有界性のある
確率均衡モデル

熊本大学
円山　琢也

Watling et al., 2018. Stochastic user equilibrium with a bounded choice model.
Transp. Res. Part B Methodol. 114, 254–280.

国内実務における利用者均衡配分 UE

- User Equilibrium (利用者均衡; UE)
- Stochastic UE (確率的利用者均衡; SUE)
  - 交通配分モデルへの経路選択モデルの導入
- 実務検討の報告例：
  首都高速 (e.g.渡邉ら 2004, 井上ら2011),　阪神高速 (e.g.石橋ら),
  NEXCO全国 (e.g.山本ら2016) など
- 高速転換率内生化モデル (松井・藤田 2000)：
  旧来からの転換率モデルをUEに統合
- 償還計画・整備計画の評価等を念頭においた長期予測のためのモデル
- 現況再現性の重視：リンク交通量，料金収入，高速利用距離分布

ランプペア選択を考慮したUE

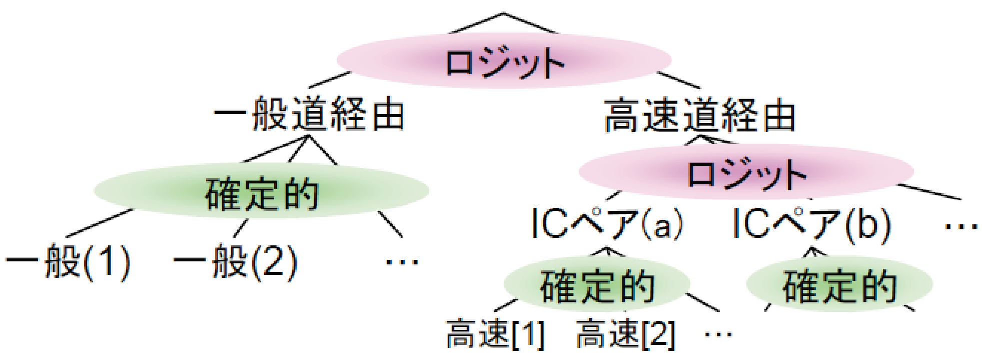


図-6　提案モデル（その2）の経路選択構造

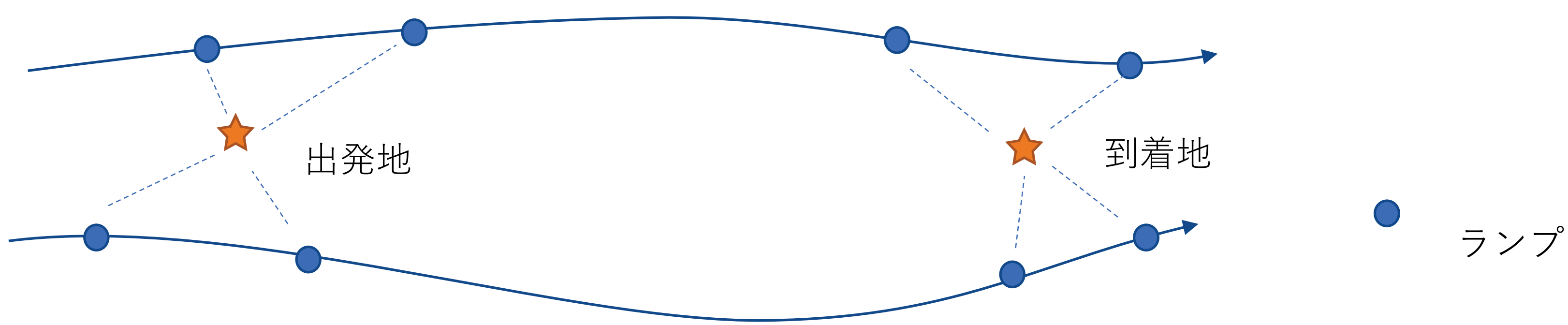
出典) 井上ら 2011

モデルの論理性・合理性を保ちながら現況再現性を高める工夫
Nested Logitタイプのモデル

あるODペア間の高速利用においてで利用しうるICペアの選択肢集合を決定

数十個の選択肢を設定することも

ランプペア：4 ×4 =16 選択肢



ランプペア選択肢集合の決定法
(学術論文として公表されている実務の事例)

井上ら(2011)の方法 (首都高)

非補償型ルール

- Step 1　不自然な経路の除外
  - 高速利用経路で一般道路部分の距離 > OD間距離
  - 経路距離 > OD間距離の2倍
- Step 2　安さ優先の経路の抽出
  - Step 1の経路集合から料金が安い経路10経路
- Step 3　速さ優先の経路の抽出
  - Step 1の経路集合から所要時間の短い経路10経路
- Step 4　Step 2 とStep 3の経路を合計し，20経路になるまで時間の短い経路を追加

(最新の検討では，さらに改良した方法が利用されている)

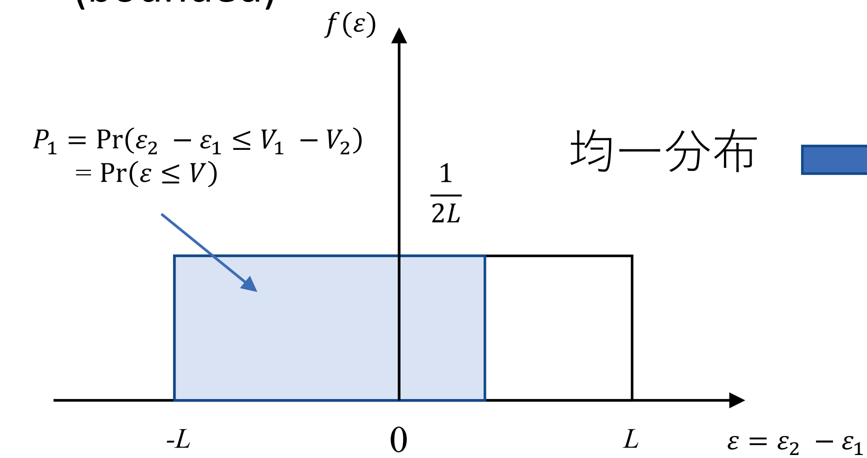
山本 (2016)の方法　(NEXCO)

時間価値を変化させて一般化時間が最小となる選択肢を複数探索する

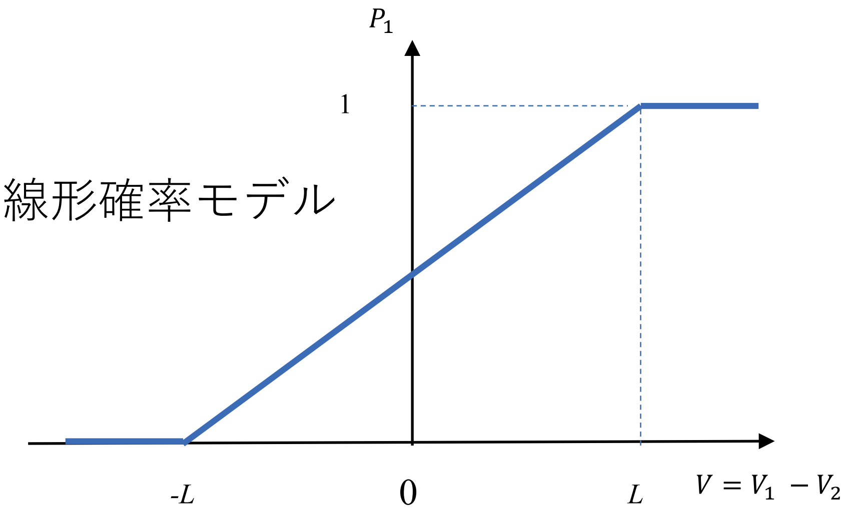
なぜ選択肢集合の決定が重要か？

有界な誤差項分布の例: 2項選択モデル

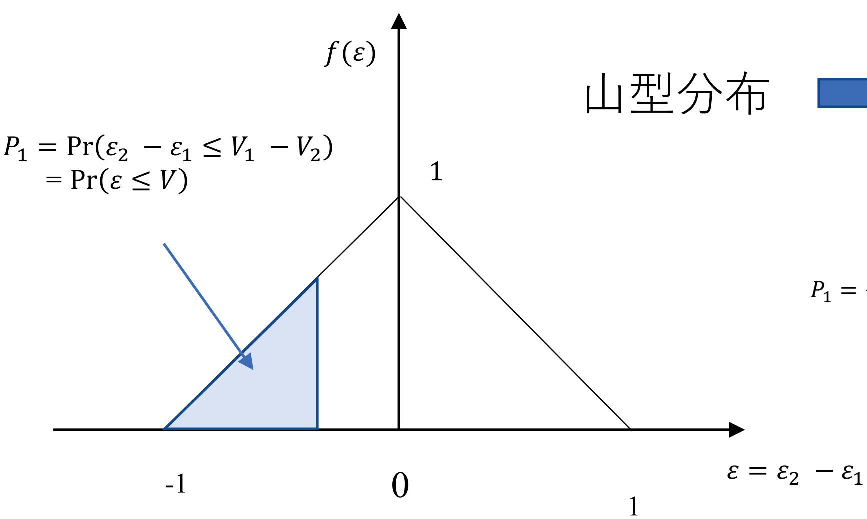
(bounded)



均一分布 → 線形確率モデル

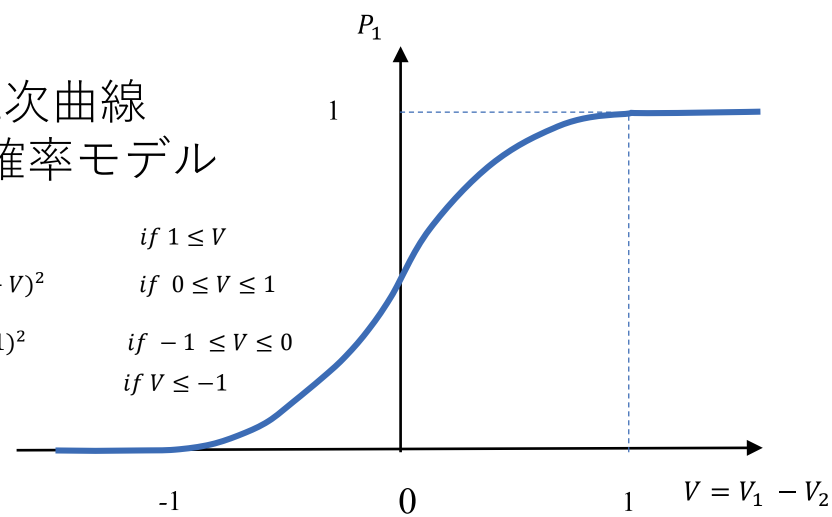


$$if\ V \le -1$$



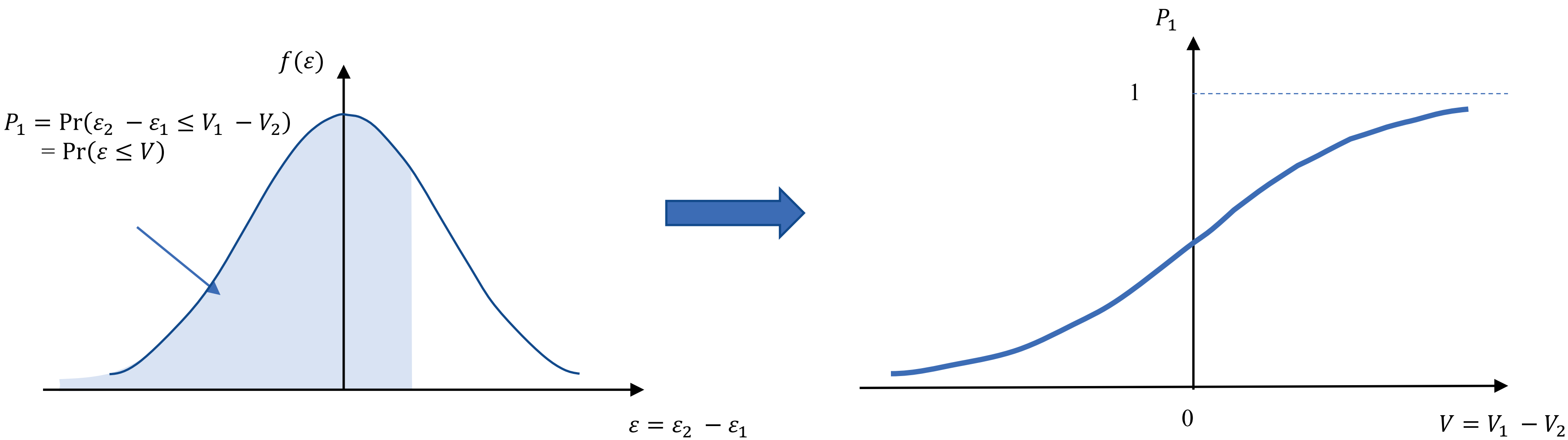
山型分布 → 2次曲線確率モデル

$$P_1 = \begin{cases} 1 & if\ 1 \le V \\ 1 - \frac{1}{2}(1-V)^2 & if\ \ 0 \le V \le 1 \\ \frac{1}{2}(V+1)^2 & if\ \ -1 \le V \le 0 \\ 0 & if\ V \le -1 \end{cases}$$



確率=0 or 1 が表現される

非有界な誤差項分布:
(unbounded)



$\varepsilon_2, \varepsilon_1$ が正規分布 $\rightarrow \varepsilon$ も正規分布
$\Rightarrow$ プロビットモデル

$\varepsilon_2, \varepsilon_1$ が$i.i.d$ガンベル分布
$\rightarrow \varepsilon$ はロジスティック分布
$\Rightarrow$ 二項ロジットモデル

確率は限りなくゼロに近づきうるが
<u>ゼロにはらならない</u>

<u>選択肢集合に含まれる選択肢の確率はゼロにならない</u>

(通常利用される)非有界な誤差項分布に基づくモデルでは
選択肢集合の設定が重要

SUEにおける
選択肢集合決定問題

- 経路変数を明示しない(Implicit)アプローチ
- Dial 配分：Efficient Pass(有効経路)
  - その時点の所要時間に基づく→経路集合が一定にならず厳密には収束しない/振動しうる
- MCA: サイクリックな経路問題
  - Oyama Hato (2019) 時間構造化NWでの MCAの展開例
- 距離ベースの決定法 Leurent (1997)

実務で安心して利用できる「決定版」がない

有界性のある確率均衡モデル

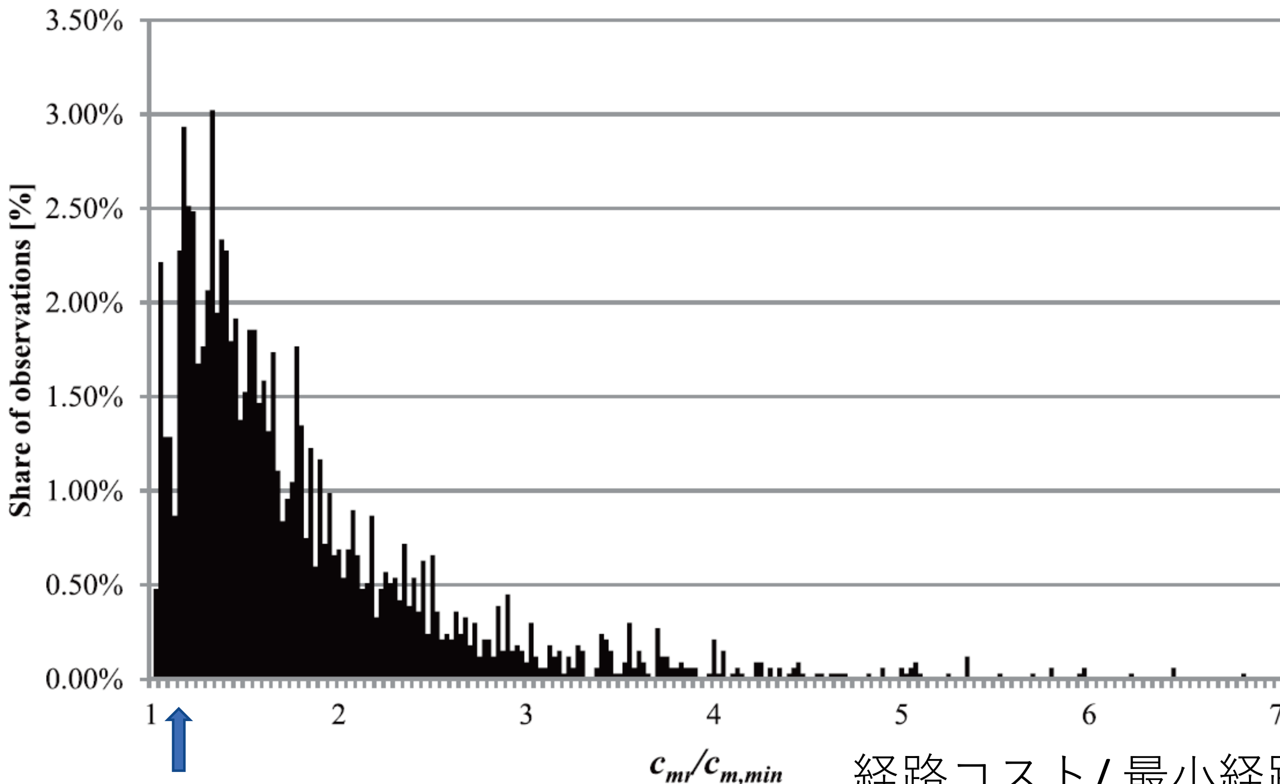
Watling et al., 2018. Stochastic user equilibrium with a bounded choice model. Transp. Res. Part B Methodol. 114, 254–280.

概要

- 既存のSUEで選択肢集合内の経路選択確率が非ゼロになる問題に対し，有界性のある選択モデル(Bounded Choice Model, BCM)を新たに提案し，その均衡モデルとの統合を示す
- BCM はClosed form
- 経路選択肢集合も均衡解として算出と解釈可
- 均衡解は存在し，唯一

厳密なUEにおける非利用経路のコスト分布例

出典) Watling et al. 2015, 2018



経路コスト/ 最小経路コスト

- UEでは，最小経路コストをわずかに超過した経路コストをもつ経路は利用されない
- SUEでは，最小経路コストの2~6倍の経路コストの経路にも非ゼロフローが流れうる

両極端なUE, SUEの中間のモデルを作成できないか？

（1）既存のSUE

- 非有界な(unbounded)誤差項分布
- 選択肢集合に含まれる経路の交通量は非ゼロ
- 既存の経路選択肢集合の限定方法はアルゴリズムに依存

（2）経路選択肢集合の事前生成法

- SUEの計算以前に選択肢集合を決定・固定
- 経路選択集合の決定に利用した所要時間は均衡所要時間と異なる
- 選択肢集合の生成の理論と選択モデルの理論が整合せず
  → 政策感度などに悪影響が生じうる

最初に紹介したランプペア選択を内生化したUEにも同様な課題あり

（3）限定合理的・利用者均衡モデル (Boundedly Rational User Equilibrium, BRUE)

- Mahmassani and Chang, 1987; Guo and Liu, 2011; Lou et al., 2010; Di et al., 2013 ; Di and Liu, 2016
- 点推定ではなく，区間推定的
- 唯一解ではない：政策評価，便益評価に不都合

（4）内生的な選択肢集合限定法：制限付き (Restricted) SUE

- 均衡解に依存した条件で経路選択肢集合を決定
- Watling et al. (2015). Rasmussen et al. (2015).
- 均衡解の存在が保証されず/ 唯一解も保証されず

本提案モデルへの要求条件

1. 確定UEのように準最適(sub-optimal)経路を除外せず，非現実的な全経路を含むこともない
2. 点推定 (BRUEは区間推定)
3. 経路フローの均衡解と同時に経路選択肢集合も均衡させる．均衡コストと整合的に選択肢集合を決める
4. ランダム効用理論に基づく
5. 解の存在と唯一性が保証される

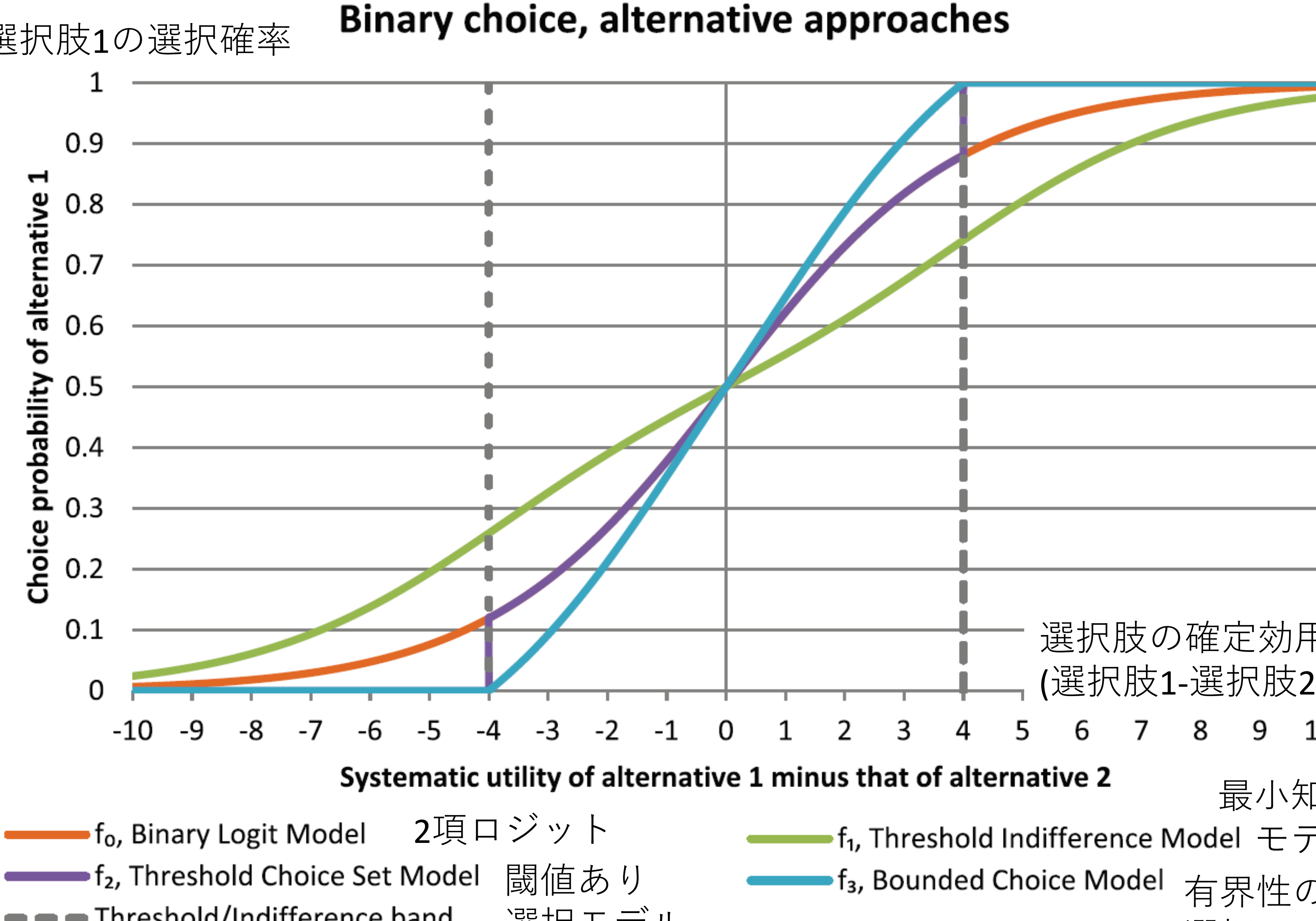
提案モデルの説明の流れ

- ２項選択での例示
- 多項選択への拡張
- 確率均衡配分としての定式化・解の性質
- 計算アルゴリズム
- 数値実験例

2項選択確率のモデル間比較

出典) Watling et al 2018

選択肢1の選択確率



選択肢の確定効用の差分
(選択肢1-選択肢2)

2項ロジット

閾値あり
選択モデル

閾値/有界値

最小知覚差
モデル

有界性のある
選択モデル

F0: 2項ロジットモデル

Binary Logit Model:

$$f_0(x;\theta) = (1+\exp(-\theta x))^{-1} \quad (-\infty < x < \infty)$$

x: 確定効用の差分
θ: パラメータ

f_0: 選択確率

F2:閾値あり選択モデル

Threshold Choice Set Model:

$$f_2(x;\ \theta,\delta) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < -\delta \\ (1+\exp(-\theta x))^{-1} & \text{if } |x| \le \delta \\ 1 & \text{if } x > \delta \end{cases}$$

x: 確定効用の差分
δ: 閾値
θ: パラメータ

f_2: 選択確率

F1:最小知覚差モデル (Krishnan 1977)

minimum perceivable difference 最小知覚差(MPD)

Threshold Indifference Model:

$$f_1(x;\ \theta, \delta, \alpha) = (1 + \exp(\theta(\delta - x)))^{-1} + \alpha\left\{1 - (1 + \exp(\theta(\delta - x)))^{-1} - (1 + \exp(\theta(\delta + x)))^{-1}\right\}$$

f_1: 選択確率

x: 確定効用の差分

δ: 閾値

θ, α: パラメータ

効用の差分が閾値外であれば，2項ロジットで表現
閾値内であれば，無差別
という仮定から導出される

選択肢1の効用が優越する確率 $\pi_1 = \Pr(A_1 \succ A_2) = \Pr(U_1 > U_2 + \delta)$ $\pi_1 = (1 + \exp(\theta(\delta + V_2 - V_1)))^{-1}$

選択肢2の効用が優越する確率 $\pi_2 = \Pr(A_2 \succ A_1) = \Pr(U_2 > U_1 + \delta)$ $\pi_2 = (1 + \exp(\theta(\delta + V_1 - V_2)))^{-1}$

それ以外の確率 $\pi_{12} = \Pr(A_1 \sim A_2) = \Pr(|U_1 - U_2| \le \delta)$ $\pi_{12} = 1 - \pi_1 - \pi_2$

選択肢1の選択確率 $\pi_1^* = \pi_1 + \pi_{12}\alpha$

選択肢1の選択確率 $\pi_2^* = \pi_2 + \pi_{12}(1 - \alpha)\ (= 1 - \pi_1^*)$

補償型モデル

Krishnan (1977) Incorporating thresholds of indifference in probabilistic choice models. Manag. Sci. 23

鉄道経路選択への適用例として加藤ら(2004) MPD モデル

F3: 有界性のある選択モデル

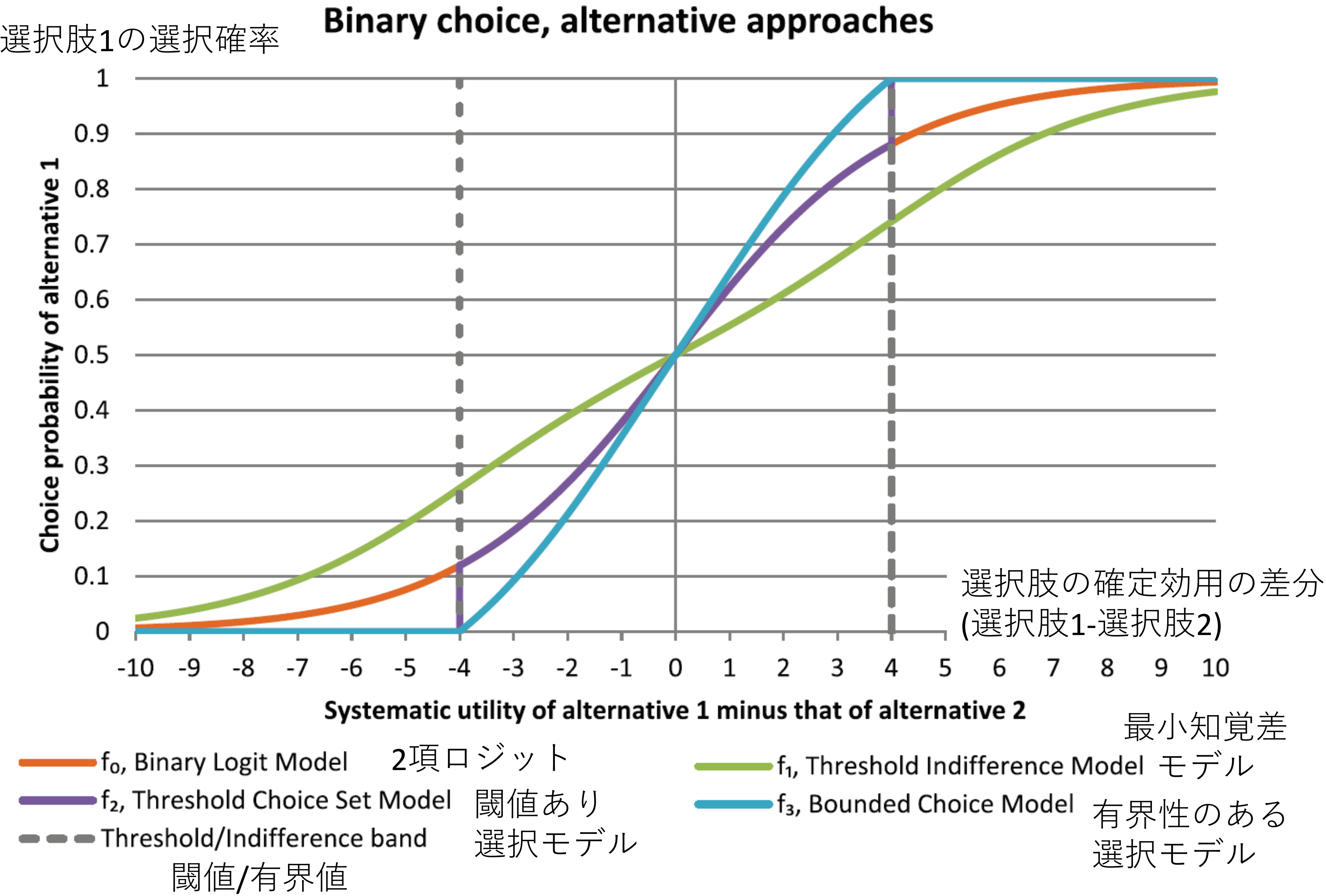
Bounded Choice Model:

$$f_3(x;\ \theta,\delta) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < -\delta \\ \dfrac{\exp(\theta(x+\delta)) - 1}{(\exp(\theta(x+\delta)) - 1) + (\exp(\theta\delta) - 1)} & \text{if } -\delta \le x \le 0 \\ \dfrac{\exp(\theta\delta) - 1}{(\exp(\theta\delta) - 1) + (\exp(\theta(-x+\delta)) - 1)} & \text{if } 0 \le x \le \delta \\ 1 & \text{if } x > \delta \end{cases} .$$

導出過程は少し煩雑なので略 (論文参照)

2項選択確率のモデル間比較

出典) Watling et al 2018



モデルの性質比較

- F0(2項ロジット), F1 : 滑らか(smooth)で確率は上界・下界で限りなく1 or 0に近づく．ただし確率は常に非ゼロ
- F2 (閾値あり選択モデル): 滑らかでない(non-smooth)で，閾値δで不連続（ジャンプする）
- F3 (有界性のある選択モデル):滑らかでない(non-smooth)が，連続

←この性質は提案する確率均衡モデルの解の性質の解析で重要

- F2, F3: 確率ゼロを表現可能
- F1: 限定合理モデルと類似：効用差分～0のとき選択確率の変化→小 (傾きを平らに)，閾値の影響小
- F2:閾値の影響大
- F3: 閾値の付近で不連続にならないように確率を補正しているイメージ

ネットワーク均衡への拡張

- モデルF1: は3項選択以上への拡張が複雑
- モデルF2：Rasmussen et al. (2017) が適用例
  最大の欠点：非連続性→均衡解が存在しないこともある
- モデルF3: 均衡解の存在を証明可能
  均衡解の唯一性も選択モデルの単調性を利用すると，通常のリンクコスト関数下で証明可能
  (詳細は論文)

有界性のある多項選択モデル
(Bounded Choice Model; BCM)

δ: 閾値
θ: パラメータ

$$p_j(\mathbf{V};\theta,\delta)=\frac{\left(\exp\left(\theta\left(V_j-\max(V_1,V_2,\ldots,V_n)+\delta\right)\right)-1\right)_+}{\sum_{k=1}^{n}\left(\exp\left(\theta\left(V_k-\max(V_1,V_2,\ldots,V_n)+\delta\right)\right)-1\right)_+}\quad (j=1,2,\ldots,n).$$

選択肢jの
選択確率

$$(x)_+=\begin{cases}0 & if\ x\le 0\\ x & if\ x>0\end{cases}$$

最大効用を与える選択肢の効用との差が閾値δ以上

$$\Rightarrow\ \left(\exp\left(\theta\left(V_j-\max(V_1,V_2,\ldots,V_n)+\delta\right)\right)-1\right)_+=0$$

多項選択でもClosed Formで記述される

閾値 $\delta\to\infty$ で多項ロジットと一致

$$p_j(\mathbf{V};\ \theta,\delta)\to\frac{\exp(\theta V_j)}{\sum_{k=1}^{n}\exp(\theta V_k)}\ \text{as}\ \delta\to\infty.$$

閾値 $\delta\to 0$ で最短経路選択

有界性のある確率均衡モデル
Bounded SUE

闘値の決め方

(1) *Relative Cost Model:* Variable bounds $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{c})=(\delta_1(\mathbf{c}),\delta_2(\mathbf{c}),\ldots,\delta_M(\mathbf{c}))$ where

$$\delta_m(\mathbf{c}) = (\tau - 1)\min\{c_{ms} : s \in R_m\} \quad (m = 1, 2, \ldots, M;\ \tau > 1).$$

相対コストモデル：　OD間の最小コストの一定倍数

(2) *Absolute Cost Model:* Constant OD-specific bounds, $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{c}) \equiv \boldsymbol{\delta}=(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_M)$ where $\delta_m>0$ for $m=1,2,\ldots,M$.

絶対コストモデル：　OD別に定める

均衡の定義

Definition 1. *Bounded Stochastic User Equilibrium (Bounded(δ) SUE)*

The route flow $\mathbf{x} \in G$ *is a Bounded SUE if and only if it is both an SUE:*

$$\boxed{x_{mr} = d_m P_{mr}(\mathbf{c}(\mathbf{x}))\ \ (r \in R_m;\ m = 1, 2, \ldots, M)}$$

⇐経路交通量= OD×経路選択確率

and the choice model is given by the Bounded Choice Model form based on bounds $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{c})$*:*

$$P_{mr}(\mathbf{c}) = \frac{(\exp(-\theta(c_{mr} - \min(c_{ms}:\ s \in R_m) - \delta_m(\mathbf{c}))) - 1)_+}{\sum_{t\in R_m}(\exp(-\theta(c_{mt} - \min(c_{ms}:\ s \in R_m) - \delta_m(\mathbf{c}))) - 1)_+} \quad (r \in R_m;\ m = 1, 2, \ldots, M).$$

均衡解は存在し，リンクコスト関数が狭義単調ならば，解は唯一

アルゴリズム

Step 0: 初期化:

Step 1: 列生成(Column generation): 経路集合の拡張

制約付き数え上げ法など

Step 2: 限定親問題(Restricted master problem)

MSA逐次平均法など

Step 3: 交通量負荷 (Network loading)

Step 4: 有界条件 (Bounded condition)

閾値外のコストのある経路を選択肢から除外

Step 5: 収束判定

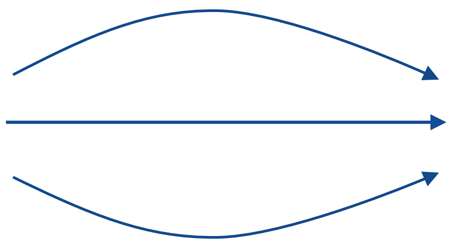
厳密な収束性は提示されていないが，概ね収束は期待できるとのこと

数値計算例: 3リンク

t_{01}

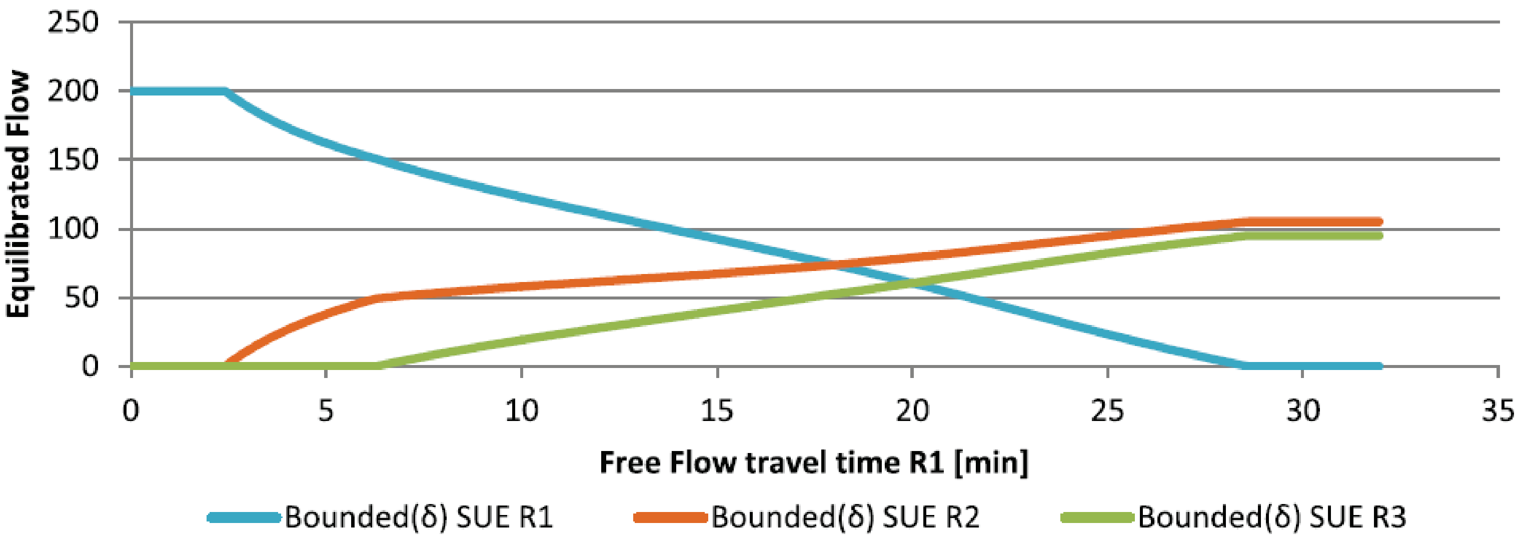
$t_{02} = 18$

$t_{03} = 23$



$$c_i(\mathbf{x}) = c_i(x_i) = t_{0i} \cdot \left(1 + 0.3 \cdot \left(\frac{x_i}{100}\right)^4\right)$$

$\theta = 0.2 \quad \delta = 4$

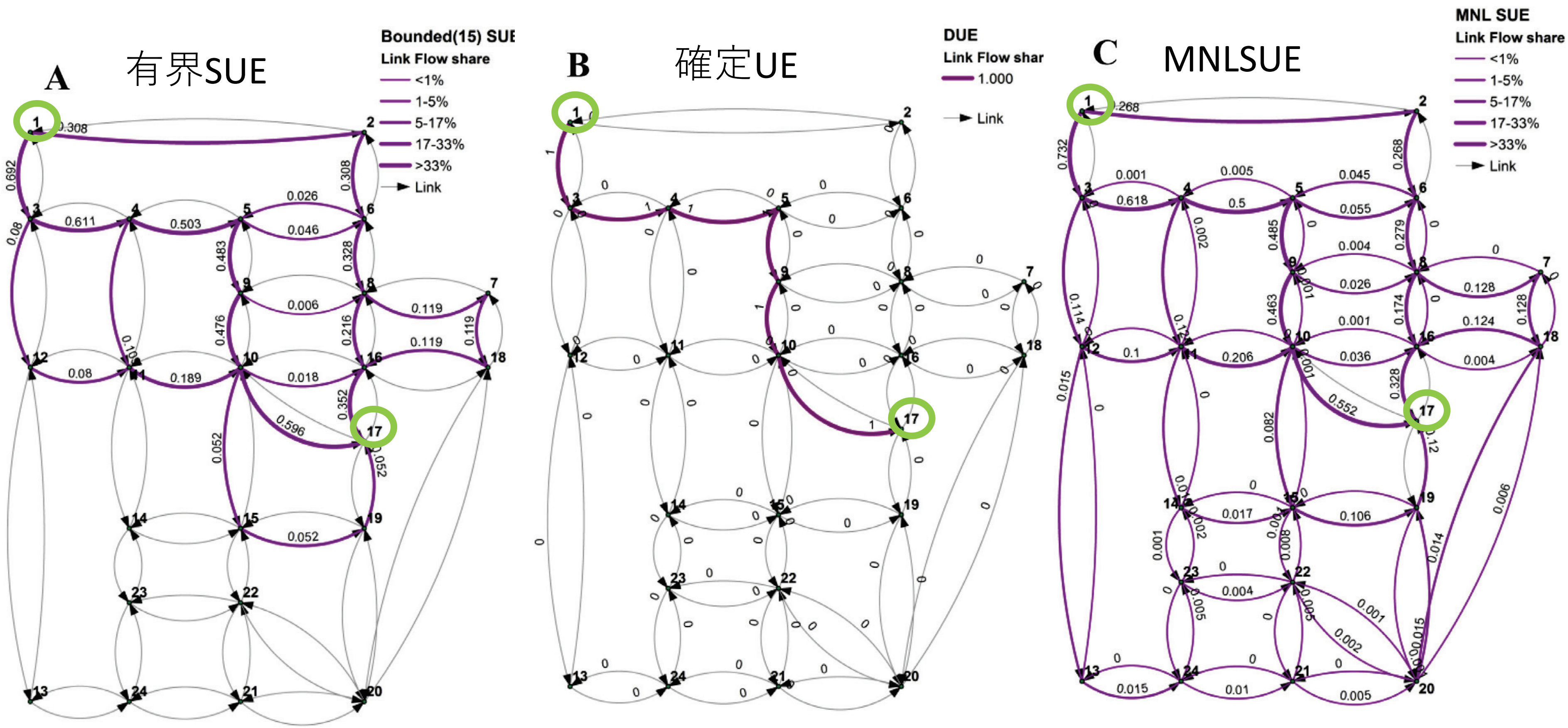


出典) Watling et al 2018

通常のSUEだと，いつでもflowは非ゼロ

提案モデルは，ゼロフローを表現しつつ，連続な交通量変化を表現

Sioux-Falls: OD ペア 1→17 経路利用率



利用経路は12個

確定均衡では均衡経路は一つ

非サイクル経路に非ゼロフローを配分

出典) Watling et al 2018

まとめ

有界性をもつSUEを提案：以下の特徴

1. 準最適経路を除外せず，非現実的な全経路を含むこともない
2. 点推定
3. 経路の均衡解と同時に経路選択肢集合も均衡させる
4. ランダム効用理論に基づく
5. 解の存在と唯一性が保証される

・確定UEとMNL-SUEの中間にあるモデル

・有界性のある選択モデルはClosed-form

著者が提示した今後の課題

- 閾値δの決め方
  - 閾値を変化させて現況再現性の高いものを選択
  - SP調査で閾値を推定
  - GPS調査などによる経路選択データから推定
- アルゴリズムの改良
  - Gradient projection, DSD
- 経路選択肢間の類似性，変動需要，限定合理性モデルとの統合，非対称な選好，状況に依存した時間価値 etcの考慮

円山が考える課題

- 交通量を未知変数とした等価最適化問題はおそらく構成できない (はず)
- 提案モデル BCM に対応したログサム: 直感的には以下の式になりそうだが違う

$$S_m = -\frac{1}{\theta} ln \sum_{t \epsilon R_m} (\exp\left(-\theta\left(c_{mt} - \min(c_{ms}) - \delta_m(c)\right)\right) - 1)_+$$

$$\frac{\partial S_m}{\partial c_{mt}} \neq \Pr(t, m)$$ になっている.

正しいログサムなら微分すると確率

- 期待最小費用の計算は数値積分が必要と思われる
- BCMをImplicit に計算するローディング法は開発できないか?

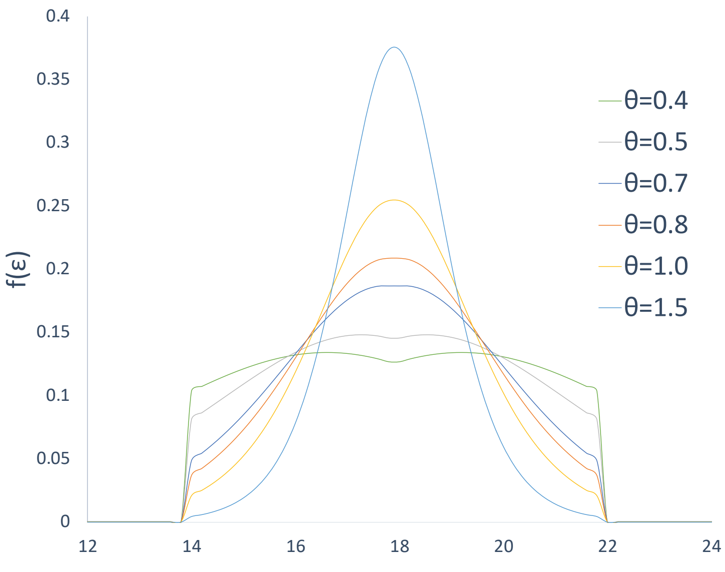
円山が考える応用例

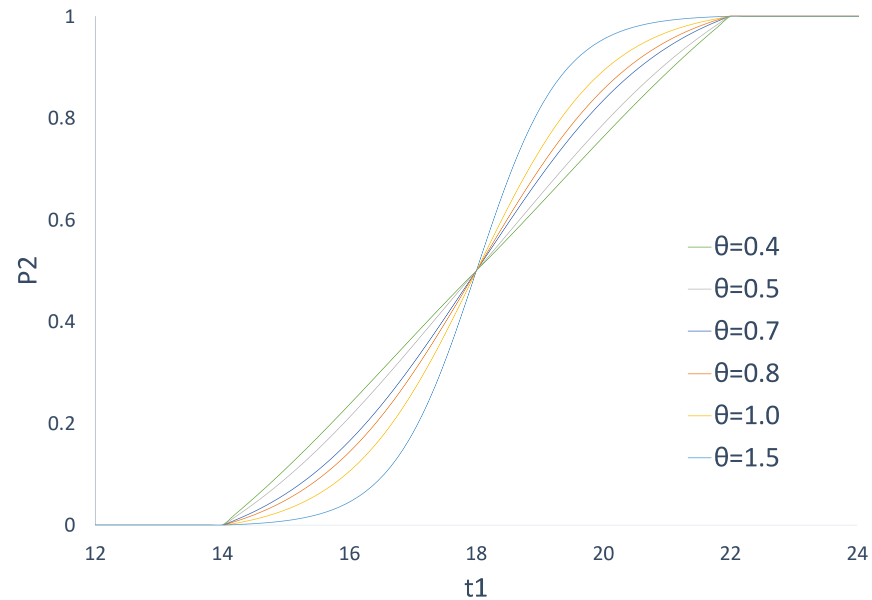
- 実務における高速選択率内生型UEモデルにおける高速利用ランプペア選択モデルへの応用
- ランプペアを列挙することは現実ネットワークでも可能なので，実務への応用が期待できる
- ただし，ログサムがclosed-formで記述できないので，上位に高速利用有無選択を考慮するNest型モデルへの展開に難あり

有界性のある誤差項εの計算例

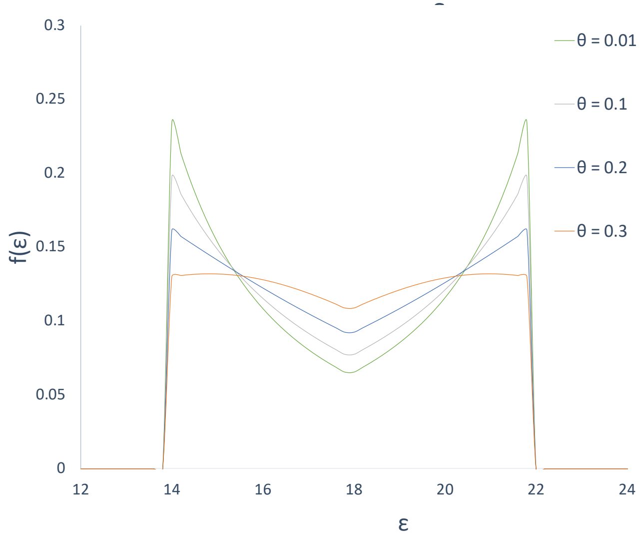
- 有界性のある誤差項εの式形は論文に陽に記述されてはいない

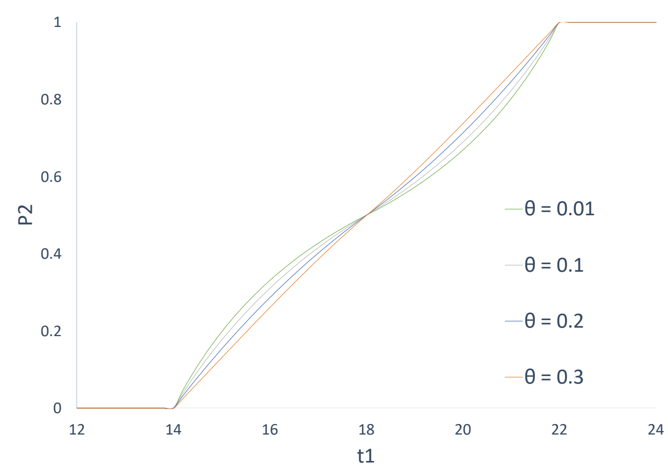
2項選択BCMの計算例 (t2=15, δ=4)　　ガンベル分布の切断分布？





微分





参考文献

松井寛, 藤田素弘, 2000. 高速道路を含む都市圏道路網における利用者均衡配分モデルの実用化に関する研究. 土木学会論文集 2000, 85–94.

渡邊健司, 中村毅一郎, 森田綽之, 井上紳一：首都高速道 路における利用者均衡配分モデルの適用検討, 第24回交 通工学研究発表会論文報告集, pp. 153-156, 2004.

井上紳一, 山口修一, 鈴木裕介, 円山琢也, 森田綽之, 2011. 高速道路上の経路選択を考慮した拡張型利用者均衡配分モデルの実証的研究. 土木学会論文集D3（土木計画学） 67, 67_I_779-67_I_786.

石橋照久, 北澤俊彦, 飛ケ谷明人, 2008. 阪神高速道路の将来交通量推計における利用者均衡配分 の導入. 阪神高速道路株式会社技報 24.

山本隆, 2016. 利用者均衡配分に基づく全国高速道路の交通量推計手法に関する研究. 土木学会論文集D3（土木計画学） 72, 153–172.

加藤浩徳, 小野田惠一, 家田仁, 2004. 都市鉄道の経路選択行動における最小知覚差の計測ならびにその交通需要に与える影響. 運輸政策研究 7, 2–9.

参考文献

- Krishnan, K.S. , 1977. Incorporating thresholds of indifference in probabilistic choice models. Manag. Sci. 23 (11), 1224–1233 .
- Leurent, F.M., 1997. Curbing the computational difficulty of the logit equilibrium assignment model. Transport. Res. Part B: Methodol. 31 (4), 315–326.
- Oyama, Y., Hato, E., 2019. Prism-based path set restriction for solving Markovian traffic assignment problem. Transp. Res. Part B Methodol. 122, 528–546.
- Rasmussen, T.K., Nielsen, O.A., Watling, D.P., Prato, C.G., 2017. The Restricted Stochastic User Equilibrium with Threshold model: Large-scale application and parameter testing. Eur. J. Transp. Infrastruct. Res. 17, 1–24.
- Rasmussen, T.K. , Watling, D.P. , Prato, C.G. , Nielsen, O.A. , 2015. Stochastic user equilibrium with equilibrated choice sets: part II –solving the restricted sue for the Logit Family. Transp. Res. Part B: Methodol. 77, 166–181 .
- Watling, D.P. , Rasmussen, T.K. , Prato, C.G. , Nielsen, O.A. , 2015. Stochastic user equilibrium with equilibrated choice sets: part i –model formulations under alternative distributions and restrictions. Transp. Res. Part B: Methodol. 77, 146–165 .