

離散・連続モデルのレビュー

2016.5.6 理論談話会 発表者：福山

離散・連続モデルとは

Discrete-continuous choice model

福田・力石(2013)

離散的な選択行動と**連続量**に関する選択行動が部分的に**共通な要因で関連**付けられている状況を記述するモデル

離散選択

商品の種類

活動の種類

連続量

購買額

活動時間

離散・連続モデルの類型

	単数選択	複数選択
	1つの離散選択肢を選び これに関する連続選択を 行う	複数の離散選択肢を選び これらに関する連続選択 を同時に行う
「 構造型 」 資源の制約条件を明示的に 考慮して ミクロ経済理論より 演繹的に導出 されたモデル	ロワの恒等式を 用いたモデル (Dubin and McFadden, 1984)など	MDCEV(Bhat, 2005) など
「 誘導型 」 資源の制約条件を明示せず、 統計的な現象記述 を第一義と したモデル	Tobit モデル (Tobin, 1958)など	Fang(2008)など
「 折衷型 」 ミクロ経済理論への整合性を 考慮した誘導型モデル		Kitamura(1984)など ↑2つまで

構造型の離散・連続モデル

J個の異なる財（離散選択肢）とその消費量に対する
資源制約付きの効用最大化問題

$$\text{Max. } U_i = f_i(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iJ})$$

$$\text{Subject to } \sum_j^J p_j x_{ij} = E_i, \quad \forall x_{ij} \geq 0$$

個人*i*の資源の総量

個人*i*の財*j*に対する消費量

財*j*の価格

個人*i*は効用*U_i*が最大となるように*J*個の財に資源を配分

誘導型の離散・連続モデル

現象を直接的に記述

離散問題と連続問題の**誤差相関**を明示的に考慮

※Tobit モデル Type II の場合

離散問題

$$y_{1i} = \begin{cases} 1 & \text{if } u_{1i}^* > 0 \\ 0 & \text{if } u_{1i}^* \leq 0 \end{cases}$$

目的関数

$$\text{where } u_{1i}^* = x_{1i}\beta_1 + e_{1i}$$

評価関数 誤差項

連続問題

$$y_{2i} = \begin{cases} u_{2i}^* & \text{if } u_{1i}^* > 0 \\ 0 & \text{if } u_{1i}^* \leq 0 \end{cases}$$

目的関数

$$\text{where } u_{2i}^* = x_{2i}\beta_2 + e_{2i}$$

評価関数 誤差項

離散問題の評価関数が正のとき（離散選択肢が選択されるとき）
連続量が正

共分散構造

$$\begin{pmatrix} e_{1i} \\ e_{2i} \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\right)$$

尤度関数

$$\prod_{i=1}^I \left\{ 1 - \Phi(x_{1i}\beta) \right\}^{(1-y_{1i})} \left\{ \begin{matrix} \sigma_2^{-1} \phi(\sigma_2^{-1}(y_{2i} - x_{2i}\beta_2)) \\ \Phi\left(\frac{(x_{1i}\beta_1 + \sigma_2^{-1}\sigma_{12}(y_{2i} - x_{2i}\beta_2))}{(1-\rho_2^2)^{1/2}}\right) \end{matrix} \right\}^{y_{1i}}$$

標準正規分布の確率密度関数

標準正規分布の分布関数

相関係数

誘導型の離散・連続モデル

※Tobit モデル Type II の場合

尤度関数の導出

多変量正規分布の条件付き分布の性質

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{12}^t & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix}\right)$$

のとき

$$\mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 = \mathbf{b} \sim N(\boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_{12} \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} (\mathbf{b} - \boldsymbol{\mu}_2), \boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12} \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{12}^t)$$

を用いて,

$$\begin{aligned} L &= \prod_{i: y_{1i} \leq 0} Pr(y_{1i} \leq 0) \times \prod_{i: y_{1i} > 0} [Pr(y_{2i} | y_{1i} > 0) Pr(y_{1i} > 0)] \\ &= \prod_{i: y_{1i} \leq 0} Pr(y_{1i} \leq 0) \times \prod_{i: y_{1i} > 0} [Pr(y_{1i} > 0 | y_{2i}) Pr(y_{2i})] \\ &= [1 - \Phi(\mathbf{x}_{1i}^t \boldsymbol{\beta}_1)] \times \prod_{i: y_{1i} > 0} \left[\Phi \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \rho_2^2}} \left\{ \mathbf{x}_{1i}^t \boldsymbol{\beta}_1 + \frac{\sigma_{12}}{\sigma_2} (y_{2i} - \mathbf{x}_{2i}^t \boldsymbol{\beta}_2) \right\} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \frac{1}{\sigma_2} \phi \left(\frac{y_{2i} - \mathbf{x}_{2i}^t \boldsymbol{\beta}_2}{\sigma_2} \right) \right] \end{aligned}$$

誘導型の離散・連続モデル

多変量正規分布を仮定

→線形依存

相関の大きさが対称・符号に依存しない

誘導型モデルの代表例 (福田・力石, 2013)

モデル	離散問題	連続問題	共分散構造	
Tobit モデル: type I ¹⁾	$y_{1i} = \begin{cases} u_{1i}^* & \text{if } u_{1i}^* > 0 \\ 0 & \text{if } u_{1i}^* \leq 0 \end{cases}$ where $u_{1i}^* = x_{1i}\beta_1 + e_{1i}$		$e_{1i} \sim N(0, \sigma_1^2)$	同一の評価関数 打ち切りモデル
Tobit モデル: type II (サンプルセレクションモデル ²⁹⁾)	$y_{1i} = \begin{cases} 1 & \text{if } u_{1i}^* > 0 \\ 0 & \text{if } u_{1i}^* \leq 0 \end{cases}$ where $u_{1i}^* = x_{1i}\beta_1 + e_{1i}$	$y_{2i} = \begin{cases} u_{2i}^* & \text{if } u_{1i}^* > 0 \\ 0 & \text{if } u_{1i}^* \leq 0 \end{cases}$ where $u_{2i}^* = x_{2i}\beta_2 + e_{2i}$	$\begin{pmatrix} e_{1i} \\ e_{2i} \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\right)$	1が正のとき だけ2が観測 される
Tobit モデル: type V (内生的スイッチング回帰モデル ³¹⁾)	$(y_{1i1}, y_{1i2}) = \begin{cases} (1, 0) & \text{if } u_{1i}^* > 0 \\ (0, 1) & \text{if } u_{1i}^* \leq 0 \end{cases}$ where $u_{1i}^* = x_{1i}\beta_1 + e_{1i}$	$y_{2i} = \begin{cases} u_{2i1}^* & \text{if } u_{1i}^* > 0 \\ u_{2i2}^* & \text{if } u_{1i}^* \leq 0 \end{cases}$ where $u_{2ij}^* = x_{2ij}\beta_{2j} + e_{2ij} (j=1,2)$	$\begin{pmatrix} e_{1i} \\ e_{2i1} \\ e_{2i2} \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & \sigma_3^2 \end{pmatrix}\right)$	1の各選択 結果に対して 2が観測 される
誤差分布の近似 ²⁶⁾	$y_{1ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } u_{1ij}^* > \max_{k=1, \dots, J} u_{1ik}^* (k \neq j) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ where $u_{1ij}^* = x_{1ij}\beta_{1j} + e_{1ij} (j=1, \dots, J)$	$y_{2ij} = \begin{cases} u_{2ij}^* & \text{if } u_{1ij}^* > \max_{k=1, \dots, J} u_{1ik}^* (k \neq j) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ where $u_{2ij}^* = x_{2ij}\beta_{2j} + e_{2ij} (j=1, \dots, J)$	$\tilde{e}_{1ij} = \Phi^{-1}(G(e_{1ij}))$ $\begin{pmatrix} \tilde{e}_{1ij} \\ e_{2ij} \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \sigma_{1j} \\ \sigma_{1j} & \sigma_j^2 \end{pmatrix}\right)$	選択問題に 多項ロジット を適用
Copula 関数の利用 ²⁷⁾	$(y_{1i1}, y_{1i2}) = \begin{cases} (1, 0) & \text{if } u_{1i}^* > 0 \\ (0, 1) & \text{if } u_{1i}^* \leq 0 \end{cases}$ where $u_{1i}^* = x_{1i}\beta_1 + e_{1i}$	$y_{2i} = \begin{cases} u_{2i2}^* & \text{if } u_{1i}^* > 0 \\ u_{2i3}^* & \text{if } u_{1i}^* \leq 0 \end{cases}$ where $u_{2ij}^* = x_{2ij}\beta_{2j} + e_{2ij} (j=2,3)$	採用する Copula 関数に依存 (例えば Bhat and Erulu ²⁷⁾ 参照) ※Gaussian copula を採用した場合, Type V の Tobit モデルに帰着	非対称・非線 形な依存関係 を表現
ベイズモデル ²⁸⁾	$y_{1ij} = \begin{cases} 2 & \text{if } u_{1ij}^* > \theta_{h,j} \\ 1 & \text{if } \theta_{l,j} < u_{1ij}^* \leq \theta_{h,j} \\ 0 & \text{if } u_{1ij}^* \leq \theta_{l,j} \end{cases}$ Where $u_{1ij}^* = x_{1ij}\beta_{1j} + e_{1ij} (j=1,2)$	$y_{2ij} = \begin{cases} u_{2ij}^* & \text{if } u_{1ij}^* > \theta_{l,j} \\ 0 & \text{if } u_{1ij}^* \leq \theta_{l,j} \end{cases}$ where $u_{2ij}^* = x_{2ij}\beta_{2j} + e_{2ij} (j=1,2)$	$\begin{pmatrix} e_{1i1} \\ e_{1i2} \\ e_{2i1} \\ e_{2i2} \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \sigma_{14} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \sigma_{24} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_3^2 & \sigma_{34} \\ \sigma_{14} & \sigma_{24} & \sigma_{34} & \sigma_4^2 \end{pmatrix}\right)$	ベイズ推定に より多変量へ の拡張が可能

$y_{1\cdot}$: 離散問題の目的変数, $y_{2\cdot}$: 連続問題の目的変数, $u_{1\cdot}$: 離散問題の評価関数, $u_{2\cdot}$: 連続問題の評価関数, x_{\cdot} : 説明変数ベクトル, β_{\cdot} : 未知パラメータベクトル, e_{\cdot} : 誤差項, ρ_{\cdot} : 相関係数 ($\sigma_{\cdot} / \sigma_{\cdot}$), θ_{\cdot} : 閾値パラメータ, $\phi(\cdot)$: 標準正規分布の確率密度関数, $\Phi(\cdot)$: 標準正規分布の分布関数, $G(\cdot)$: \bullet の周辺分布関数.
評価関数 u に付与されたアスタリスク (*) は, その変数が直接観測不可能 (潜在変数) であることを意味する.

構造型の離散・連続モデル

間接需要関数を定義しロワの恒等式を適用

Dubin and McFadden (1984) など

間接効用関数

$$Y_{ij} = Y_{ij}(p_j, E_i, z_{ij}, s_i, e_{ij})$$

\uparrow \uparrow \uparrow \leftarrow \leftarrow
 j の単価 収入 j の観測特性 i の社会経済属性 非観測特性

選択肢 j が
選ばれる確率

$$P_{ij} = \text{Prob} \left[\begin{array}{l} Y_{ij}(p_j, E_i, z_{ij}, s_i, e_{ij}) > Y_{il}(p_l, E_i, z_{il}, s_i, e_{il}), \\ \forall 1 \leq l \leq J, l \neq j \end{array} \right]$$

ここで

$$Y_{ij}(p_j, E_i, z_{ij}, s_i, e_{ij}) = Y_{ij}(p_j, E_i, z_{ij}, s_i) + e_{ij}$$

i の非観測特性が
加算型だと仮定

さらに, e_{ij} にi.i.d.ガンベル分布を仮定 $\rightarrow P$ が多項ロジットモデル

財 x の需要:

ロワの恒等式
(Roy's identity)

$$x_{ij} = -\frac{\partial Y_{ij} / \partial p_j}{\partial Y_{ij} / \partial E_i} = g_{ij}(p_j, E_i, z_{ij}, s_i, e_{ij})$$

構造型の離散・連続モデル

Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 条件を適用

Bhat (2008)

MDCEV (Multiple discrete-continuous extreme value) model

(全てでない) 複数個の選択肢を同時に消費

効用関数(CES(constant elasticity substitution)型)

$$U(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^K \frac{\gamma_k}{\alpha_k} \psi_k \left\{ \left(\frac{x_k}{\gamma_k} + 1 \right)^{\alpha_k} - 1 \right\}$$

x_k : 選択肢 k の消費量

ψ_k : 消費量0のときの k の限界効用 \rightarrow

γ_k : translation parameter

α_k : satiation parameter

baseline marginal utility

$$\frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial x_k} = \psi_k \left(\frac{x_k}{\gamma_k} + 1 \right)^{\alpha_k - 1}$$

\rightarrow 消費量0のときの財 k, l の

限界代替率が ψ_k / ψ_l

$\alpha_k \rightarrow 0 \forall k$ のときLES(linear expenditure system) 型に

$$U(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^K \gamma_k \psi_k \ln \left(\frac{x_k}{\gamma_k} + 1 \right)$$

$\psi_k > \psi_l$ のとき, 消費量0の点では
より k を消費したほうが効用が高い

構造型の離散・連続モデル

Bhat (2008), MDCEV (Multiple discrete-continuous extreme value) model

γ_k : translation parameter 無差別曲線の傾き(限界代替率)に関係

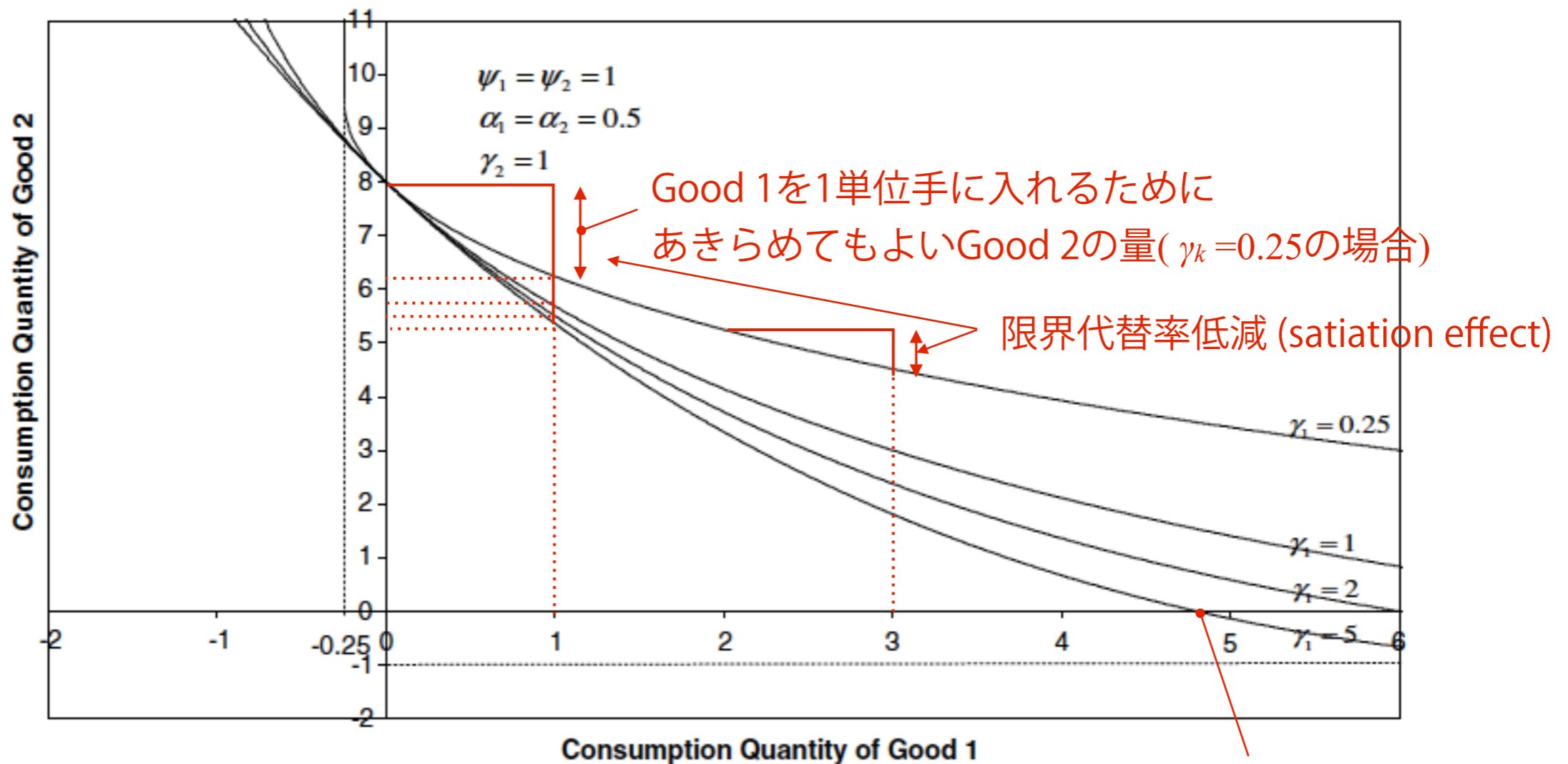


Fig. 1. Indifference curves corresponding to different values of γ_1 .

端点解：Good 2の量が
0になる点($\gamma_k = 5$ の場合)

構造型の離散・連続モデル

Bhat (2008), MDCEV (Multiple discrete-continuous extreme value) model

γ_k : translation parameter Satiation effect

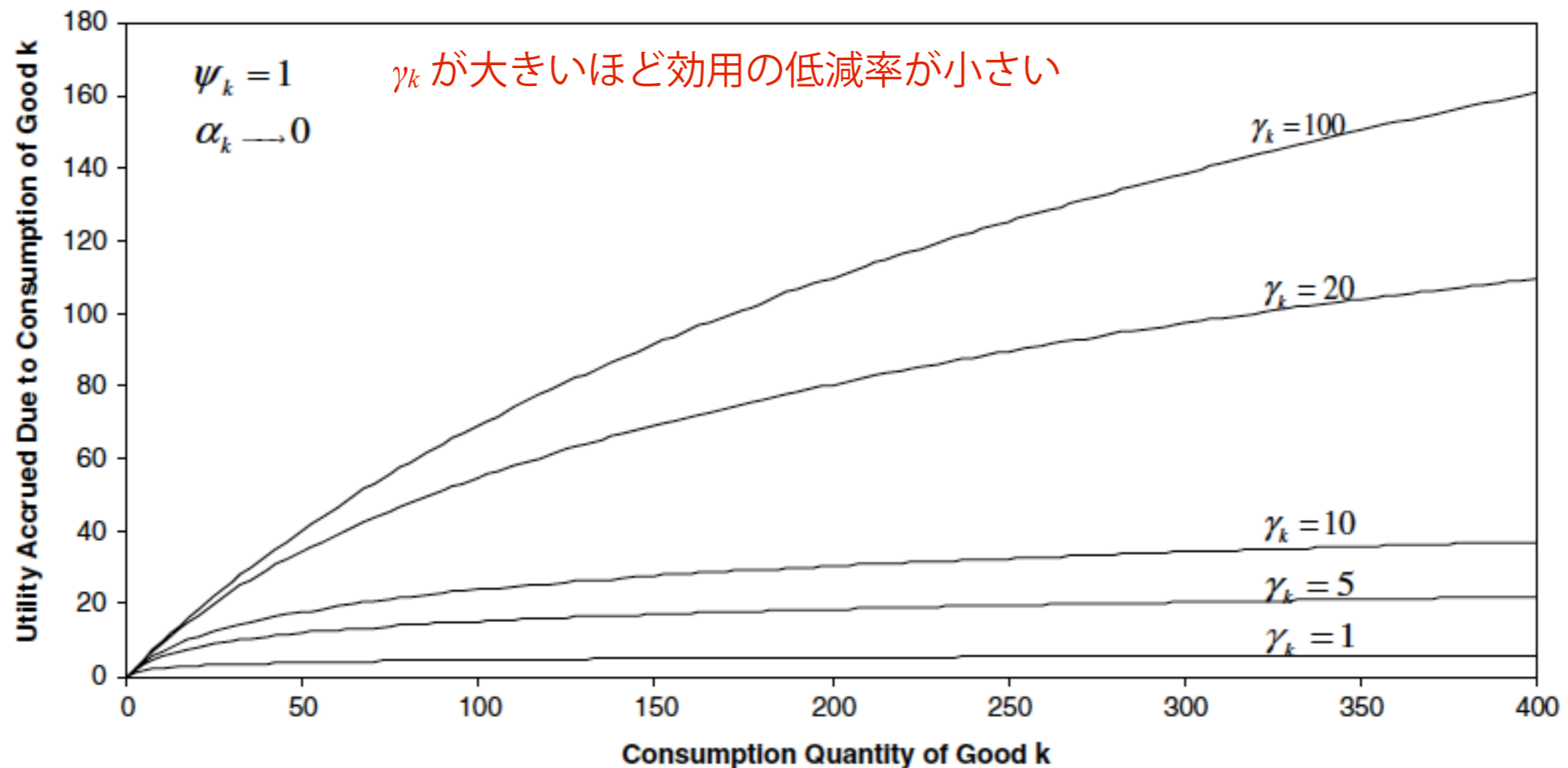


Fig. 2. Effect of γ_k value on good k 's subutility function profile.

構造型の離散・連続モデル

Bhat (2008), MDCEV (Multiple discrete-continuous extreme value) model

α_k : satiation parameter $\alpha_k \leq 1$ $\alpha_k = 1$ のとき satiation effect がない $\sum_k \psi_k x_k$
 perfect substitutes case \rightarrow single discreteness
 ψ_k が最大の1財を消費

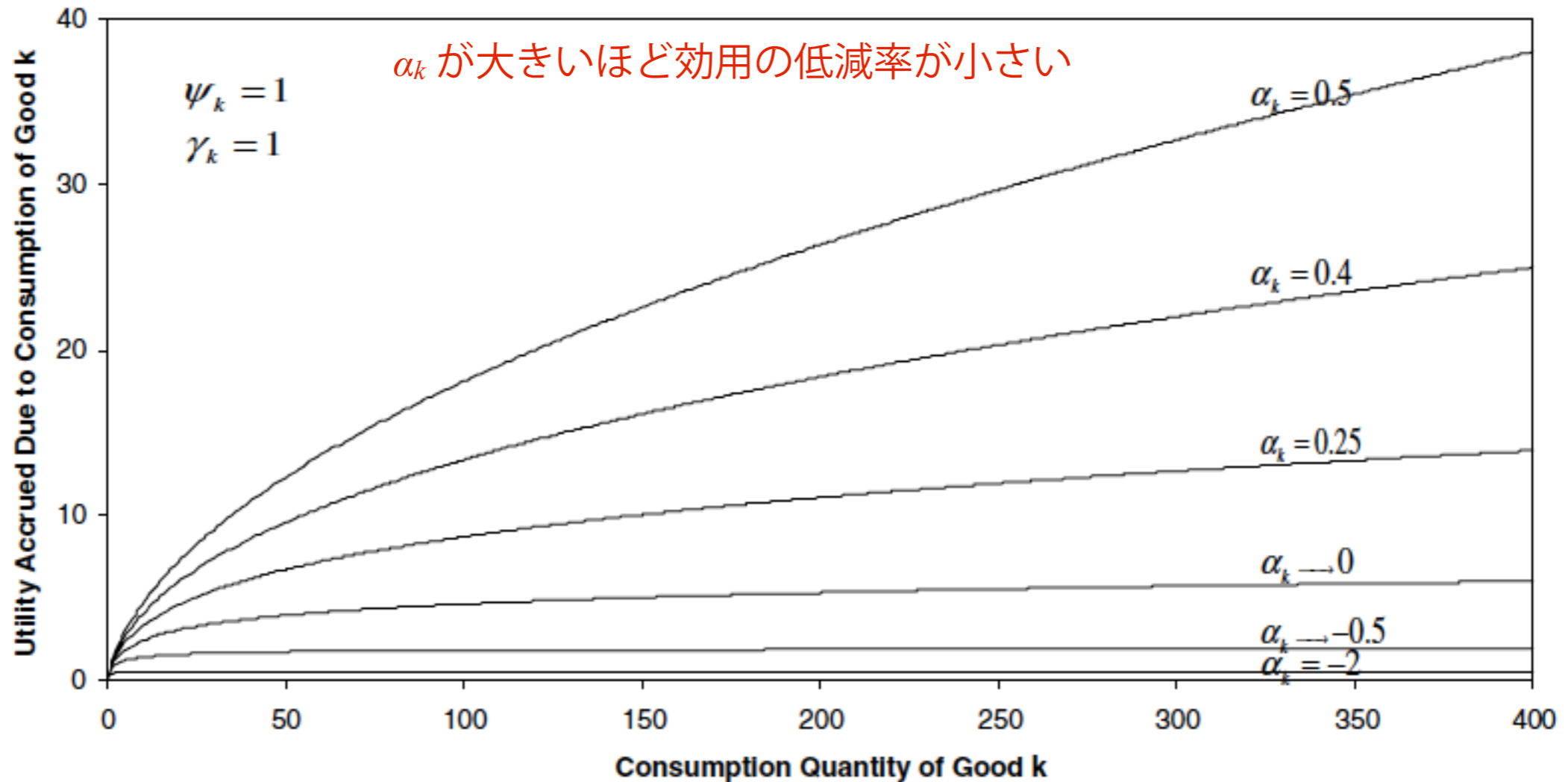
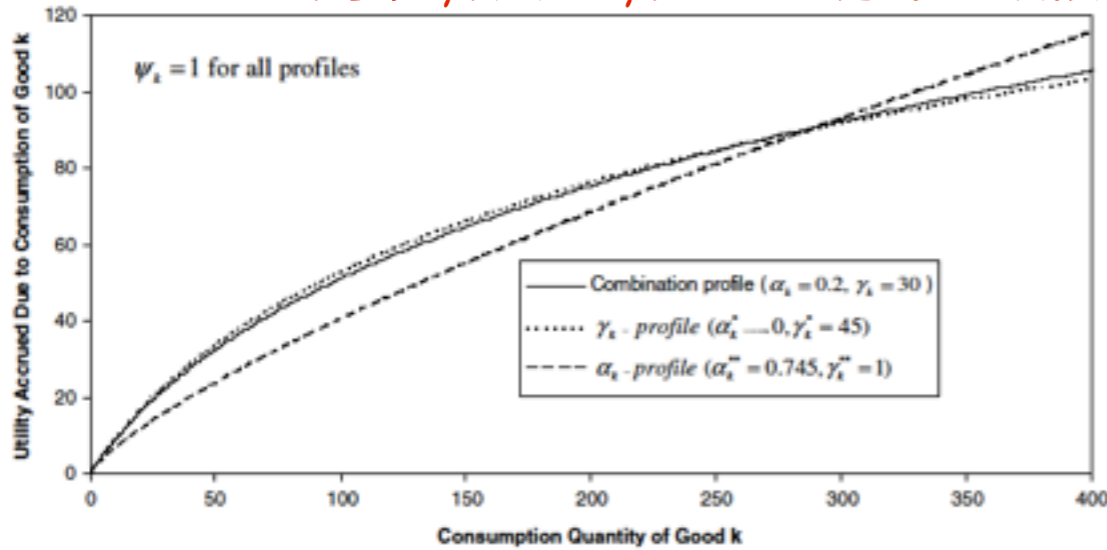


Fig. 3. Effect of α_k value on good k 's subutility function profile.

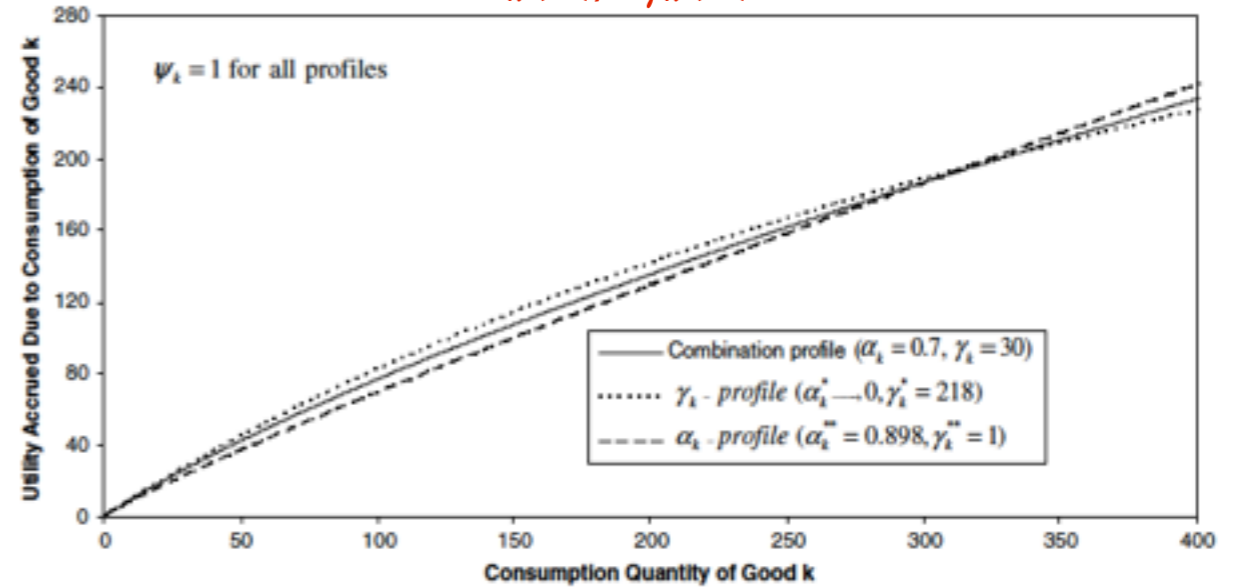
構造型の離散・連続モデル

Bhat (2008), MDCEV (Multiple discrete-continuous extreme value) model

α_k 小, γ_k 大 $\rightarrow \gamma_k$ のみの分布に類似



α_k 大, γ_k 大



$\rightarrow \alpha_k$ のみもしくは γ_k のみのうち適合度のよいものを採用

Fig. 4c. Alternative profiles for low satiation effects with high α_k value and high γ_k value.

α_k 大, γ_k 小 $\rightarrow \alpha_k$ のみの分布に類似

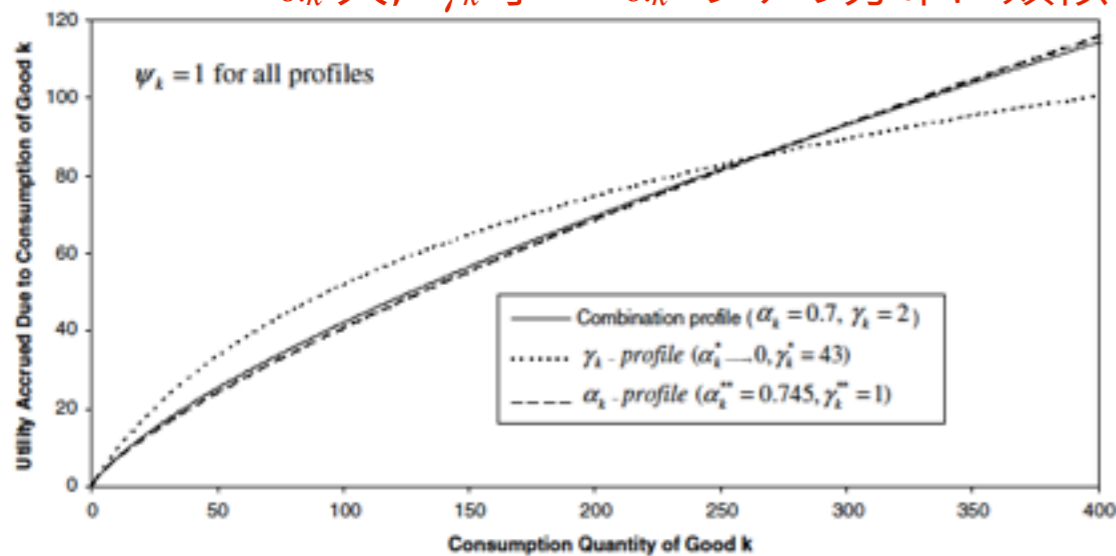


Fig. 4b. Alternative profiles for moderate satiation effects with high α_k value and low γ_k value.

α_k 小, γ_k 小

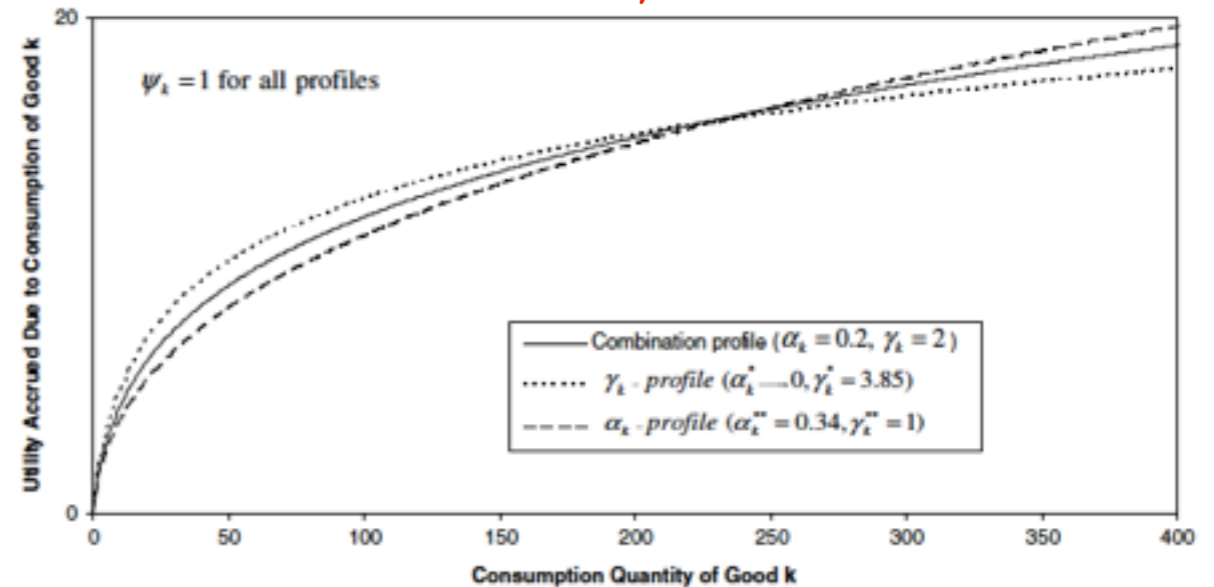


Fig. 4d. Alternative profiles for high satiation effects with low α_k value and low γ_k value.

構造型の離散・連続モデル

Bhat (2008), MDCEV (Multiple discrete-continuous extreme value) model

効用関数

$$U(\mathbf{x}) = \sum_k \frac{\gamma_k}{\alpha_k} \underbrace{\left[\exp(\beta' z_k + \varepsilon_k) \right]}_{\psi_k} \cdot \left\{ \left(\frac{x_k}{\gamma_k} + 1 \right)^{\alpha_k} - 1 \right\}$$

資源制約

$$\sum_{k=1}^K e_k = E, \quad e_k = p_k x_k$$

制約条件付き最大化問題 → KKT 条件

ラグランジュ関数

$$\mathcal{L} = \sum_k \frac{\gamma_k}{\alpha_k} \left[\exp(\beta' z_k + \varepsilon_k) \right] \left\{ \left(\frac{e_k}{\gamma_k p_k} + 1 \right)^{\alpha_k} - 1 \right\} - \lambda \left[\sum_{k=1}^K e_k - E \right]$$

KKT 1階条件

$$\left[\frac{\exp(\beta' z_k + \varepsilon_k)}{p_k} \right] \left(\frac{e_k^*}{\gamma_k p_k} + 1 \right)^{\alpha_k - 1} - \lambda = 0, \quad \text{if } e_k^* > 0, \quad k = 1, 2, \dots, K$$

$$\left[\frac{\exp(\beta' z_k + \varepsilon_k)}{p_k} \right] \left(\frac{e_k^*}{\gamma_k p_k} + 1 \right)^{\alpha_k - 1} - \lambda < 0, \quad \text{if } e_k^* = 0, \quad k = 1, 2, \dots, K$$

x_k に資源が配分される場合、
最適配分後の限界効用は同一

$x_k=0$ における限界効用が閾値を超えず
資源配分が総効用の増加に寄与しない
→ 資源が配分されない

構造型の離散・連続モデル

Bhat (2008), MDCEV (Multiple discrete-continuous extreme value) model

資源が配分される財のうちの1つを $k=1$ の財とすると,

$$\lambda = \frac{\exp(\beta' z_1 + \varepsilon_1)}{p_1} \left(\frac{e_1^*}{\gamma_1 p_1} + 1 \right)^{\alpha_1 - 1}$$

これをKKT条件の式に代入して対数をとると,

$$V_k + \varepsilon_k = V_1 + \varepsilon_1 \quad \text{if } e_k^* > 0 \quad (k = 2, 3, \dots, K),$$

$$V_k + \varepsilon_k < V_1 + \varepsilon_1 \quad \text{if } e_k^* = 0 \quad (k = 2, 3, \dots, K), \text{ where}$$

$$V_k = \beta' z_k + (\alpha_k - 1) \ln \left(\frac{e_k^*}{\gamma_k p_k} + 1 \right) - \ln p_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots, K)$$

K個のうちM個の選択肢に資源が配分された場合の結合分布は,

$$P(e_1^*, e_2^*, e_3^*, \dots, e_M^*, 0, 0, \dots, 0) = |J| \int_{\varepsilon_1 = -\infty}^{+\infty} \int_{\varepsilon_{M+1} = -\infty}^{V_1 - V_{M+1} + \varepsilon_1} \int_{\varepsilon_{M+2} = -\infty}^{V_1 - V_{M+2} + \varepsilon_1} \dots \int_{\varepsilon_{K-1} = -\infty}^{V_1 - V_{K-1} + \varepsilon_1} \int_{\varepsilon_K = -\infty}^{V_1 - V_K + \varepsilon_1} \\ f(\varepsilon_1, V_1 - V_2 + \varepsilon_1, V_1 - V_3 + \varepsilon_1, \dots, V_1 - V_M \\ + \varepsilon_1, \varepsilon_{M+1}, \varepsilon_{M+2}, \dots, \varepsilon_{K-1}, \varepsilon_K) d\varepsilon_K d\varepsilon_{K-1} \dots d\varepsilon_{M+2} d\varepsilon_{M+1} d\varepsilon_1,$$

J はヤコビ行列

$$J_{ih} = \frac{\partial [V_1 - V_{i+1} + \varepsilon_1]}{\partial e_{h+1}^*} = \frac{\partial [V_1 - V_{i+1}]}{\partial e_{h+1}^*}; \quad i, h = 1, 2, \dots, M - 1.$$

構造型の離散・連続モデル

Bhat (2008), MDCEV (Multiple discrete-continuous extreme value) model

ε_i にi.i.d.ガンベル分布を仮定すると(スケールパラメータ σ)

$$\begin{aligned}
 & P(e_1^*, e_2^*, e_3^*, \dots, e_M^*, 0, 0, \dots, 0) \\
 &= |J| \int_{\varepsilon_1=-\infty}^{\varepsilon_1=+\infty} \left\{ \left(\prod_{i=2}^M \frac{1}{\sigma} \lambda \left[\frac{V_1 - V_i + \varepsilon_1}{\sigma} \right] \right) \right\} \left\{ \prod_{s=M+1}^K \Lambda \left[\frac{V_1 - V_s + \varepsilon_1}{\sigma} \right] \right\} \frac{1}{\sigma} \lambda \left(\frac{\varepsilon_1}{\sigma} \right) d\varepsilon_1 \\
 &= |J| \frac{1}{\sigma^{M-1}} \left[\prod_{i=2}^M e^{-\left(\frac{V_1 - V_i}{\sigma}\right)} \right] \left[\int_{\varepsilon_1=-\infty}^{\varepsilon_1=+\infty} \left(e^{-\frac{\varepsilon_1}{\sigma}} \right)^{M-1} \cdot e^{-\sum_{k=1}^K \left[e^{-\left(\frac{V_1 - V_k + \varepsilon_1}{\sigma}\right)} \right]} \cdot \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{\varepsilon_1}{\sigma}} d\varepsilon_1 \right].
 \end{aligned}$$

ここで $t = e^{-\frac{\varepsilon_1}{\sigma}}$ とおくと $dt = -e^{-\frac{\varepsilon_1}{\sigma}} \cdot \frac{1}{\sigma} d\varepsilon_1$ となり

$$- \int_{t=+\infty}^0 t^{M-1} \cdot e^{-\left[t \cdot \sum_{k=1}^K e^{-\left(\frac{V_1 - V_k}{\sigma}\right)} \right]} \cdot dt = \frac{(M-1)!}{\left[\sum_{k=1}^K e^{-\left(\frac{V_1 - V_k}{\sigma}\right)} \right]^M}$$

構造型の離散・連続モデル

Bhat (2008), **MDCEV (Multiple discrete-continuous extreme value) model**

closed form の式が得られる → $M=1$ のとき MNL になる

$$\begin{aligned}
 & P(e_1^*, e_2^*, e_3^*, \dots, e_M^*, 0, 0, \dots, 0) \\
 &= \frac{1}{\sigma^{M-1}} |J| \left[\prod_{i=2}^M e^{-\left(\frac{V_1 - V_i}{\sigma}\right)} \right] \left[\frac{1}{\left(\sum_{k=1}^K e^{-\left(\frac{V_1 - V_i}{\sigma}\right)}\right)^M} \right] (M-1)! \\
 &= \frac{1}{\sigma^{M-1}} \left[\prod_{i=1}^M c_i \right] \left[\sum_{i=1}^M \frac{1}{c_i} \right] \left[\frac{\prod_{i=1}^M e^{V_i/\sigma}}{\left(\sum_{k=1}^K e^{V_k/\sigma}\right)^M} \right] (M-1)! \text{ where } c_i = \left(\frac{1 - \alpha_i}{e_i^* + \gamma_i p_i} \right).
 \end{aligned}$$

↖ Bhat(2005)参照

前ページの式の導出

$$\int b^{M-1} \cdot e^b \cdot db = b^{M-1} \cdot e^b - (M-1) \int b^{M-2} \cdot e^b \cdot db$$

これを繰り返すと

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^0 b^{M-1} \cdot e^b \cdot db &= \left[\begin{array}{l} b^{M-1} e^b - (M-1) b^{M-2} \cdot e^b + (M-1)(M-2) b^{M-3} \cdot e^b - \\ (M-1)(M-2)(M-3) b^{M-4} \cdot e^b + \dots \\ (M-1)(M-2)(M-3) \dots 1 \cdot e^b \end{array} \right]_{b=-\infty}^{b=0} \\
 &= (-1)^{M-1} \cdot (M-1)!
 \end{aligned}$$

構造型の離散・連続モデル

Bhat (2008), **MDCEV (Multiple discrete-continuous extreme value) model**

様々なバリエーション

mixed MDCEV Bhat (2008)

$$P(e_1^*, e_2^*, e_3^*, \dots, e_M^*, 0, 0, \dots, 0) = \int_{\eta} \frac{1}{\sigma^{M-1}} \left[\prod_{i=1}^M c_i \right] \left[\sum_{i=1}^M \frac{1}{c_i} \right] \left[\frac{\prod_{i=1}^M e^{(V_i + \eta_i)/\sigma}}{(\sum_{k=1}^K e^{(V_k + \eta_k)/\sigma})^M} \right] (M-1)! dF(\eta).$$

MDCGEV (Generalized extreme value) Pinjari (2011)

$$P(t_1^*, \dots, t_M^*, 0, \dots, 0) = |J| \int_{\varepsilon_1 = -\infty}^{+\infty} \left[\left\{ \frac{\partial^M}{\partial \varepsilon_1 \dots \partial \varepsilon_M} F(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_K) \right\} \Big|_{\varepsilon_i = V_1 - V_i + \varepsilon_1, \forall i=1,2,\dots,K} \right] d\varepsilon_1$$

$$F_{GEV}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_K) = \exp[-G(e^{-\varepsilon_1}, e^{-\varepsilon_2}, \dots, e^{-\varepsilon_K})]$$

1. $G(y_1, \dots, y_i, \dots, y_K) \geq 0, \quad \forall y_i > 0 (i = 1, 2, \dots, K),$
2. G is homogeneous of degree $\mu > 0$, that is $G(ay_1, \dots, ay_i, \dots, ay_K) = a^\mu G(y_1, \dots, y_i, \dots, y_K),$
3. $\lim_{y_i \rightarrow +\infty} G(y_1, \dots, y_i, \dots, y_K) = +\infty, \quad \forall i = 1, 2, \dots, K,$ and
4. $(-1)^M \frac{\partial^M G(y_1, \dots, y_K)}{\partial y_1 \dots \partial y_M} \leq 0, \quad \forall y_i > 0 (i = 1, 2, \dots, K).$

構造型の離散・連続モデル

Bhat (2008), MDCEV (Multiple discrete-continuous extreme value) model

NEV (Nested extreme value) Pinjari (2011)

$$F_{NEV}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_K) = \exp \left[- \sum_{s=1}^{S_K} \left\{ \sum_{i \in \sigma_s^{\text{th nest}}} (Y_i)^{1/\theta_s} \right\}^{\theta_s} \right]$$

CNEV (Cross nested extreme value) Pinjari (2011)

$$F_{CNEV}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_K) = \exp \left[- \sum_{s=1}^{S_K} \left\{ \sum_{i \in \sigma_s^{\text{th nest}}} (\alpha_{\sigma_i} Y_i)^{1/\theta_s} \right\}^{\theta_s} \right]; \quad \text{where } Y_i = e^{-\varepsilon_i}; \quad 0 \leq \alpha_{\sigma_i} \leq 1; \quad \sum_{s=1}^{S_K} \alpha_{\sigma_i} = 1$$

$$P(t_1^*, t_2^*, \dots, t_M^*, 0, \dots, 0) = \sum_{\sigma_1=1}^{S_K} \sum_{\sigma_2=1}^{S_K} \dots \sum_{\sigma_M=1}^{S_K} \left[|J| \prod_{\sigma_i \in S(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_M)} \left\{ \frac{\prod_{\substack{i \in \sigma_i^{\text{th nest, and}} \\ i \in \{\text{chosen alternatives}\}}} (\alpha_{\sigma_i} e^{V_i})^{1/\theta_{\sigma_i}}}{\left(\sum_{i \in \sigma_i^{\text{th nest}}} (\alpha_{\sigma_i} e^{V_i})^{1/\theta_{\sigma_i}} \right)^{q_{\sigma_i}}} \right\} \right. \\ \times \sum \dots \sum_{r_{\sigma_i}=1}^{q_{\sigma_i}} \dots \sum_{\forall \sigma_i \in S(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_M)} \left\{ \prod_{\sigma_i \in S(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_M)} \left[\left(\frac{\left(\sum_{i \in \sigma_i^{\text{th nest}}} (\alpha_{\sigma_i} e^{V_i})^{1/\theta_{\sigma_i}} \right)^{\theta_{\sigma_i}}}{H} \right)^{q_{\sigma_i} - r_{\sigma_i} + 1} \text{sum}(X_{r_{\sigma_i}}) \right] \right. \\ \left. \left. \times \left(\sum_{\sigma_i \in S(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_M)} (q_{\sigma_i} - r_{\sigma_i} + 1) - 1 \right)! \right\} \right]$$

構造型の離散・連続モデル

Bhat (2008), MDCEV (Multiple discrete-continuous extreme value) model

MDCP (Multiple discrete-continuous probit) Bhat et al. (2013)

$$\psi_{qk} = \exp(\beta'_q \mathbf{z}_{qk} + \xi_{qk}) \quad q: \text{個人}$$

$\xi_q = (\xi_{q1}, \xi_{q2}, \dots, \xi_{qK})' \sim MVN_K(\mathbf{0}_K, \mathbf{\Lambda})$: 個人間の異質性

$\beta_q \sim MVN_D(\mathbf{b}, \mathbf{\Omega})$: 個人内の変動

$\beta_q = \mathbf{b} + \tilde{\beta}_q$, where $\tilde{\beta}_q \sim MVN_D(\mathbf{0}_D, \mathbf{\Omega})$ taste variation

$$L_q = \sum_{k=1}^K \frac{\gamma_k}{\alpha_k} \exp(\mathbf{b}' \mathbf{z}_{qk} + \tilde{\beta}'_q \mathbf{z}_{qk} + \xi_{qk}) \left\{ \left(\frac{x_{qk}}{\gamma_k} + 1 \right)^{\alpha_k} - 1 \right\} - \lambda_q \left[\sum_{k=1}^K p_{qk} x_{qk} - E_q \right]$$

$$V_{qk} + \tilde{\beta}'_q \mathbf{z}_{qk} + \xi_{qk} = V_{qm_q} + \tilde{\beta}'_q \mathbf{z}_{qm_q} + \xi_{qm_q}, \quad \text{if } x_{qk}^* > 0, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad k \neq m_q$$

$$V_{qk} + \tilde{\beta}'_q \mathbf{z}_{qk} + \xi_{qk} < V_{qm_q} + \tilde{\beta}'_q \mathbf{z}_{qm_q} + \xi_{qm_q}, \quad \text{if } x_{qk}^* = 0, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad k \neq m_q$$

$$\text{where } V_{qk} = \mathbf{b}' \mathbf{z}_{qk} + (\alpha_k - 1) \ln \left(\frac{x_{qk}^*}{\gamma_k} + 1 \right) - \ln p_{qk}$$

折衷型の離散・連続モデル

効用最大化問題を解くことで連続問題の需要関数を導出し、
事後的に離散問題を導入

Kitamura (1984)

効用関数 $U_j(t_j, x_j) = \xi_j V_j(t_j, x_j), t_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, J,$

1) ラグランジュ未定乗数法により効用最大化問題を解き需要関数を導出

$$\begin{aligned} \text{Maximize} \quad & U(t_1, t_2, \dots, t_J) = \sum_{j=1}^J \xi_j V_j(t_j, x_j) \\ \text{Subject to} \quad & \sum_{j=1}^J t_j = T \\ & t_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, J \end{aligned}$$

確定項の定義 $V_j(t_j, x_j) = f_j(x_j) \ln t_j \gamma_j$
 $= \gamma_j f_j(x_j) \ln t_j$

すべての j に資源を配分する場合の最適配分

$$t_j^* = \frac{\xi_j \gamma_j f_j(x_j)}{\sum_{i=1}^J \xi_i \gamma_i f_i(x_i)} T, \quad j = 1, 2, \dots, J.$$

折衷型の離散・連続モデル

効用最大化問題を解くことで連続問題の需要関数を導出し、
事後的に離散問題を導入

Kitamura (1984)

2) 各財を消費するかどうかの2項プロビットモデルを導入：離散選択行動

3) 連続問題と離散問題をType IIのTobitモデルで関連づける

→端点解（一部の選択肢への配分が0）を考慮した時間配分モデルを構築

$$\begin{cases} I_i = -\ln v_i + \alpha_1' X_{1i} + \epsilon_{1i} \\ t_{1i} = 0 \text{ if } I_i \leq 0 \\ \ln [t_{1i}/(T_i - t_{1i})] = \alpha_2' X_{2i} + \epsilon_{2i} \text{ if } I_i > 0 \end{cases}$$

ここで $(\epsilon_{1i}, \epsilon_{2i}) \sim MVN(0, \Sigma_\epsilon)$

$$\Sigma_\epsilon = \begin{pmatrix} \sigma^{11} & \sigma^{12} \\ \sigma^{21} & \sigma^{22} \end{pmatrix}$$

折衷型の離散・連続モデル

MDCEV型の効用関数と誤差相関を複合的に用いたモデル

Habib (2011)

離散選択

$$U_j = V_j + \varepsilon_j = \beta_j x_j + \varepsilon_j$$

連続量 (資源配分)

$$U(t_k) = \sum_{k=1}^2 \frac{1}{\alpha_k} \exp(\psi_k z_k + \varepsilon'_k) (t_k^{\alpha_k} - 1)$$

時間制約

$$t_j + t_c = T$$

c : 逐次的な各選択回において
残りの全体を表す

資源配分問題のラグランジュ関数

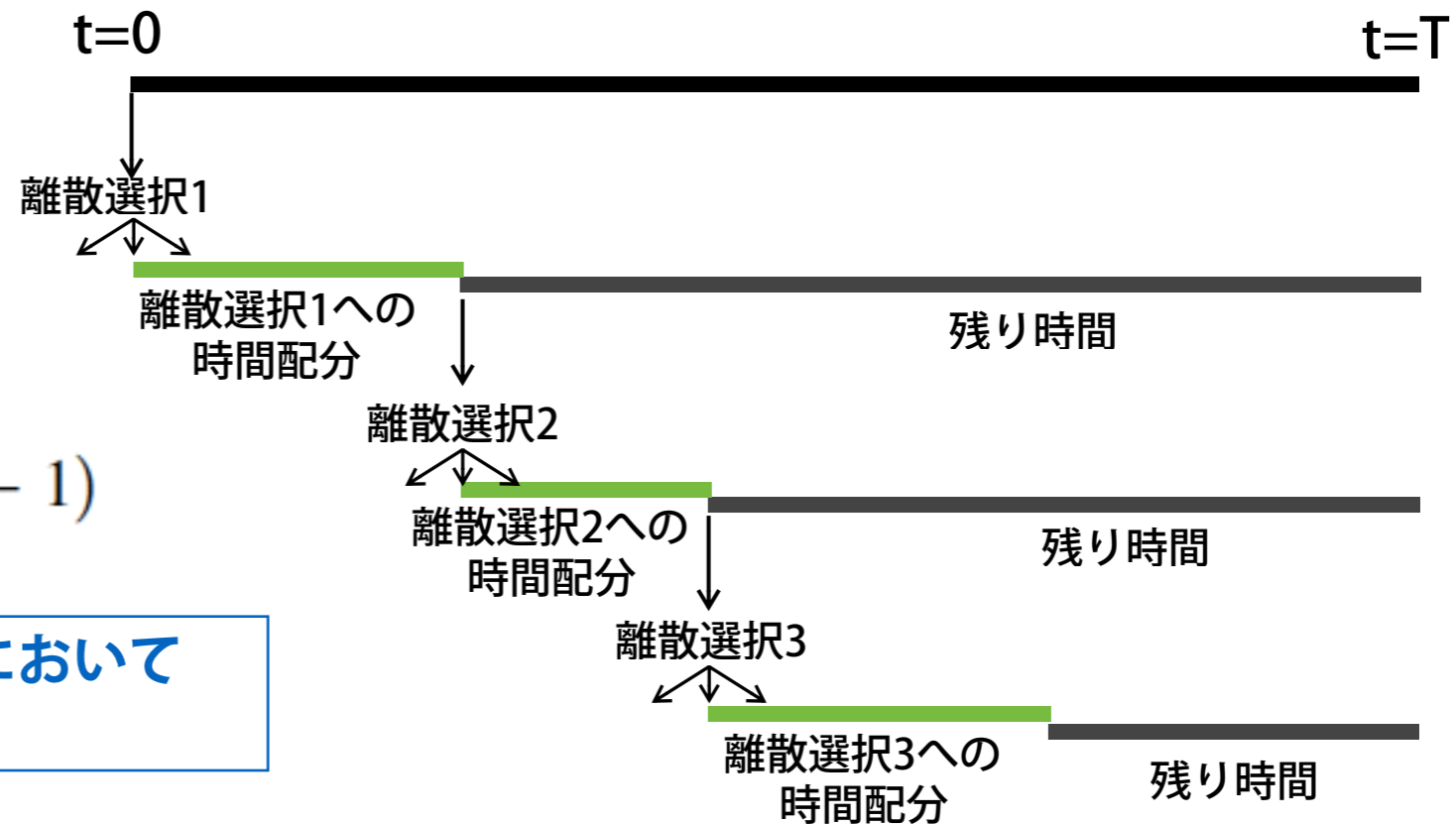
$$l = \sum_{k=1}^2 \frac{1}{\alpha_k} \exp(\psi_k z_k + \varepsilon'_k) (t_k^{\alpha_k} - 1) - \lambda \left[\sum_{k=1}^2 t_k - T \right]$$

MDCEVと同様の計算により, KKT条件から

$$\begin{aligned} \varepsilon'_j - \varepsilon'_c &= V'_c - V'_j & \text{for } t_j > 0 \\ \varepsilon'_j - \varepsilon'_c &< V'_c - V'_j & \text{for } t_j = 0 \end{aligned}$$

V'_c : 残りの選択肢全体の
複合的効用の確定項

$$V'_k = [\psi_k z_k + (\alpha_k - 1) \ln(t_k)], \quad k = j, c$$



折衷型の離散・連続モデル

Habib (2011)

離散問題

$$\begin{aligned}
 \Pr\left(U_j > \max_{n=1,2,3,\dots,A, n \neq j} U_n\right) &= \Pr\left(V_j > \left\{ \max_{n=1,2,3,\dots,M, n \neq j} U_n \right\} - \varepsilon_j\right) \\
 &= \Pr(V_j > (V_n + \varepsilon_n) - \varepsilon_j) \\
 &= \Pr(V_n < V_j + (\varepsilon_j - \varepsilon_n)) \tag{10}
 \end{aligned}$$

ε_k にi.i.d.ガンベル分布を仮定

$$\Pr((\varepsilon_n - \varepsilon_j) < (V_j - V_n)) = \frac{\exp(V_j)}{\exp(V_j) + \sum_{n \neq j} \exp(V_n)}$$

連続問題 ε'_k にi.i.d.ガンベル分布を仮定 (スケールパラメータ σ)

Johnson et al. (1995)

$$\begin{aligned}
 \Pr((\varepsilon'_j - \varepsilon'_c) = (V'_c - V'_j)) &= \frac{1}{\sigma} \exp\left(\frac{-(V'_c - V'_j)}{\sigma}\right) \left[1 + \exp\left(\frac{-(V'_c - V'_j)}{\sigma}\right)\right]^{-2} \\
 \Pr((\varepsilon'_j - \varepsilon'_c) < (V'_c - V'_j) +) &= \left[1 + \exp\left(\frac{-(V'_c - V'_j)}{\sigma}\right)\right]^{-1}
 \end{aligned}$$

折衷型の離散・連続モデル

Habib (2011)

変数変換定理 (Kottegoda and Rosson, 2008) より (t の分布に変換)

$$\begin{aligned} \Pr(t = t_j) &= \left(\frac{\delta((V'_c - V'_j))}{\delta t_j} \right) \frac{1}{\sigma} \exp\left(\frac{-(V'_c - V'_j)}{\sigma}\right) \left[1 + \exp\left(\frac{-(V'_c - V'_j)}{\sigma}\right) \right]^{-2} \\ &= \left(\frac{1 - \alpha_j}{t_j} + \frac{1 - \alpha_c}{t_c} \right) \frac{1}{\sigma} \exp\left(\frac{-(V'_c - V'_j)}{\sigma}\right) \left[1 + \exp\left(\frac{-(V'_c - V'_j)}{\sigma}\right) \right]^{-2} \end{aligned}$$

where,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta((V'_c - V'_j))}{\delta t_j} \right) &= \frac{\delta}{\delta t_j} ((\alpha_c - 1) \ln(T - t_j) - \psi z - (\alpha_j - 1) \ln(t_j)) \\ &= \frac{(1 - \alpha_j)}{t_j} + \frac{(1 - \alpha_c)}{t_c} \end{aligned}$$

Lee (1983) に基づき離散, 連続問題の誤差分布を正規分布に変換

$$\varepsilon_j^* = J_1(\varepsilon_j) = \Phi^{-1}[(\varepsilon_n - \varepsilon_j) < (V_j - V_n)]$$

$$\varepsilon_k^* = J_2(\varepsilon'_j) = \Phi^{-1}[(\varepsilon'_j - \varepsilon'_c) < (V'_c - V'_j)]$$

Φ^{-1} : 標準正規分布関数の逆関数

折衷型の離散・連続モデル

Habib (2011)

2変量正規分布の同時分布 (相関係数 ρ_{jt})

$$\begin{aligned} \Pr(\text{Time} = t_j \cap \text{Activity Type} = j) &= \Pr(\text{Time} = t_j \cap \varepsilon \leq J_1(\varepsilon_j)) \\ &= \left(\frac{1 - \alpha_j}{t_j} + \frac{1 - \alpha_c}{t_c} \right) \frac{1}{\sigma} \exp\left(\frac{-(V'_c - V'_j)}{\sigma}\right) \left[1 + \exp\left(\frac{-(V'_c - V'_j)}{\sigma}\right) \right]^{-2} \\ &\quad \times \Phi\left(\frac{J_1(\varepsilon_j) - \rho_{jt} J_2(\varepsilon'_j)}{\sqrt{1 - \rho_{jt}^2}}\right) \end{aligned}$$

個人 i の観測 $j=1, \dots, n$ ($t=0$ から $t=T$ まで) に関する尤度関数

$$L_i = \prod_{j=1}^n \left(\left(\frac{1 - \alpha_{ji}}{t_{ji}} + \frac{1 - \alpha_{ci}}{t_{ci}} \right) \frac{1}{\sigma} \exp\left(\frac{-(V'_{ci} - V'_{ji})}{\sigma}\right) \left[1 + \exp\left(\frac{-(V'_{ci} - V'_{ji})}{\sigma}\right) \right]^{-2} \right)^{D_{ji}} \Phi\left(\frac{J_1(\varepsilon_{ji}) - \rho_{jt} J_2(\varepsilon'_{ji})}{\sqrt{1 - \rho_{jt}^2}}\right)$$

- 福田大輔, 力石真 : 離散-連続モデルの研究動向に関するレビュー, 土木学会論文集D3 (土木計画学), Vol.69, No.5, I_497-I_510, 2013.
- Dubin, J.A. and McFadden, D.L. : An econometric analysis of residential electric appliance holdings and consumption, *Econometrica*, Vol.52, pp.345–362, 1984.
- Bhat, C.R. : A multiple discrete-continuous extreme value model: formulation and application to discretionary timeuse decisions, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 39, pp.679–707, 2005.
- Tobin, 1958Tobin, J. : Estimation of relationships for limited dependent variables, *Econometrica*, Vol.26, pp. 24–36, 1958.
- Fang, H.A. : A discrete-continuous model of households' vehicle choice and usage, with an application to the effects of residential density, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.42, pp.736–758, 2008.
- Kitamura, R. : A model of daily time allocation to discretionary out-of-home activities and trips, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.18, pp.255–266, 1984.
- Bhat, C.R. : The multiple discrete-continuous extreme value (MDCEV) model: Role of utility function parameters, identification considerations, and model extensions, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.42, pp.274–303, 2008.
- Pinjari, A. R. : Generalized extreme value (GEV)-based error structures for multiple discrete-continuous choice models. *Transportation Research Part B*, Vol. 45, pp. 474–489, 2011.
- Bhat, C.R., Castro, M. and Khan, M. : A new estimation approach for the multiple discrete-continuous probit (MDCP) choice model, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.55, pp.1–22, 2013.
- Habib, K. M. N. : A random utility maximization (RUM) based dynamic activity scheduling model : Application in weekend activity scheduling. *Transportation*, Vol. 38, pp. 123–151, 2011.