えることで，リンクごとに最適なインフラ投資を求めることができる

3.3 Model　Properties

定理１：Planner's problem の凸性

(ⅰ)ネットワーク$\{I_{jk}\}$が与えられた時， $\boldsymbol{Q_{jk}^{n}\tau_{jk}^{n}(Q, I_{jk})}$**が全てのj,kに対してQについて凸なら**，結合したoptimal allocation と optimal flowsは凸最適化問題である．

(ⅱ) さらに，$\boldsymbol{Q_{jk}^{n}\tau_{jk}^{n}(Q, I_{jk})}$**がQとIとの両方において凸なら**，planner's problem の全てが凸最適化問題．

どちらにおいても，laborが固定なら，強い双対性(duality)をもつ．

Example: Log-linear Parametrization of Transport Costs

$$\tau_{jk}(Q, I) = \delta_{jk}^{\tau} \frac{Q^{\beta}}{I^{\gamma}} \text{ with } \beta \geq 0, \gamma \geq 0. \tag{10}$$

- $\mathcal{B} > 0$：混雑．流通量が増えるほどコスト上昇
  $\mathcal{B} = 0$：iceberg costと同様に量によらずコスト一定
- γ:インフラ投資に対する単位あたり輸送コストの弾力性
  $\gamma \geq 0$：交通インフラ投資により輸送コストを減少
- δ_{jk}^{τ}:距離や起伏，高低差などの地理的な貿易の障害
- Restriction: $Q_{jk}^{n}\tau_{jk}^{n}(Q, I_{jk})$は凸

3.3 Model　Properties

① **$Q_{jk}^n \tau_{jk}^n(Q, I_{jk})$が凸になるのは，$\mathcal{B} \geq \gamma$の時のみ→交通インフラ投資効果は収穫逓減.**
：輸送費の変化には，インフラ投資よりも輸送量の方が効く.

Pとδが与えられると，インフラがいい方が流通量は多い

②条件(8) $\frac{P_k^n}{P_j^n} \leq 1 + \tau_{jk}^n + \frac{\partial \tau_{jk}^n}{\partial Q_{jk}^n} Q_{jk}^n, = \text{if } Q_{jk}^n > 0.$ より，流通量の総量が $Q_{jk}^n = \left[\frac{1}{1+\beta} \frac{I_{jk}^\gamma}{\delta_{jk}^\tau} \max\left\{\frac{P_k^n}{P_j^n} - 1, 0\right\}\right]^{\frac{1}{\beta}}$ (11)

③輸送技術(10)より，最適なインフラは(既存のインフラに追加する場合)

$$I_{jk}^* = \left[\frac{\gamma}{\mu} \frac{\delta_{jk}^\tau}{\delta_{jk}^I} \left(\sum_n P_j^n \left(Q_{jk}^n\right)^{1+\beta}\right)\right]^{\frac{1}{1+\gamma}} \quad (12)$$

γ:インフラ投資に対する単位あたり輸送コストの弾力性
δ_{jk}^τ:距離や起伏，高低差などの地理的な貿易の障壁
$\delta_{\mathrm{jk}}^{\mathrm{I}}$：jkにおけるインフラ建設コストを示すパラメータ
link-specific building cost

→出発点での価格が与えられると，最適な交通インフラ投資I^*は流通量に伴って増加.
流通量が与えられると，最適な交通インフラ投資I^*は出発点での価格に伴って増加.
I^*はδ_{jk}^τに伴って増加： 最適なインフラは地理的制約を相殺する.
I^*はδ_{jk}^Iに伴って減少：建設コストがかかるところで投資は減る.

- いずれかの財の価格が異なる２地点間を結ぶインフラ建設への投資はいつでも正

$$I_{jk} = \max\left\{I_{jk}^*, \underline{I}_{jk}\right\} \quad (13)$$

- (11)と(9)より ,各リンクの最適な交通インフラ投資I^*は価格のみで表せて，

$$I_{jk}^* = \left[\frac{\kappa}{\mu \delta_{jk}^I \left(\delta_{jk}^\tau\right)^{\frac{1}{\beta}}} \left(\sum_{n: P_k^n > P_j^n} P_j^n \left(\frac{P_k^n}{P_j^n} - 1\right)^{\frac{1+\beta}{\beta}}\right)\right]^{\frac{\beta}{\beta-\gamma}}$$

$$\kappa \equiv \gamma(1+\beta)^{-\frac{1+\beta}{\beta}}$$

3.3 Model　Properties

定理2：Log-Linear caseにおけるOptimal Network

輸送技術が(10)にように与えられる場合， $\mathcal{B} \geq \gamma$においてPlanner's Problem の全てが凸.
最適なインフラは(13) $I_{jk} = \max\{I^*_{jk}, \underline{I}_{jk}\}$ によって与えられる；既存のネットワークがなければ，
$I_{jk} = 0 \Leftrightarrow P^n_k = P^n_j \ for \ all \ n.$

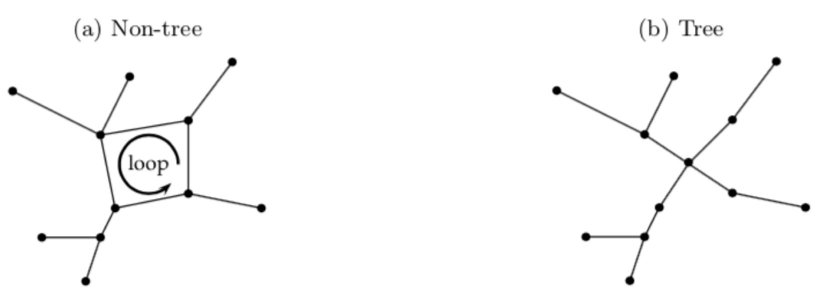
→輸送技術にlog-linearを導入する場合は，交通インフラ投資がゼロとなりうるのは，どのセクターにおいても2地点間で値段が全て等しい＝貿易のインセンティブがない時のみ.
（輸送技術が一般的な場合は，価格差のある2地点間でインフラや貿易量がゼロになることもあり得る．）

定理３：Non-Convexity: the case of increasing return to transport

既存のインフラがない場合，輸送技術が(10)でかつ $\mathcal{B} < \gamma$の時，そしてさらに唯一の場所で特産品が生産される場合，最適交通ネットワークはツリー構造になる.

→交通インフラへの投資が収穫逓増の場合
→計画者には，数少ないインフラに投資と流通量を集中させるインセンティブが働く
→非効率的なリンクは削除され，tree構造に
→一つの商品を多数の地域で生産している場合はnon-tree構造で最適化を実現するが，それでも少ないリンクに投資を集中させようというインセンティブは残る($\mathcal{B} \geq \gamma$の時に比べて)

Figure 2: Examples of tree and non-tree networks



Decentralized Allocation Given the Network

ネットワーク$\{I_{jk}\}$が与えられた時のoptimal allocation problem と optimal transportation problemを考える.

- この時分散型経済は新古典派経済学における完全競争均衡社会と一致.
- 特殊な点は混雑を考慮した輸送セクターの存在

→**外部性としての混雑の非効率性を是正するために市場の原理が働く.**

→ピグー税の導入：t^n_{jk}

→iceberg cost の最小化ではなく，１リンクごとの税を考慮に入れる.

財nをoからdまで運ぶtraderの利益最大化問題

Originからdestinationまでの連続したルート

始点から終点までのiceberg costの合計

$$\pi^n_{od} = \max_{r=(j_0,\ldots,j_\rho)\in\mathcal{R}_{od}} p^n_d - \underbrace{p^n_o \boxed{T^n_{r,0}}}_{\text{Sourcing Costs}} - \underbrace{\sum_{k=0}^{\rho-1} p_{j_{k+1}} t^n_{j_k j_{k+1}} T^n_{r,k+1}}_{\text{Taxes}},$$

Traderの利益

売り渡し価格　買い付け価格　　ピグー税

- 均衡社会を定義するために，労働者はwageの他に譲渡t_jを受け取る.

$$\sum_{j=1}^{J} t_j L_j = \Pi \text{ (}\Pi\text{は労働力以外の全ての生産要素の集合)}$$

→労働者は税収を払い戻され，生産要素や非貿易財を全て所有

→計画者の恣意的な重み付けによる不均衡な貿易を許容

Decentralized Allocation Given the Network

定理4：First and Second Welfare Theorems

ピグー税が

$$1 - t_{jk}^{n} = \frac{1 + \tau_{jk}^{n}}{1 + \left(\varepsilon_{Q,jk}^{n} + 1\right)\tau_{jk}^{n}}, \quad where\ \varepsilon_{Q,jk}^{n} = \partial \log \tau_{jk}^{n} / \partial \log Q_{jk}^{n},$$

のとき,

(ｉ)労働力が不可動なら，各地点の労働者への特定の重み付けのもと，競争的配分が計画者の最適化問題と一致する．逆に，特定の譲渡t_jのもとで計画者配分が市場配分と一致.

(ⅱ)労働力が可動なら，競争的配分が計画者の最適問題と一致するのは，地点によらず，全ての労働者がfixed factorsとtax revenueを平等に分け合うときのみ.($t_j = \frac{\Pi}{L}$)

どちらの場合も，市場の均衡による価格と，計画者問題のbalanced-flow constraint の乗数P_j^nは一致.

→(ｉ)はモデルの応用に有用．現在の市場の状態を競争均衡と想定→モデルのcalibrationが可能

Numerical Implementation

(参照：論文p20.21.)

- Convexity : dual approaches によって最終的には非負制約のみの凸最適化問題に.

- Non-convexity:凸性を失い，上記のように大域的最適解を求められない.

  → ネットワーク投資I_{jk}の推測からはじめ(初期値を付与)，需要C,労働力L，投入量V, 流通量Qを最適化問題によって求め，ネットワーク最適化の条件(9)を用いて新たなI_{jk}を求め，収束するまで繰り返す．さらに，annealing method (焼きなまし法) によって大域的最適解に対してよい近似を与える.

Extensions

➢ Congestion Across Goods

これまで過程では混雑は同一種類内での混雑を想定していたが，単位あたり輸送費τ_{jk}^{n}を単位あたり商品個別に考えるのではなく，**jからkに輸送される全ての商品の総量に対して考えて**，

$$\tau_{jk}^{n} = m^{n}\tau_{jk}\left(Q_{jk}, I_{jk}\right)$$

とすれば良い．ここで，mはセクターにごとの商品の体積や重さを示すパラメータ.
→（輸送技術として(10)のlog-linearを使えば，これまでと同様の条件下で解くことができ，）その結果，重すぎる商品は他のセクターの輸送費(marginal congestion)に影響を与えるため，地域間で価格差があったとしても輸送されない.

➢ Endogenous Supply of Resources in Infrastructure

これまでの過程ではインフラ建設に必要な資源は固定的なひとつの集合体としていたが，これを通用の流通の中で供給され，内生的に決まるものとすることも可能.
→これによって，住宅などの他の財に使われる生産要素がインフラ建設資材となる状況をつくれる.

➢ Externalities and Insufficiencies in the Market Allocation

ピグー税によって混雑という外部性を是正しなければ，市場はinsufficient
→虚偽のplannerを想定することによって解くことが可能.（生産関数がLに依存していること，または，輸送コストが輸送量に依存していることを無視）仮においたLと実際のLが一致するように追加のループ計算が必要になる．一致すれば，非効率な市場の配分と一致，ということになる.

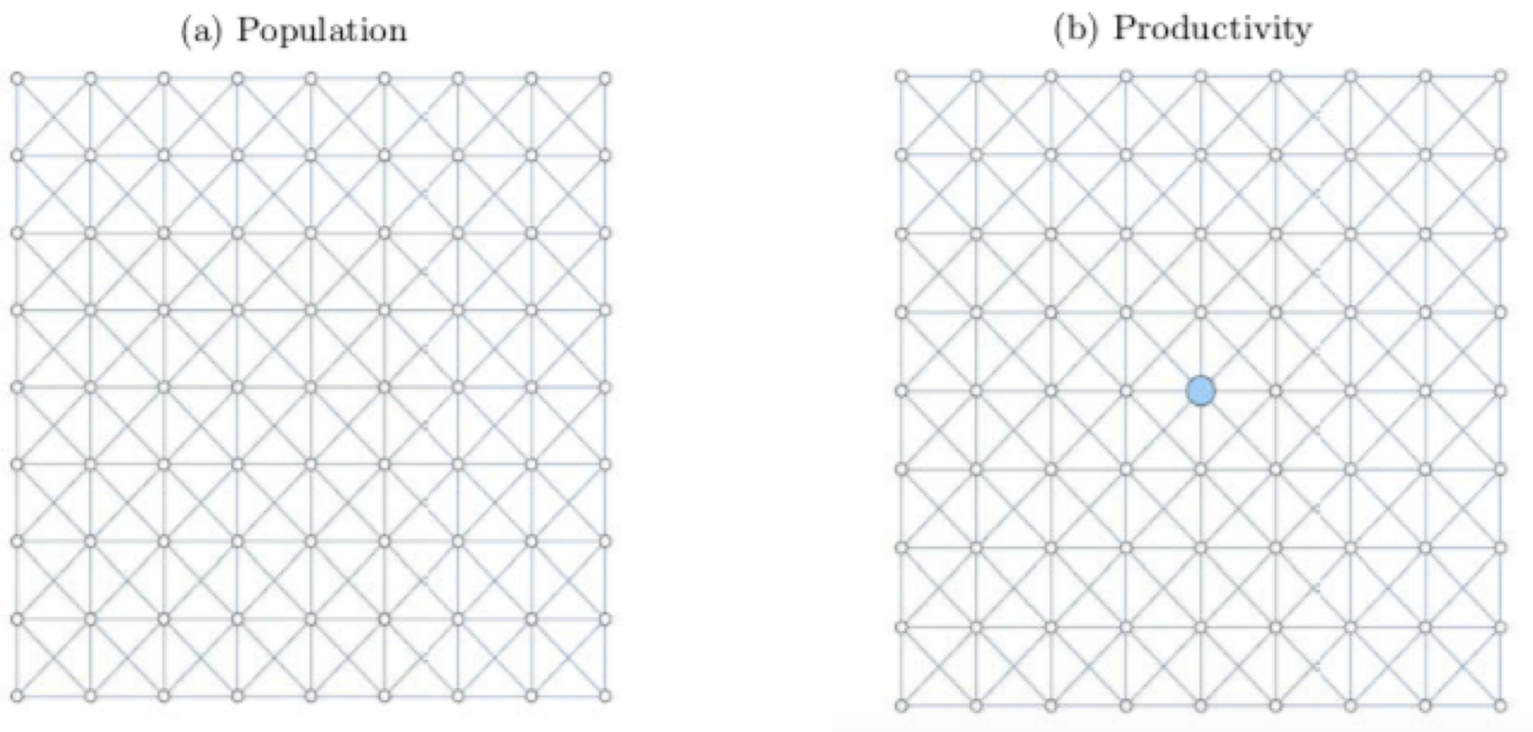
4. Illustrative Examples

4.1 Illustrative Examples **One Good on a Regular Geometry**

4. の例全てに共通
効用関数はCRRA型:$U = c\alpha$h1$-\alpha$ 1$-\rho/(1-\rho)$ $with$ $\alpha = 1$ and $\rho = 2$
労働やすべての技術は線形，生産要素は労働のみ), 輸送技術は(10)

Comparative Statics over K in a Symmetric Network

財1, 生産要素は労働のみ，$\beta=\gamma=1$，no labor mobility, no geographic frictions, K : aggregate investment

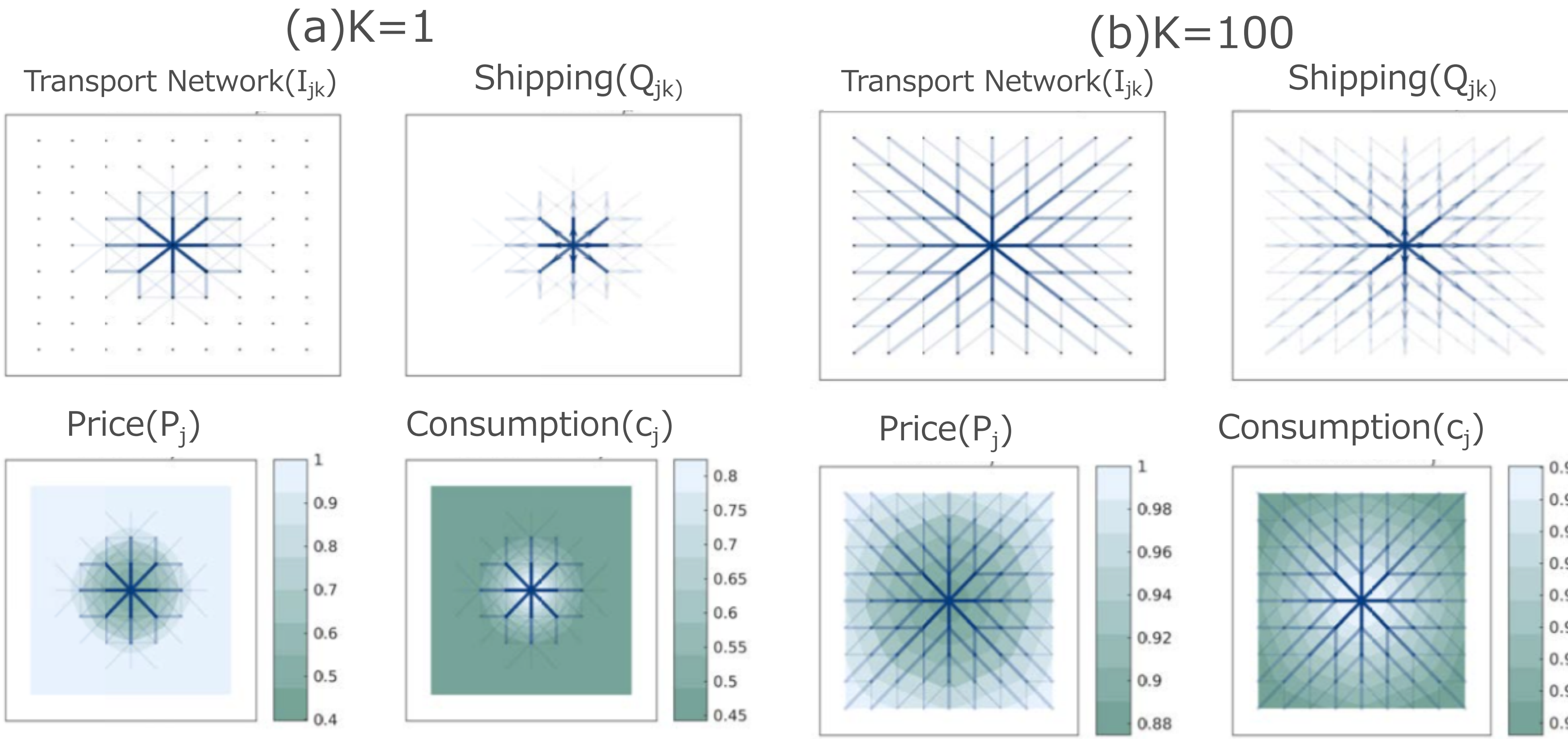


9× 9 の地域，productivity以外は全て対象．中央の青丸のみProductivityが10倍

4.1 Illustrative Examples **One Good on a Regular Geometry**

Comparative Statics over K in a Symmetric Network

Figure A.2: The Optimal Network for $K = 1$ and $K = 100$

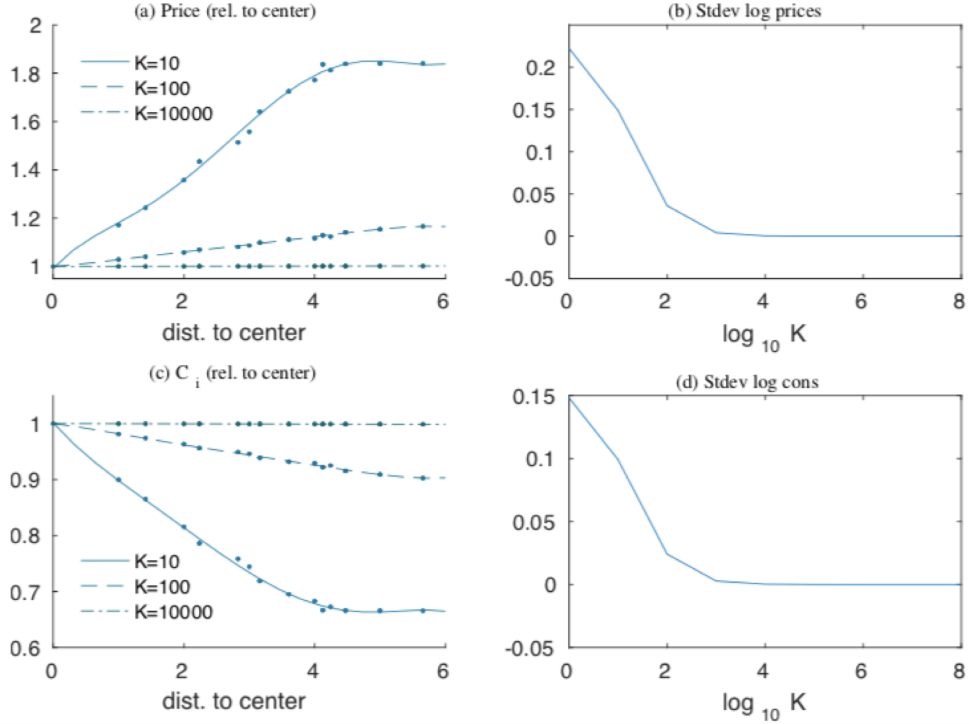


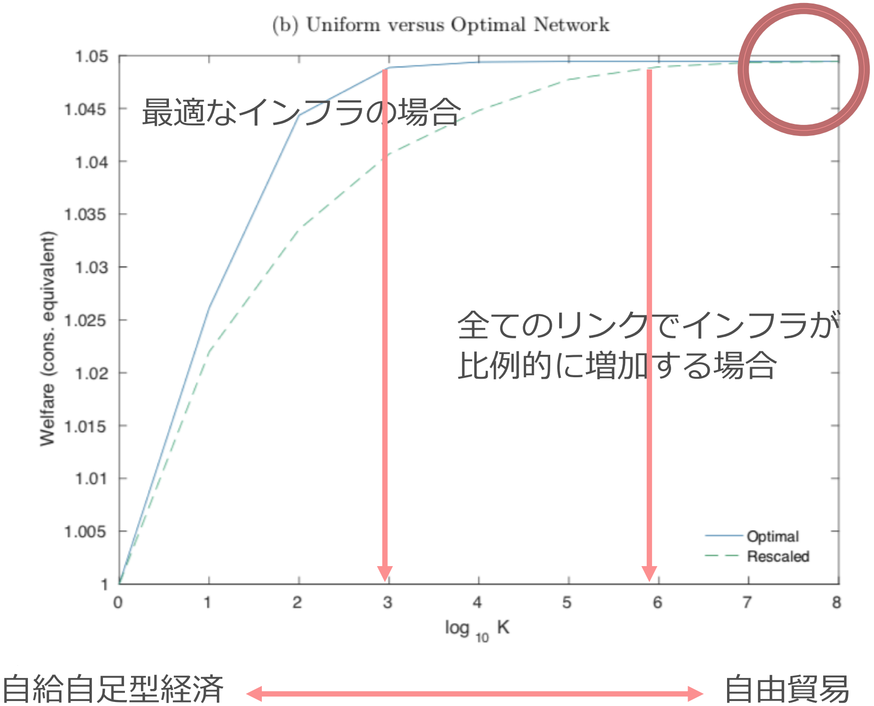
インフラへの総投資が上昇すると，資源がネットワークの外側まで行き渡り，価格の差も縮まる

Comparative Statics over K in a Symmetric Network

Figure A.3: Optimal Network Growth

(a) Spatial Inequalities





インフラへの投資が増えると価格，消費はともに中心部の水準に集約していき，不平等が小さくなっていく．

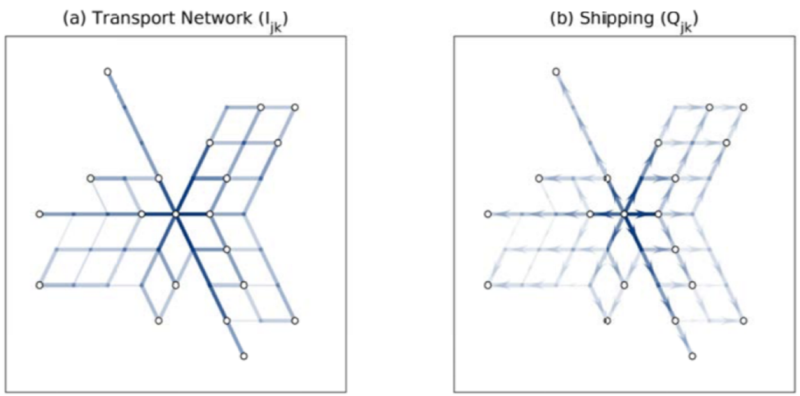
どちらにしても全体の効用は5%増へ到達するが，最適化されたインフラの場合，自由貿易と同じ水準の効用まで達するのが速い

4.1 Illustrative Examples **One Good on a Regular Geometry**

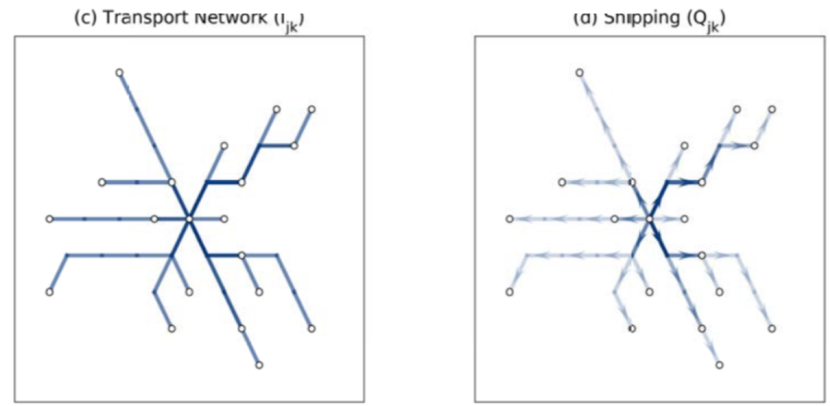
Randomly Located Cities and Non-Convex Cases

- 20のランダムに配置されたcities.
- それぞれが６都市と隣接・労働者Lは1 or 0・productivityは中心で10倍

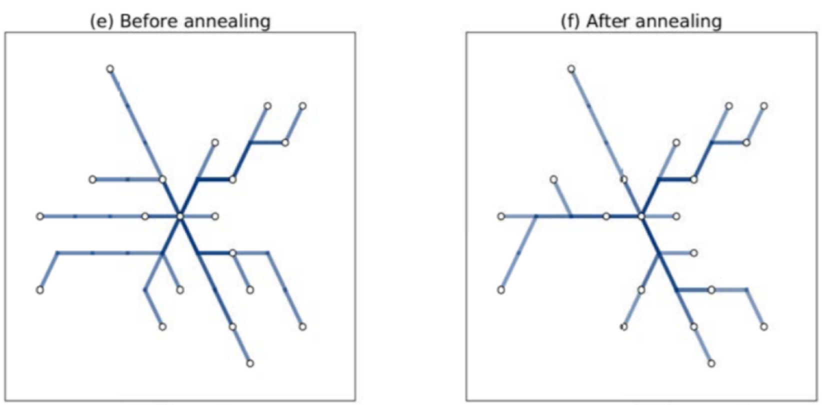
(a) Convex case



(b) Non-Convex case



(c) Optimal Network Before and After Annealing Refinement in Non-Convex Case



(a)Convex: 最適ネットワークは中心部から全方向にインフラが発達している．混雑の影響で一つの場所へ行くのに複数にルートが存在しているが，遠く離れた場所についてはルートは一つ

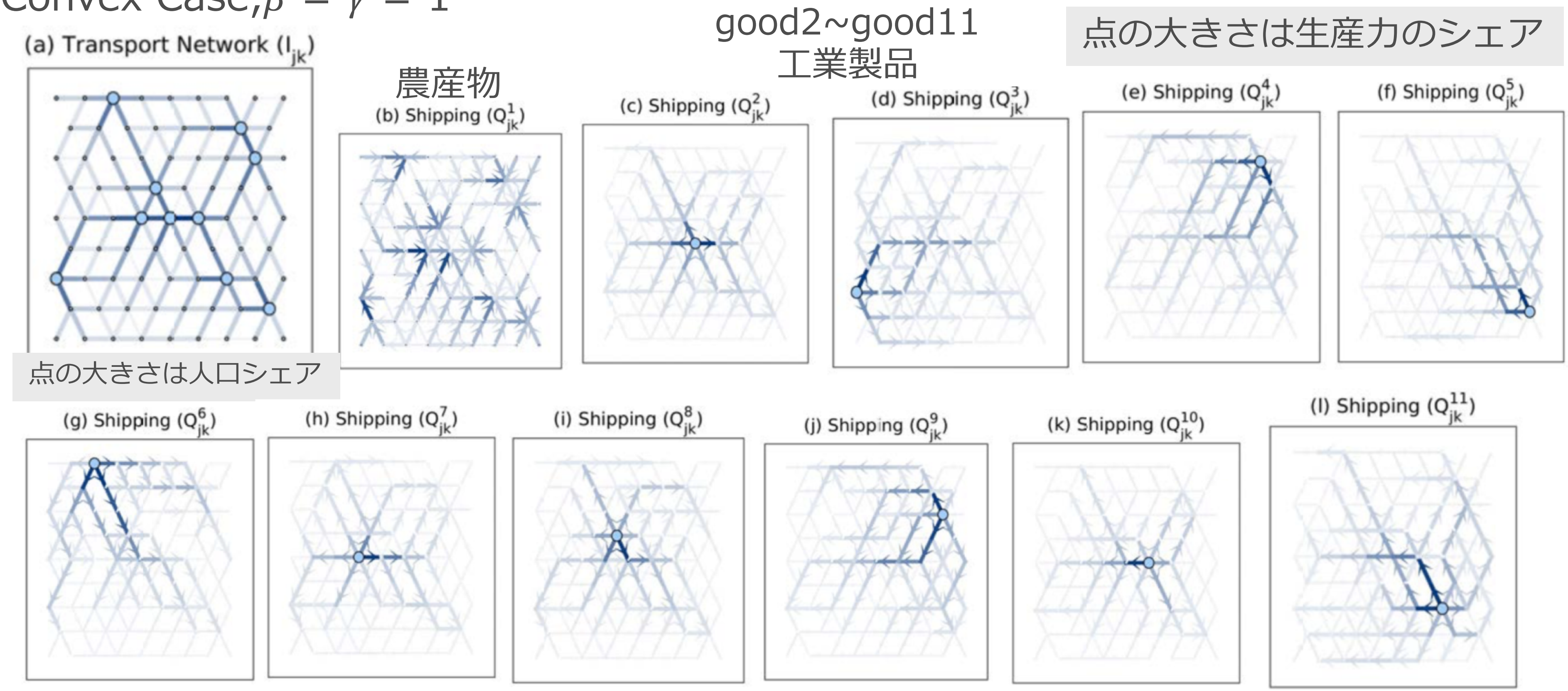
(b)Non-Convex:インフラ建設に関して収穫逓増のため，ネットワーク数は減少しているがそれぞれのインフラの質が向上．ループのないツリー構造（Proposition3）

(c): non-convexの場合の，アルゴリズムによるannealingパターン．リンクの節約により効用が上昇．ツリー構造は維持.

4.2 Illustrative Examples **Many Sectors, Labor Mobility, and Non-Convexity**

- 11の貿易財
  - 農産物(good 1): 都市(10個)以外の周辺ノードで生産. (z_j^1 = 1 in all “countryside” locations)
  - 工業製品：それぞれが特定の1都市で生産. (z_j^n = 1 in only one city j and z_j^n = 0 otherwise)
- 労働者は移動，地理的障害なし,各財の代替弾力性はσ = 2.

Convex Case,$\beta = \gamma = 1$

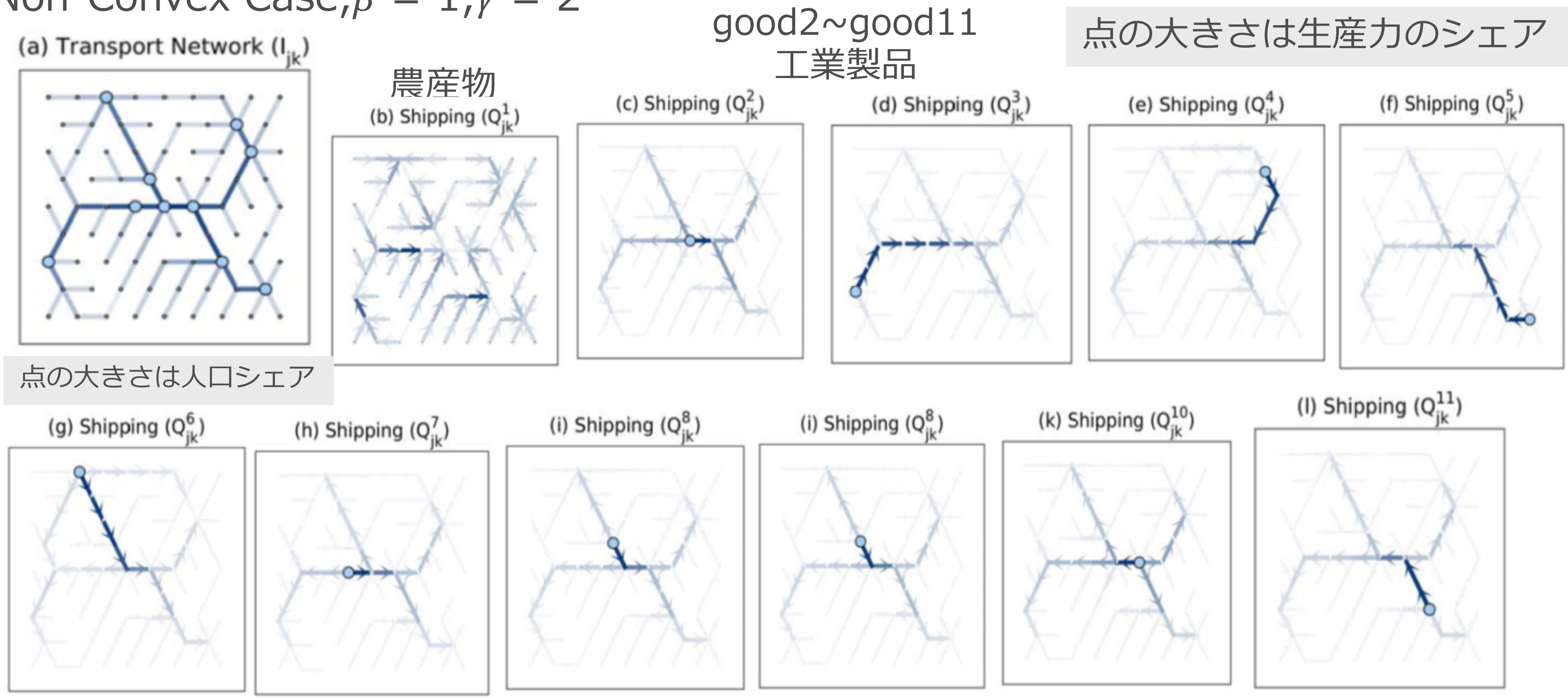


１つの工業製品の生産地は限られているため，そこに人口が集中．工業生産地付近では，製品を遠くまで届け，農業製品を受け入れる必要から，インフラ強度が高い．一方農地はたくさんあるため流通は短く，インフラ強度も低い．

4.2 Illustrative Examples **Many Sectors, Labor Mobility, and Non-Convexity**

- 11の貿易財
  - 農産物(good 1): 都市(10個)以外の周辺ノードで生産．(z_j^1 = 1 in all “countryside” locations)
  - 工業製品：それぞれが特定の1都市で生産．(z_j^n = 1 in only one city j and z_j^n = 0 otherwise)
- 労働者は移動，地理的障害なし,各財の代替弾力性はσ = 2.

Non-Convex Case,β = 1,γ = 2



Convexと比較すると，インフラ建設投資の規模に関して収穫逓増であるこちらのパターンでは，インフラの配置に偏りがある．少数の広域高規格道路が都市と周縁部を接続．

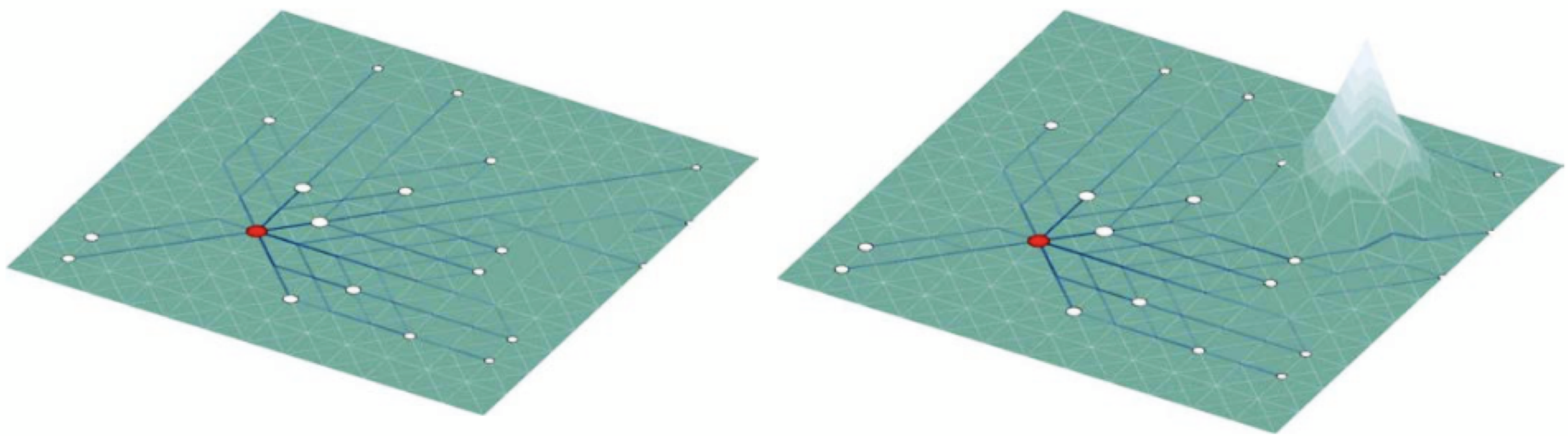
4.3 Illustrative Examples **Geographic Features and New Transport Technologies**

Geographic Features and New Transport Technologies

ランダムに配置された20の都市，それぞれが8つの都市と接続，人口は全て１，生産力は赤い点のみで10倍．点の大きさのちがいは一人当たり消費量の違いを示す． 1財，no labor mobility, 地理的障害あり：$\delta^{\mathrm{I}}_{\mathrm{jk}}$ リンクごとに異なるインフラ建設コスト.

Figure A.7: The Optimal Transport Network under Alternative Building Costs

距離 (a) Baseline Geography 距離と高低差(山) (b) Adding a Mountain



$$\delta^I_{jk} = \delta_0 \mathrm{Distance}^{\delta_1}_{jk}.$$

建設コストが距離に比例

$$\delta^I_{jk} = \delta_0 \mathrm{Distance}^{\delta_1}_{jk} \left(1 + |\Delta \mathrm{Elevation}|_{jk}\right)^{\delta_2}$$

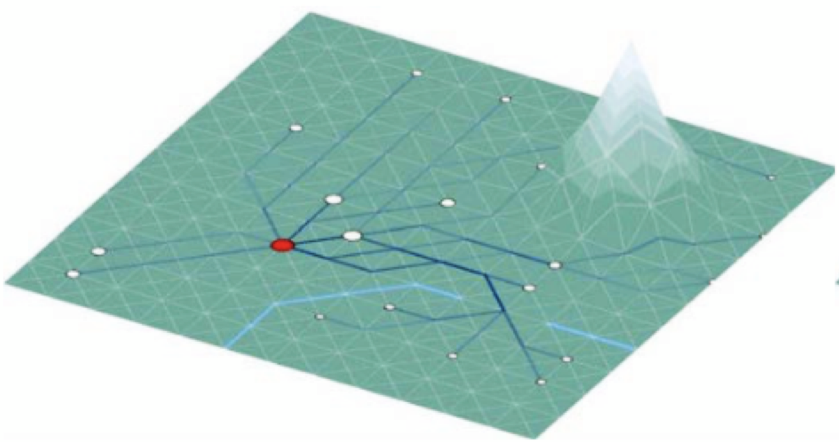
標高をプラス

Geographic Features and New Transport Technologies

1財，no labor mobility, 地理的障害あり： $\delta^{\mathrm{I}}_{\mathrm{jk}}$ リンクごとに異なるインフラ建設コスト,
ランダムに配置された20の都市，それぞれが8つの都市と接続，人口は全て１，生産力は赤い点のみで10倍．点の大きさのちがいは一人当たり消費量の違いを示す．

$$\delta^{I}_{jk} = \delta_0 \mathrm{Distance}_{jk}^{\delta_1} \left(1 + |\Delta \mathrm{Elevation}|_{jk}\right)^{\delta_2} \delta_3^{\mathrm{CrossingRiver}_{jk}} \delta_4^{\mathrm{AlongRiver}_{jk}}.$$

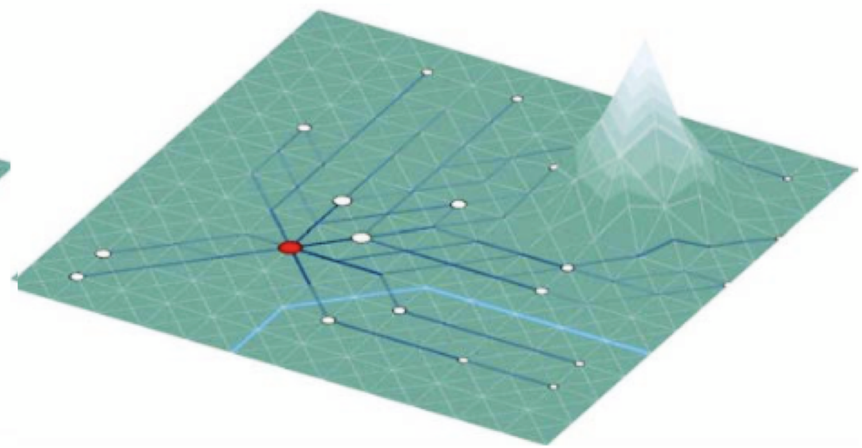
(c) Adding a River and a Bottleneck Access by Land



$\delta_3 = \delta_4 = \infty$

川を渡るインフラも川沿いのインフラも
法外にコストがかかる
→ひとつのdry land(“bottle neck”)
にインフラが集中

(d) Allowing for Endogenous Bridges



$0 < \delta_3 < \infty$

dry land がないから橋をかけるしかない
→都市間を直接つなげる二つの橋

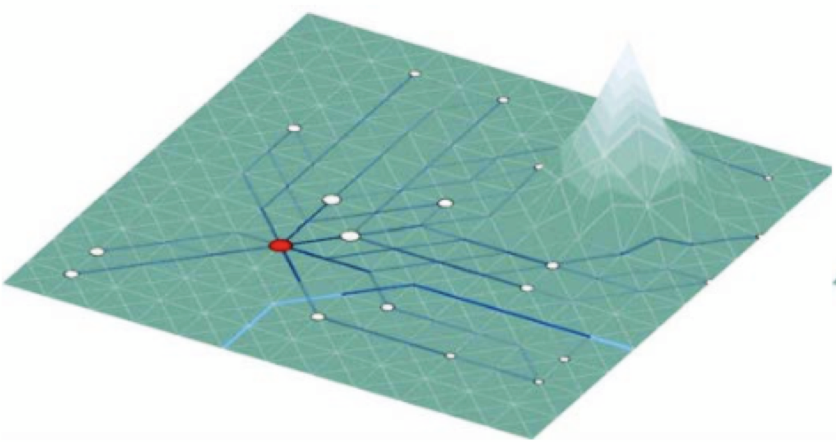
4.3 Illustrative Examples **Geographic Features and New Transport Technologies**

Geographic Features and New Transport Technologies

1財，no labor mobility, 地理的障害あり： $\delta^{\mathrm{I}}_{\mathrm{jk}}$ リンクごとに異なるインフラ建設コスト，
ランダムに配置された20の都市，それぞれが8つの都市と接続，人口は全て１，生産力は赤い点のみで10倍．点の大きさのちがいは一人当たり消費量の違いを示す．

$$\delta^{I}_{jk} = \delta_0 \mathrm{Distance}^{\delta_1}_{jk} \left(1 + |\Delta \mathrm{Elevation}|_{jk}\right)^{\delta_2} \delta_3^{\mathrm{CrossingRiver}_{jk}} \delta_4^{\mathrm{AlongRiver}_{jk}}.$$

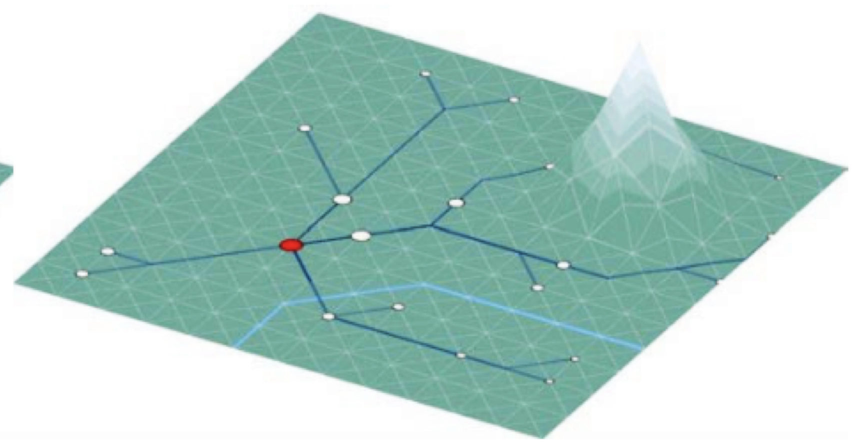
(e) Allowing for Water Transport



$1 < \delta_4 < \infty$

水運交通を追加
→橋はそのままだが南の周辺部には水運で到達

(f) Non-Convex Case ($\gamma = 2$; $\beta = 1$) with Annealing



$2 = \gamma > \beta$

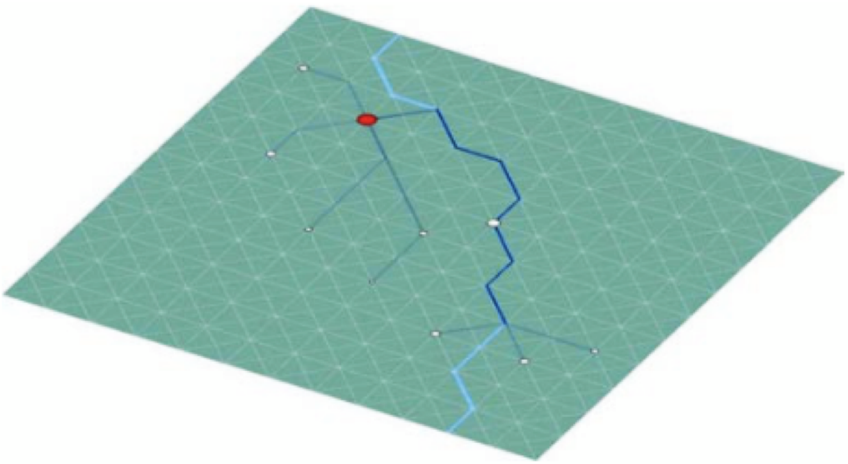
Non-Convex case
→川の左岸と右岸の接続は1つの橋のみに

Geographic Features and New Transport Technologies

新しい輸送手段の登場

人口はどこも同じ，生産力は赤点で10倍，点の大きさは一人当たり消費量の違い

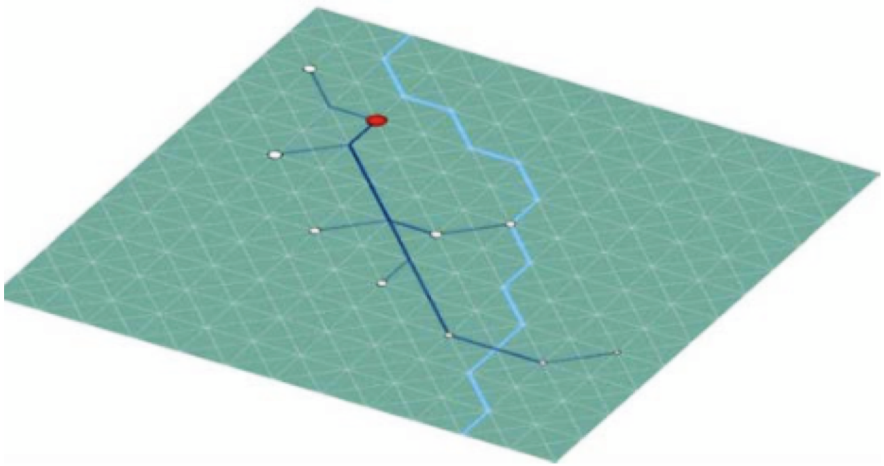
$$\delta^I_{jk} = \delta_0 \text{Distance}_{jk}^{\delta_1} \left(1 + |\Delta \text{Elevation}|_{jk}\right)^{\delta_2} \delta_3^{\text{CrossingRiver}_{jk}} \delta_4^{\text{AlongRiver}_{jk}}.$$



(a) Initial Geography Dependence on Water Transport

水上交通に依存した経済(δ_3が小さい)

→川沿いのまちでの消費が大きい



(b) Allowing for Cheap Land Transport

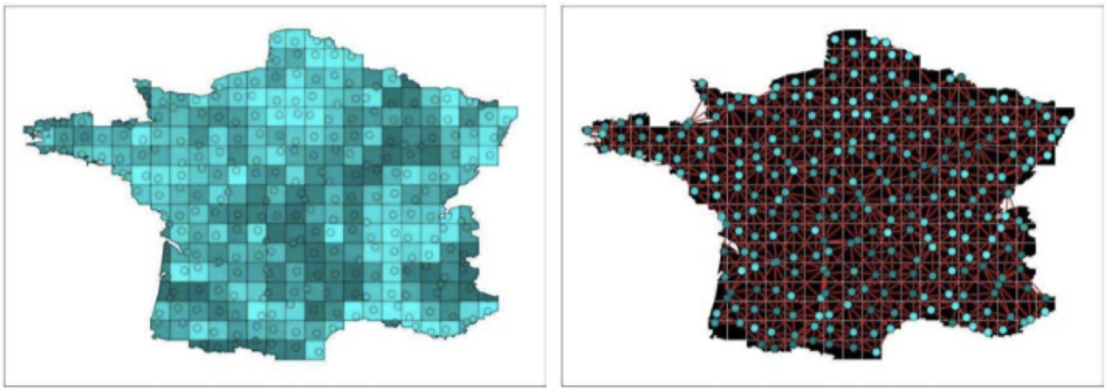
（鉄道の登場で）陸上交通の運賃が低下
(δ_1が小さくなった)

→水運交通が廃れ，川沿いの旧市街が衰退.
新たに消費の集中する都市が浮上し，ネットワークが再構成.

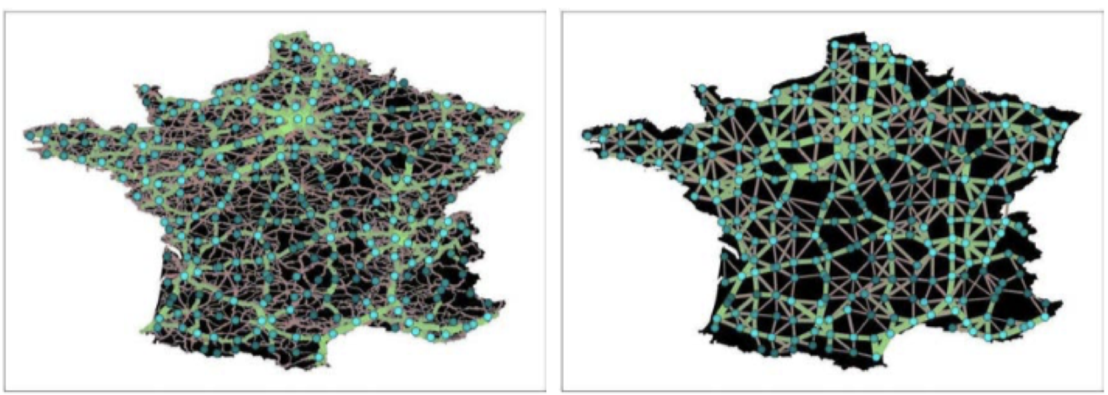
5. Road Network Expansion and Misallocation in Europe

5. Road Network Expansion and Misallocation in Europe

1. 現在の道路ネットワークを最適に拡張させた場合，どのくらいの利益があるのか;
 大きな公共 投資を伴うが最適な投資の配分やその影響についての定量的な分析が行われていないため.
Optimal Expansion: Kは50%増とし，既存のインフラを初期条件として最適なインフラ投資を求める
2. 現在の道路のmisallocationからの損失はどれほどなのか;道路配置は紛争や政治的利益に左右されることが多いため，その影響を調査
Optimal Allocation: Kは現状維持とし，既存インフラ= 0 の状態から最適なインフラ投資を求める.



(c) Nodes in the Actual Road Network　　(d) Actual Road Network on the Baseline Graph



- ヨーロッパ25カ国を対象
- 道路ネットワーク，人口，所得
- 人口：50km四方のセル

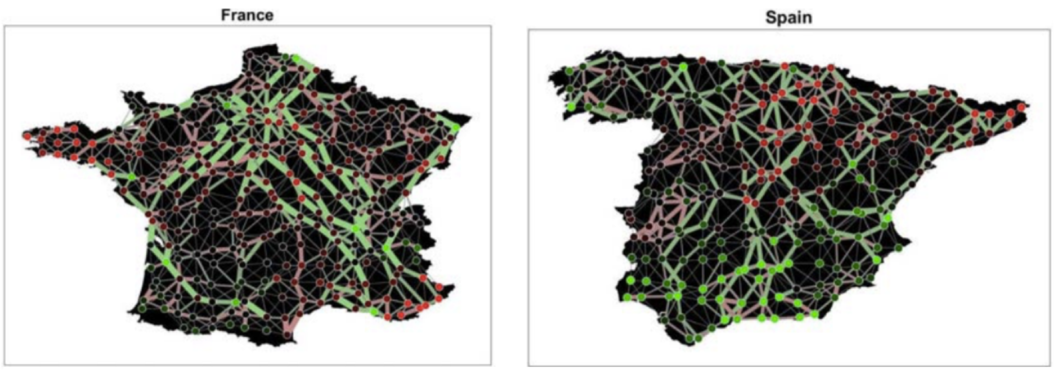
←(a)明るいところが人口多い
←(b)nodeは人口の重心に最も近い道路の結節点，edgeは８方向まで.

- I^{n}_{jk} ：j-k間をつなぐ道路インフラのレベルは，その道路が国道かどうかとレーン数によって定義.

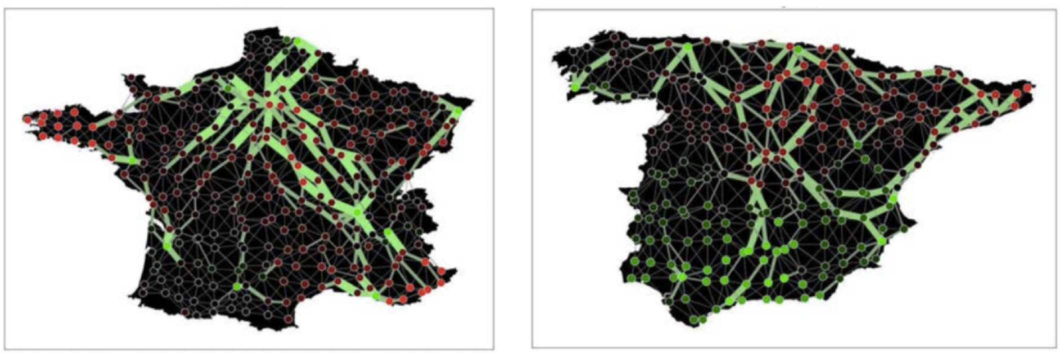
←(c)実際の道路ネットワーク.
 緑が国道，赤はその他
←(d)定義したedgeによって離散化したネットワーク．太さはレーン数，緑：最短経路が国道である箇所(使われやすで重みづけ)

5. Road Network Expansion and Misallocation in Europe

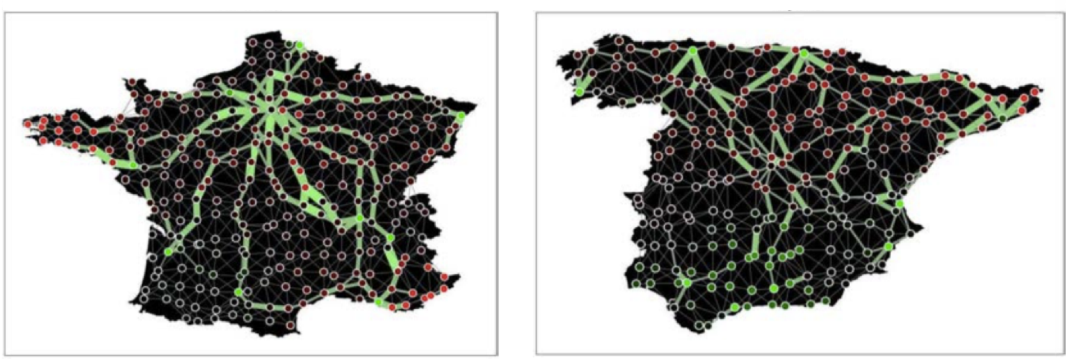
Optimal Network Reallocation



Optimal Network Expansion $\beta = \gamma$



Optimal Network Expansion $\gamma > \beta$ (Non-Convex)



リンクの太さはモデルによる最適配置と現状のインフラとの差として定義されるインフラの価値の絶対値.
$I^{*}_{jk} - I^{obs}_{jk} < 0$：赤のリンク(現状より縮小).
ノードは人口変化(赤はnegative,緑はpositive)

- (a)と(b)：フランスでは，より消費活動の活発なところにインフラが集中している一方，スペインは離散.
- (a),(b)でインフラ過大と評価（red)されているところは，(c),(d)に置いて延長なし.
- (c)-(d)と(e)-(f)を比較すると，どちらも似たようなインフラ拡張の最適化を行なっているが，インフラ建設に関して収穫逓増の(e),(f)は，よりまばらで少ないリンクに集中している.
- 投資の仕方は違うが，どのパターンでも人口の配置の仕方は同じ←一人当たりの消費と関係

5. Road Network Expansion and Misallocation in Europe

どんな地域的特徴がインフラ建設や成長を引き起こしているか？

	Reallocation ($\delta = \delta^{I,GEO}$)		Expansion ($\delta = \delta^{I,GEO}$)		Expansion ($\delta = \delta^{I,FOC}$)	
Dependent variable:	Investment	Pop. Growth	Investment	Pop. Growth	Investment	Pop. Growth
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
Population	0.308***	0.002	0.104***	0.002**	0.004	0.002**
Income per Capita	0.127	0.003	0.007	-0.002	-0.020	0.031**
Consumption per Capita	0.290**	-0.143***	0.179***	-0.134***	0.130	-0.179***
Infrastructure	-0.362***	-0.003	-0.195***	-0.001	-0.067**	0.000
Differentiated Producer	0.271***	0.017***	0.133***	0.028***	-0.099***	0.031***
R^2	0.38	0.56	0.32	0.65	0.38	0.90

***=1% significance, **=5%, *=10%.

- 既存のインフラが少ないところでインフラ投資→インフラ建設に関する収穫逓減を示唆
- 地理的条件に基づくインフラ建設コストで評価している(1)と(3)においては，もともとの人口や一人当たりの所得が多いところ，また特産品の生産地においてインフラ投資がなされていると説明可能.
- しかし，インフラ投資に関するほとんどの結果について十分な説明力を持たない

→地域的特徴が最適なインフラ投資を決定づけているとは言い難い.

- 人口成長とインフラの拡充は強い連関がない.

→インフラがより多く建設されるところは，人口成長がより強く見込まれるところだとは必ずしも限らない.

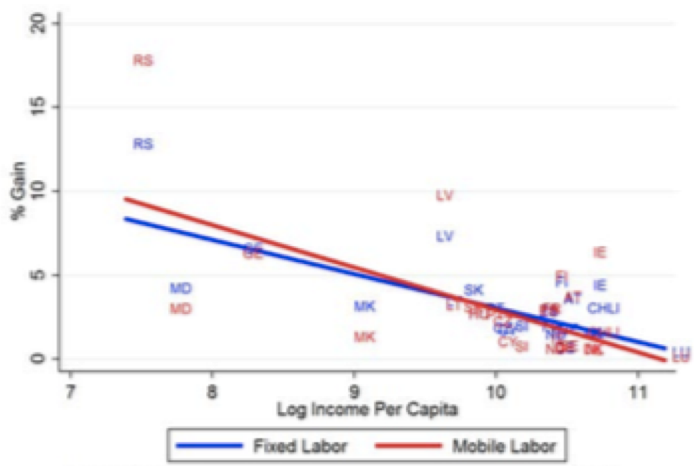
- 一人当たりの消費が少ないところで人口増加，特産地で人口増加

→インフラ建設は，地域間の一人当たりの消費量の格差を是正するように行われる.

5. Road Network Expansion and Misallocation in Europe

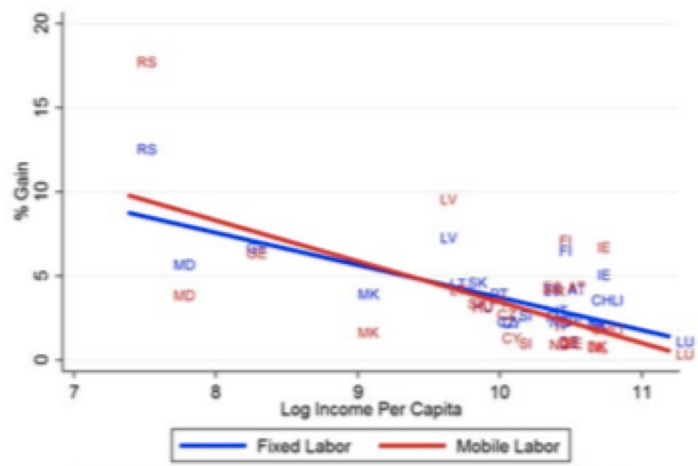
ネットワークの再配分/最適な拡充による利益と，一人当たりの所得との関係

(a) Optimal Reallocation with $\delta^{I,GEO}$



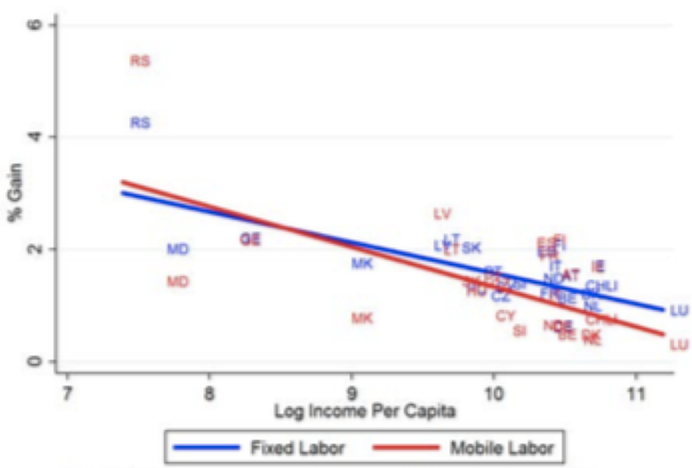
Linear regression slope (robust SE): Mobile Labor: -2.52 (1.27); Fixed Labor: -2.03 (.71)

(b) Optimal Expansion with $\delta^{I,GEO}$



Linear regression slope (robust SE): Mobile Labor: -2.43 (1.21); Fixed Labor: -1.93 (.58)

(c) Optimal Expansion with $\delta^{I,FOC}$



Linear regression slope (robust SE): Mobile Labor: -.72 (.34); Fixed Labor: -.55 (.19)

- 所得が低いところではインフラの誤った配置による損失と，インフラの最適な配置よる利益がともに大きい.

(セルビア，ラトビア，ジョージアなどで大きく，ドイツ，デンマークなどで小さい)

6. Conclusion

- 最適交通ネットワークを求めるフレームワークの構築：
  - 新古典派経済学の空間的展開(各地域をグラフ上のノードとして表現)
  - 輸送における混雑を考慮した最適輸送問題
  - 最適なネットワーク構築

- ヨーロッパ２５ヶ国における既存の道路ネットワークと経済活動に応用
  - 所得の少ない国において，インフラの誤配置による損失と，インフラの最適な配置よる利益がともに大きい
  - 最適なインフラの拡充は，国内での不平等を是正
  - インフラは一般的に過剰

- インフラ配置に関する政治経済的な問題へ応用していくことができる.
- 本モデルを用いて，観察可能な地域的特徴によってインフラ投資を最適化する方法を作っていけるかもしれない