

行動モデル夏の学校2018：行動モデルの基礎と推定

行動分析における最適化問題

2018年9月15日(土)

東京大学 浦田淳司

最適化問題とは

$$\max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$$

$$\text{subject to } g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1, \dots, m$$

$$h_j(\mathbf{x}) = 0, j = 1, \dots, r$$

\mathbf{x} が連続量の場合：連続最適化

最急降下法, Newton法, ラグランジュ未定乗数法...

\mathbf{x} が離散量の場合：組合せ最適化

分枝限定法, 動的計画法, 最短経路探索, メタヒューリスティック

行動モデルでよくみる最適化問題の定式化

効用最大化 $\max_{d_i} U_i(d_i|a_i)$

目的関数：効用

変数：離散量 = 選択肢 d_i

本日の発表①：離散最適化の枠組みでのアクティビティモデル

尤度最大化 $\max_{\theta} L(\theta) = \max_{\theta} \sum_{\forall i} P(d_i|a_i; \theta)$

目的関数：尤度

変数：連続量 = パラメータ θ

本日の発表②：動的計画法における制約付きパラメータ推定

時間軸をどう捉えるか.

- 交通行動の選択で，その場面のみだけで考えるだろうか.
 - 手段：行きがあれば，帰りもある.
 - 買い物目的地：その後に寄る場所，その前にいる場所によって，影響する.
 - 出発時刻：次の活動だけでなく，それ以降にやることも含めて，決める.



交通計画, 交通サービス

- どの時間に，何人移動するかを知りたい.
 - 交通混雑の程度はその時間に何人移動するかで決まる.
 - 効率的なシェア車両の取り回し，相乗りのマッチングにも時間帯別の情報が必要.

時間軸をどう捉えるか.

①アクティビティモデル：

個人の一日のトリップチェーンの記述を目指す

- 個人ベースの行動をモデル化
- 主に選択モデルの積み重ねと時間軸上の効用変化・制約で構成
- 既存調査結果を用いた行動モデルのパラメータ推定と組み合わせる

時間軸上の要素のモデル表現

1) スケジューリング

- 活動目的ごとに時間を配分 (PCATS, MATSim)
- 活動目的の重要性を考慮 (AURORA, MIT)
- 時間制約を反映 (HAPP, multi-state supernetworks)

2) 滞在時間

- 活動継続により、効用が時間低減 (StarChild, AURORA, MATSim)
- 生存時間関数で表現 (TASHA)

②動的計画法：

将来の効用を見据えた上での意思決定行動

Household Activity Pattern Problem (Recker, 1995)

離散最適化の枠組みでのアクティビティモデル

Recker, W. W.: The Household Activity Pattern Problem: General Formulation and Solution, Transportation Research Part B, Vol. 29(1), pp. 61-77, 1995.

モデルのポイント：

- 活動時刻，出発帰宅の時間制約を設定
例. 始業時刻，店の開店時刻
- 世帯メンバー間で義務的活動の分担を表現
例. 買い物は世帯の誰かが行けばいい
- 世帯内での送迎行動を表現
— 車が1台しかない場合の行動パターンを記述
- 線形計画問題として求解
— 効用や混雑等の非線形な関数は回避

定式化

目的
関数

Minimize $Z =$ Household travel disutility

制約条件 $\sum_{u \in V} \sum_{w \in N} X_{uw}^v = 1, u \in P^+$

$$\sum_{w \in N} X_{uw}^v - \sum_{w \in N} X_{wu}^v = 0, u \in P, v \in V$$

$$\sum_{w \in P^+} X_{0w}^v = 1, v \in V$$

$$\sum_{u \in P^-} X_{u,2n+1}^v = 1, v \in V$$

$$\sum_{w \in N} X_{wu}^v - \sum_{w \in N} X_{w,n+u}^v = 0, u \in P^+, v \in V$$

$$T_u + s_u + t_{u,n+u} \leq T_{n+u}, u \in P^+$$

$$X_{uw}^v = 1 \Rightarrow T_u + s_u + t_{uw} \leq T_w, u, w \in P, v \in V$$

$$X_{0w}^v = 1 \Rightarrow T_0^v + t_{0w} \leq T_w, w \in P^+, v \in V$$

$$X_{u,2n+1}^v = 1 \Rightarrow T_u + s_u + t_{u,2n+1} \leq T_{2n+1}^v, u \in P^-, v \in V$$

$$a_u \leq T_u \leq b_u, u \in P$$

$$a_0 \leq T_0^v \leq b_0, v \in V$$

$$a_{2n+1} \leq T_{2n+1}^v \leq b_{2n+1}, v \in V$$

$$X_{uw}^v = 1 \Rightarrow Y_u + d_w = Y_w, u \in P, w \in P^+, v \in V$$

$$X_{uw}^v = 1 \Rightarrow Y_u - d_{w-n} = Y_w, u \in P, w \in P^-, v \in V$$

$$X_{0w}^v = 1 \Rightarrow Y_0 + d_w = Y_w, w \in P^+, v \in V$$

$$Y_0 = 0, 0 \leq Y_u \leq D, u \in P^+$$

$$X_{uw}^v = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}; u, w \in N, v \in V$$

$$\sum_{u \in V} \sum_{w \in N} \sum_{v \in N} c_{uw}^v X_{uw}^v \leq B_c$$

$$\sum_{u \in N} \sum_{w \in N} t_{uw} X_{uw}^v \leq B_t^v, v \in V$$

移動料金

旅行時間

外出時間

$$(1) \quad \text{Min } Z = \sum_{u \in V} \sum_{w \in N} \sum_{v \in N} c_{uw}^v X_{uw}^v + \sum_{u \in P^+} (T_{u+n} - T_u) + \sum_{v \in V} (T_{2n+1}^v - T_0^v).$$

(2) 外生付与したアクティビティの実施

(3) 往復しない

(4) 自宅発トリップは1回

(5) 帰宅トリップは1回

(6) 活動場所からはいずれ移動

(7)

(8) 出発時刻 + 滞在時間 + 移動時間は
(9) 次のトリップの開始時刻より前

(10)

(11)

(12) 自宅発, 活動開始, 帰宅時刻の
(13) 時間制約

(14)

(15)

(16) 一日活動数の上限制約のための
(17) 累積活動数

(17)

(18) 活動実施を示す X は二値変数

(19) 移動予算制約

(20) 移動時間制約

$$\sum_{w \in P^-} X_{0,w}^v = 0, v \in V$$

$$\sum_{u \in N} X_{u,0}^v = 0, v \in V$$

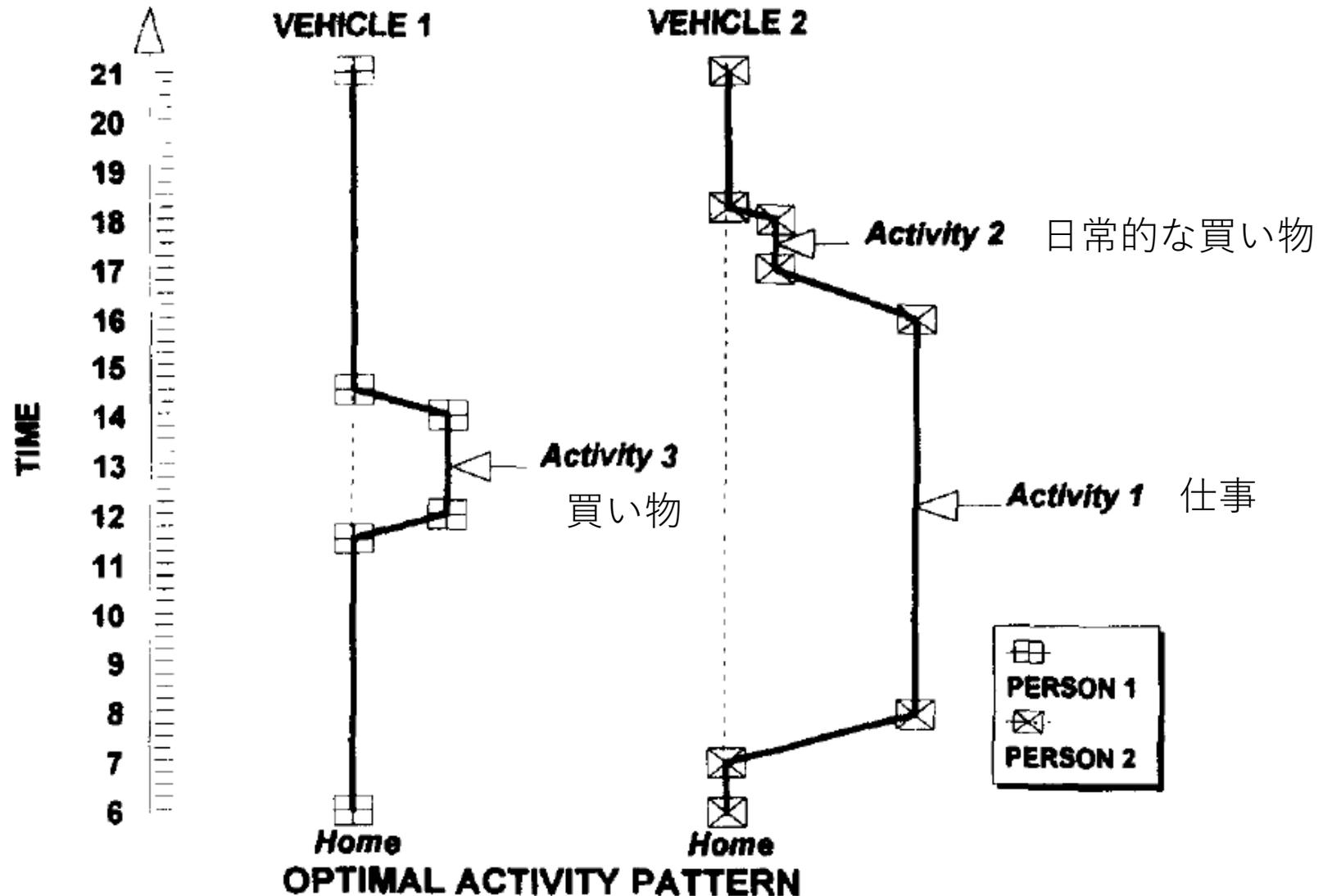
$$\sum_{u \in P^+} X_{u,2n+1}^v = 0, v \in V$$

$$\sum_{w \in P^-} X_{2n+1,w}^v = 0, v \in V.$$

存在
しえ
ない
活動

最適活動の算出 1

目的関数， 制約条件は線形で表現されており， LPソルバーで最適なアクティビティパターンを求解



世帯内での活動を共有・分担

個人がする活動と世帯で行えばよい活動を設定

$$\sum_{w \in \Omega_v^1} \sum_{u \in P} X_{uw}^v = 0, v \in V \quad (25) \quad \Omega_v^1 = \{1\}$$

$$\Omega_v^2 = \{2\}$$

自宅発, 帰宅をしない場合 (トリップ 0) も許容

$$\sum_{w \in P^+} X_{0w}^v \leq 1, v \in V \quad (4')$$

$$\sum_{u \in P^-} X_{u,2n+1}^v \leq 1, v \in V \quad (5')$$

外出人数コストを目的関数に追加

$$\sum_{v \in V} \sum_{w \in P^+} KX_{0w}^v, \quad (1g)$$

世帯活動数を制約条件として設定

個人の活動 X を世帯構成員の活動 H^α として集計して、前述の制約条件を入替え

$$\sum_{\alpha \in \eta} \sum_{w \in N} H_{uw}^\alpha = 1, u \in P^+ \quad (26)$$

$$\sum_{w \in N} H_{uw}^\alpha - \sum_{w \in N} H_{wu}^\alpha = 0, u \in P, \alpha \in \eta \quad (27)$$

$$\sum_{w \in P^+} H_{0w}^\alpha \leq 1, \alpha \in \eta \quad (28)$$

$$\sum_{u \in P^-} H_{u,2n+1}^\alpha \leq 1, \alpha \in \eta \quad (29)$$

$$\sum_{w \in N} H_{wu}^\alpha - \sum_{w \in N} H_{w,n+u}^\alpha = 0, u \in P^+, \alpha \in \eta \quad (30)$$

$$T_u + s_u + t_{uw} - T_w \leq (1 - H_{uw}^\alpha) M, u, w \in P, \alpha \in \eta \quad (31)$$

$$\bar{T}_0^\alpha + t_{0w} - T_w \leq (1 - H_{0w}^\alpha) M, w \in P^+, \alpha \in \eta \quad (32)$$

$$T_u + s_u + t_{u,2n+1} - \bar{T}_{2n+1}^\alpha \leq (1 - H_{u,2n+1}^\alpha) M, u \in P^-, \alpha \in \eta \quad (33)$$

$$\bar{T}_0^\alpha \geq \bar{a}_0^\alpha, \alpha \in \eta \quad (34)$$

$$\bar{T}_{2n+1}^\alpha \leq \bar{b}_{2n+1}^\alpha, \alpha \in \eta \quad (35)$$

$$\sum_{w \in N} H_{0,w}^\alpha = 0, \alpha \in \eta \quad (36)$$

$$\sum_{u \in N} H_{u,0}^\alpha = 0, \alpha \in \eta \quad (37)$$

$$\sum_{u \in P^+} H_{u,2n+1}^\alpha = 0, \alpha \in \eta \quad (38)$$

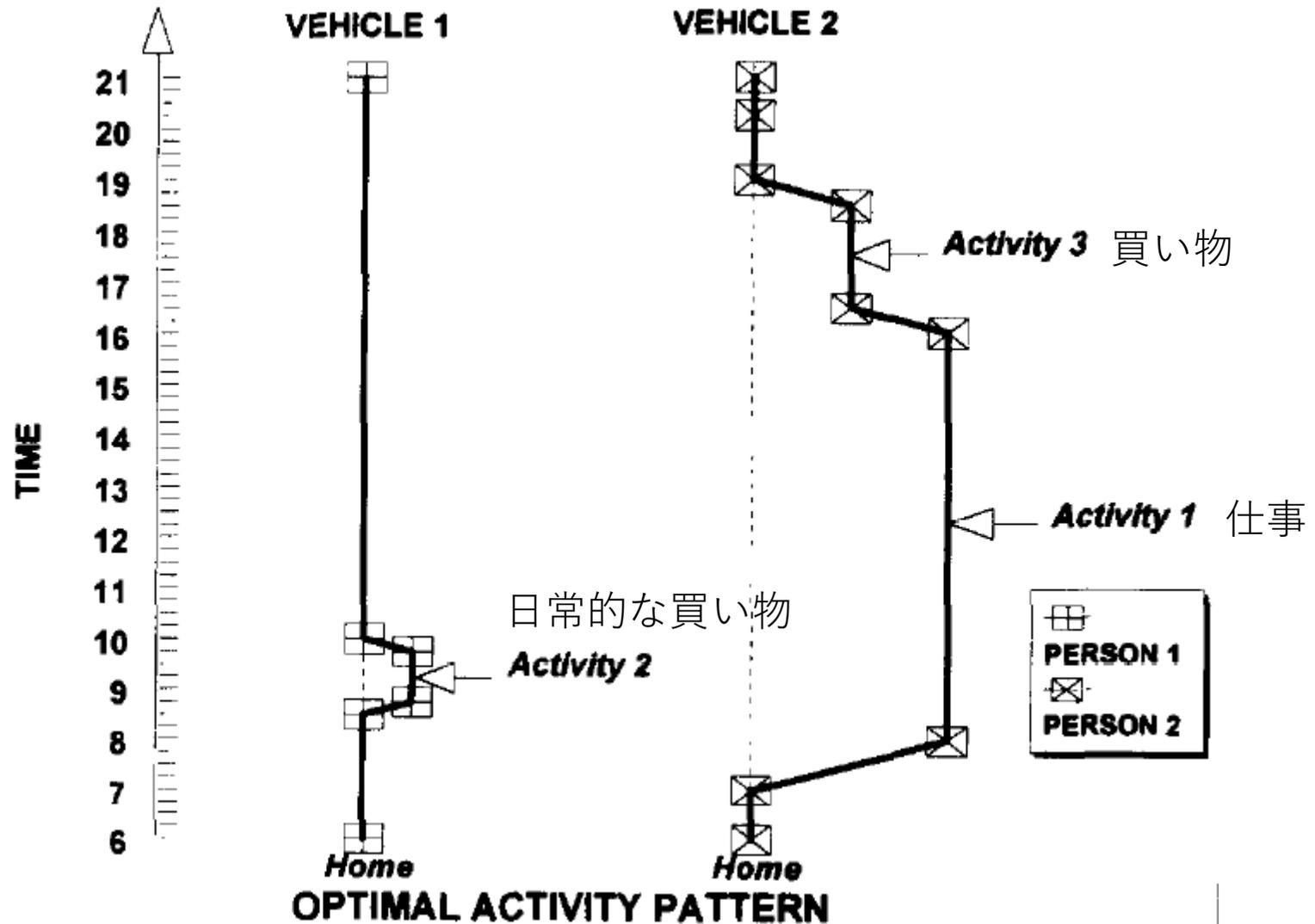
$$\sum_{w \in \Omega_H^\alpha} \sum_{u \in P} H_{uw}^\alpha = 0, \alpha \in \eta \quad (39)$$

$$\sum_{\alpha \in \eta} H_{uw}^\alpha = \sum_{v \in V} X_{uv}^v, u \in P^+, w \in P \quad (40a)$$

$$\sum_{\alpha \in \eta} H_{0w}^\alpha = \sum_{v \in V} X_{0w}^v, w \in P, \quad (40b)$$

最適活動の算出 2

活動 2 と活動 3 を世帯内で行えればよく、実施者が入れ替わり



最適活動の算出 3

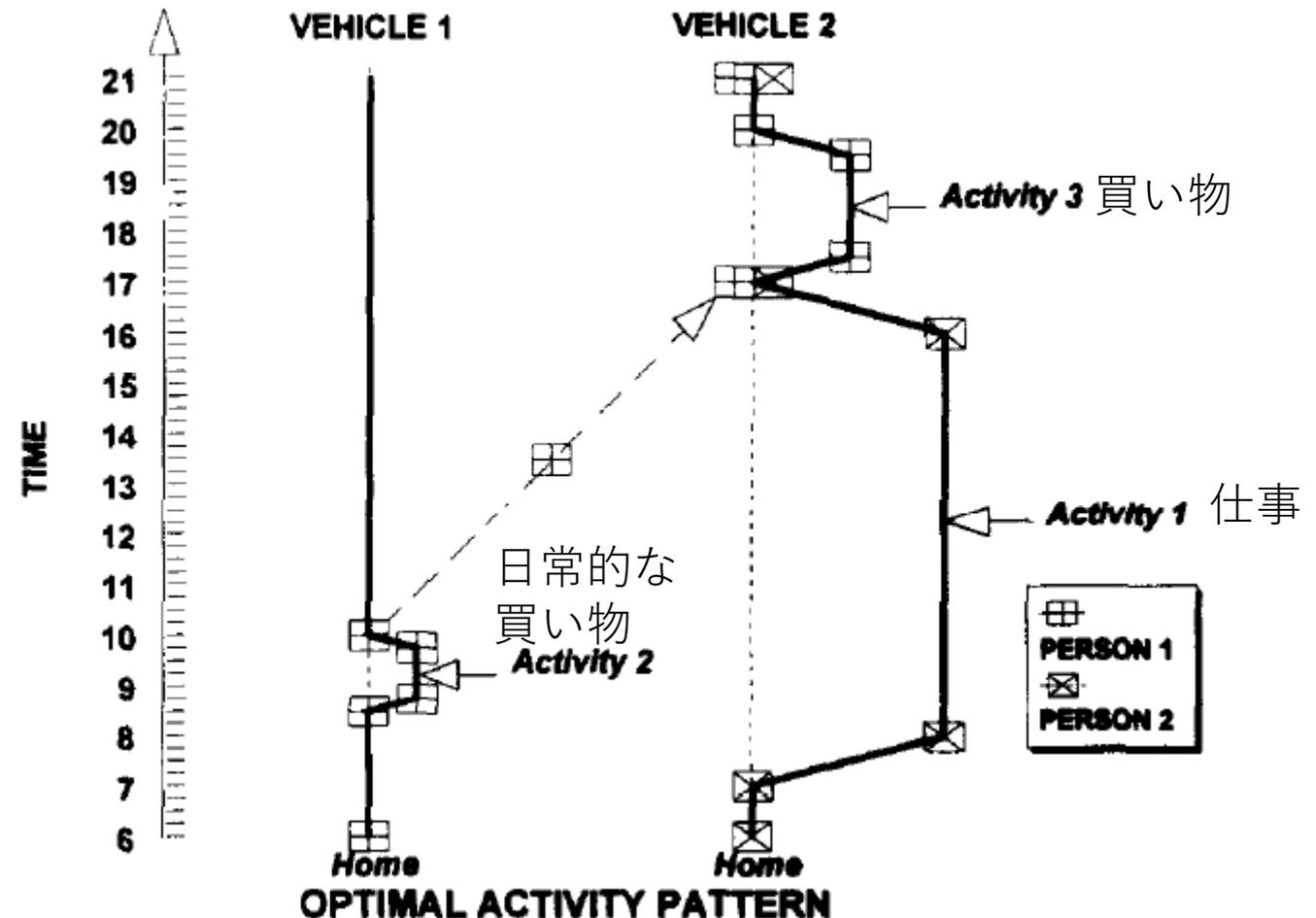
世帯共同で行う活動を設定し、ピックアップ交通も生成

$$\Omega_1^V = \{1,3\}$$

$$\Omega_2^V = \{2\}$$

$$\Omega_1^H = \{1\}$$

$$\Omega_2^H = \{2,3\},$$



①アクティビティモデルのおわりに：

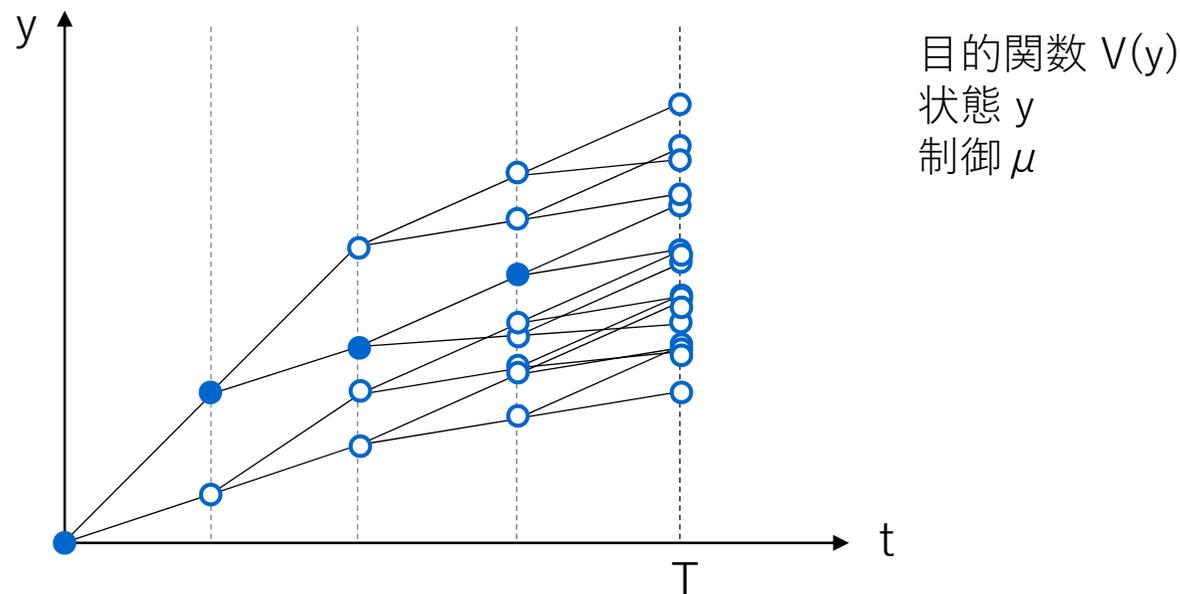
行う活動やその活動目的地，交通手段は，ここでは外生的に付与しており，これらの選択過程を，離散選択モデルを用いて与えることも可能。

動的計画法(動的離散選択モデル)

Bellman, R.E.(1953)

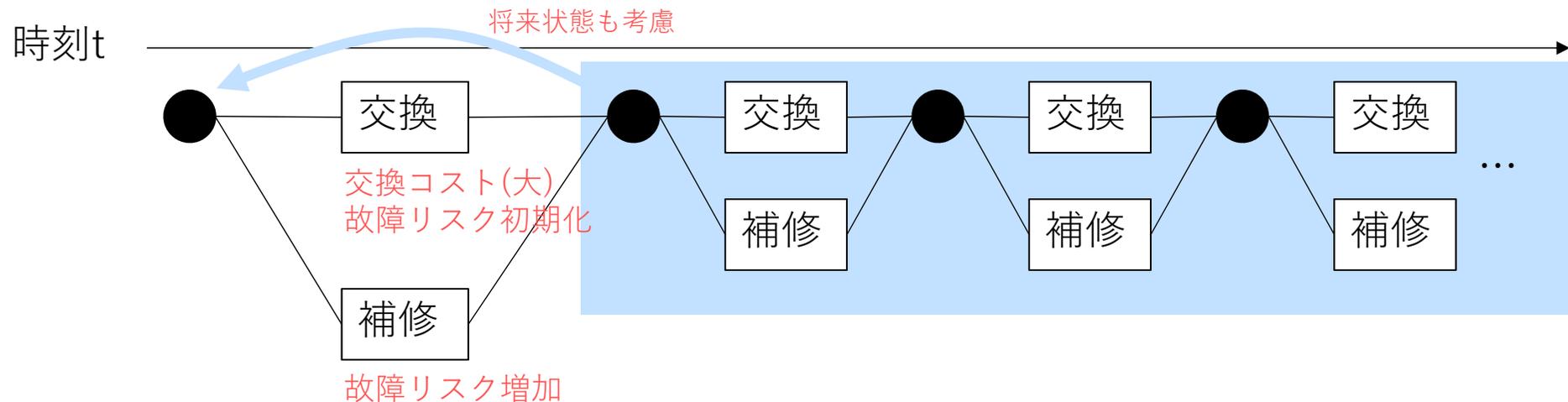
- 多段階意思決定モデル
- 再帰的計算過程が必要
 - 将来状態の期待価値を考慮した意思決定
 - 将来の状態への確率的推移も考慮
 - 終端時刻 T が無遠として計算する場合もあり

$$\max_{\mu_t} V(y(t)) = u_{\mu_t}(y(t)) + \beta \int V(y(t+1)) p(dy(t+1) | y(t), \mu_t)$$



動的離散選択モデル(概要)

Rust, J.(1987) のバスエンジン補修/交換の問題を例に説明



ある期の効用関数 u

$$u(x, d, \varepsilon; \theta_1, RC) = v(x, d; \theta_1, RC) + \varepsilon(d)$$

$$v(x, d; \theta_1, RC) = \begin{cases} -c(x; \theta_1), & \text{if } d = 0 \\ -RC - c(0; \theta_1), & \text{if } d = 1 \end{cases}$$

$d=1$: 交換, $d=0$: 補修のみ

x : バスエンジンの状態

ε : 非観測項

c : 補修コスト

θ_1 : 補修パラメータ

RC : 交換コスト

θ_2, θ_3 : 状態推移パラメータ

状態 x の推移確率 (一次マルコフ性を仮定)

$$p(x_{t+1}, \varepsilon_{t+1} | x_t, \varepsilon_t, d_t; \theta_2, \theta_3)$$

動的離散選択モデル(定式化)

将来の価値関数は、時間割引を考慮した効用の最大化となる

$$V(x_t, \varepsilon_t) = \max_{\{d_t, d_{t+1}, d_{t+2}, \dots\}} \mathbb{E} \left[\sum_{\tau=t}^{\infty} \beta^{\tau-t} u(x_\tau, d_\tau, \varepsilon_\tau; \theta_1, \text{RC}) \right] \quad (6)$$

時間割引率 $\beta \in (0,1)$

最適意思決定は無限期間先までを考慮しており、期によらず一定である

$$V(x, \varepsilon) = \max_d \left\{ \begin{array}{l} \text{今期の効用} \\ \nu(x, d; \theta_1, \text{RC}) + \varepsilon(d) \\ + \beta \int_{x'} \int_{\varepsilon'} \underbrace{V(x', \varepsilon')}_{\text{次期の期待価値関数}} \underbrace{p(x', \varepsilon' | x, \varepsilon, d; \theta_2, \theta_3)}_{\text{今期の選択後の次期状態の推移確率}} dx' d\varepsilon' \end{array} \right\} \quad (7)$$

次期状態 (x', ε')

- 今期と次期の状態により、価値関数を定義
- 次期の期待価値関数の中に、次々期以降の効用は入っている

期待価値関数・選択確率

仮定：推移確率の条件つき独立性(CI)

$$p(x', \varepsilon' | x, \varepsilon, d; \theta_2, \theta_3) = p_2(\varepsilon' | x'; \theta_2) p_3(x' | x, d; \theta_3)$$

CIの仮定を用いて、期待価値関数を次で定義する.

$$EV(x) = \int_{\varepsilon} V(x, \varepsilon) p_2(\varepsilon | x; \theta_2) d\varepsilon$$

選択肢の期待価値関数 ((7)式から ε を除いて)

$$EV(x, d) = v(x, d; \theta_1, RC) + \varepsilon(d) + \beta \int_{x'} EV(x') p_3(x' | x, d; \theta_3) dx'$$

これを期待価値関数の定義式に戻す

$$EV(x) = \int_{\varepsilon'} \max_d \{EV(x, d)\} p_2(\varepsilon' | x; \theta_2) d\varepsilon' \quad (8)$$

ε を極値分布とし、ロジット型の条件付き選択確率を導出

($\theta = (RC, \theta_1, \theta_3)$ がパラメータ)

$$P(d|x; \theta) = \frac{\exp[v(x, d; \theta_1, RC) + \beta EV(x, d)]}{\sum_{d' \in \{0,1\}} \exp[v(x, d'; \theta_1, RC) + \beta EV(x, d')]} \quad (9)$$

最尤法によるパラメータ推定

バス会社*i*の尤度 $\ell_i(X^i; \theta) = \prod_{t=2}^T P(d_t^i | x_t^i; \theta) p_3(x_t^i | x_{t-1}^i, d_{t-1}^i; \theta_3)$

M社の全体尤度 $\ell(\theta) = \prod_{i=1}^M \ell_i(X^i; \theta) = \prod_{i=1}^M \prod_{t=2}^T P(d_t^i | x_t^i; \theta) p_3(x_t^i | x_{t-1}^i, d_{t-1}^i; \theta_3)$ (14)

対数尤度 $L(\theta) = \log \ell(\theta)$

$$= \sum_{i=1}^M \sum_{t=2}^T \log[P(d_t^i | x_t^i; \theta)] + \sum_{i=1}^M \sum_{t=2}^T \log[p_3(x_t^i | x_{t-1}^i, d_{t-1}^i; \theta_3)] \quad (10)$$

パラメータ推定

対数尤度最大化により, $\theta = (RC, \theta_1, \theta_3)$ を求める

$$\max_{\theta} \frac{1}{M} L(\theta) \quad (11)$$

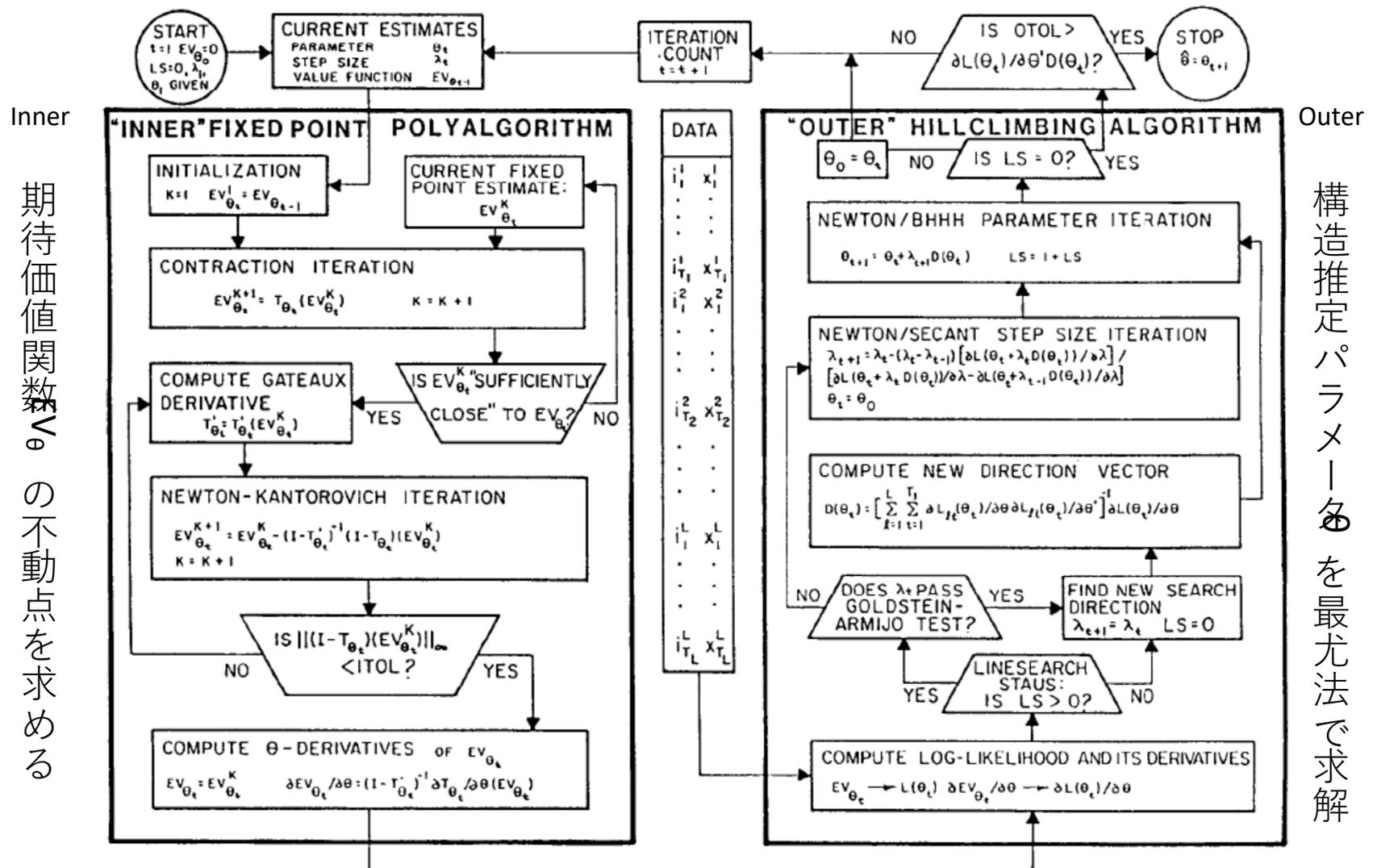
ただし, $P(d|x; \theta) = \frac{\exp[\nu(x, d; \theta_1, RC) + \beta EV(x, d)]}{\sum_{d' \in \Omega} \exp[\nu(x, d'; \theta_1, RC) + \beta EV(x, d')]} \quad (9)$ において,

$$EV(x, d) = \nu(x, d; \theta_1, RC) + \varepsilon(d) + \beta \int_{x'} EV(x') p_3(x' | x, d; \theta_3) dx' \quad (7)$$
 が成立する.

推定方法 1 : NFXP法

Rust, J.(1988) Statistical Models of Discrete Choice Processes, Transportation Research Part B, Vol. 22(2), pp. 125-158.

NESTED FIXED POINT MAXIMUM LIKELIHOOD ALGORITHM



Inner
期待値関数の不動点を求める

Outer
構造推定パラメータを最尤法で求解

NFXP法： Fixed-Point Solution

(7)式と極値分布により， Fixed-Point equationは次となる

$$\begin{aligned} EV(x, d) = & \int_{x'=0}^{\infty} \log \left\{ \sum_{d' \in \{0,1\}} \exp[\nu(x', d'; \theta_1, RC) + \beta EV(x', d')] \right\} \\ & \times p_3(dx'|x, d, \theta_3). \end{aligned} \quad (12)$$

今期の状態 x を K 分割， 次期の状態 x' を J 分割して， 表記.

$$p_3(x'|x_k, d, \theta_3) = \begin{cases} \Pr\{x' = \hat{x}_{k+j} | \theta_3\}, & \text{if } d = 0 \\ \Pr\{x' = \hat{x}_{1+j} | \theta_3\}, & \text{if } d = 1 \end{cases} \quad (13)$$

(11)式に代入

$$\begin{aligned} EV(\hat{x}_k, d) = & \sum_{j=0}^J \log \left\{ \sum_{d' \in \{0,1\}} \exp[\nu(x', d'; \theta_1, RC) + \beta EV(x', d')] \right\} \\ & \times p_3(x' | \hat{x}_k, d, \theta_3). \end{aligned} \quad (14)$$

※ この式が定義されている〔 $EV = [EV(\hat{x}_1, 0), \dots, EV(\hat{x}_K, 0), EV(\hat{x}_1, 1), \dots, EV(\hat{x}_K, 1)]$ 〕

式を簡略化

$$EV = T(EV, \theta) \quad (15)$$

NFXP法 : inner algorithm

θ 固定の下で, 不動点 $EV_\theta = T_\theta(EV_\theta)$ (15)' を求める
(15)は収縮写像であり, 次が成立する.

$$\|T_\theta(W) - T_\theta(V)\| \leq \beta \|W - V\| \quad (16)$$

この性質から, EV_k を次で更新する.

$$EV_{k+1} = T_\theta(EV_k) \quad (17)$$

つまり, 下記となる.

$$\begin{aligned} |T_\theta(EV_{k+1}) - T_\theta(EV_k)| &\leq \beta |EV_{k+1} - EV_k| \\ \Leftrightarrow |EV_{k+2} - EV_{k+1}| &\leq \beta |EV_{k+1} - EV_k| \end{aligned} \quad (18)$$

β の速度で EV_θ に近づく.

ただし, EV_θ を得るためには, $k=\infty$ が必要であり, 不動点近傍では収縮が遅くなる.
不動点近傍では, 次式を用いる(Newton-Kantorovich法).

$$0 = (I - T_\theta)EV_{k+1} \sim (I - T_\theta)EV_k + (I - T'_\theta)(EV_{k+1} - EV_k) \quad (19)$$

$$EV_{k+1} = EV_k - (I - T'_\theta)^{-1}(I - T_\theta)EV_k \quad (20)$$

推定法2：NPL(擬似最尤推定法)

Step1: EV_0 をランダムに与える

Step2: EV_k を(9)式の右辺に代入し、尤度最大化するパラメータ θ_k を求める

$$P(d|x; \theta) = \frac{\exp[\nu(x, d; \theta_1, RC) + \beta EV(x, d)]}{\sum_{d' \in \{0,1\}} \exp[\nu(x, d'; \theta_1, RC) + \beta EV(x, d')]} \quad (9)$$

Step3: EV_k と θ_k を用いて、(14)式より EV_{k+1} を求める

$$EV(\hat{x}_k, d) = \sum_{j=0}^J \log \left\{ \sum_{d' \in \{0,1\}} \exp[\nu(x', d'; \theta_1, RC) + \beta EV(x', d')] \right\} \quad (14)$$

$$\times p_3(x'|\hat{x}_k, d, \theta_3).$$

収束判定: $|EV_{k+1} - EV_k|$ と $|\theta_{k+1} - \theta_k|$ が十分小さければ収束
収束していなければ、step2に戻る

無限回の繰り返し計算によって不動点を得ることができ、NFXPと漸近等価

NPL(擬似最尤推定法)とNFXPの比較

Aguirregabiria and Mira(2002)

TABLE I
MONTE CARLO EXPERIMENT

| Experiment design | |
|------------------------|---|
| Model: | Bus engine replacement model (Rust) |
| Parameters: | $\theta_0 = 10.47; \theta_1 = 0.58; \beta = 0.9999$ |
| State space: | 201 cells |
| Number observations: | 1000 |
| Number replications: | 1000 |
| Initial probabilities: | Kernel estimates |

| Monte Carlo distribution of MLE (In parenthesis, percentages over the true value of the parameter) | | |
|---|--------------|--------------|
| | θ_0 | θ_1 |
| Mean Absolute Error: | 2.08 (19.9%) | 0.17 (29.0%) |
| Median Absolute Error: | 1.56 (14.9%) | 0.13 (22.7%) |
| Std. dev. estimator: | 2.24 (21.4%) | 0.16 (26.9%) |
| Policy iterations (avg.): | 6.2 | |

| Monte Carlo distribution of PI estimators (relative to MLE) (All entries are 100* (K-PI statistic-MLE statistic)/MLE statistic) | | | | |
|--|------------|------------|------|-------|
| Parameter | Statistics | Estimators | | |
| | | 1-PI | 2-PI | 3-PI |
| θ_0 | Mean AE | 4.7% | 1.6% | 0.3% |
| | Median AE | 14.2% | 0.2% | -0.3% |
| | Std. dev. | 6.8% | 1.2% | 0.3% |
| θ_1 | Mean AE | 18.7% | 1.5% | 0.2% |
| | Median AE | 25.1% | 0.7% | 0.6% |
| | Std. dev. | 11.0% | 1.3% | 0.2% |

パラメータが4つの場合は、
計算速度はNPLは9倍速い

Nested Pseudo Likelihood Algorithm (NPL):

Let $\hat{\theta}_f$ be an estimate of θ_f . Start with an initial guess for the conditional choice probabilities, $P^0 \in [0, 1]^{MJ}$. At iteration $K \geq 1$, apply the following steps:

Step 1: Obtain a new pseudo-likelihood estimate of α , α^K , as

$$(11) \quad \alpha^K = \arg \max_{\alpha \in \Theta} \sum_{i=1}^n \ln \Psi_{(\alpha, \hat{\theta}_f)}(P^{K-1})(a_i | x_i)$$

where $\Psi_{\theta}(P)(a|x)$ is the element (a, x) of $\Psi_{\theta}(P)$.

Step 2: Update P using the 'arg max' from step 2, i.e.

$$(12) \quad P^K = \Psi_{(\alpha^K, \hat{\theta}_f)}(P^{K-1}).$$

Iterate in K until convergence in P (and α) is reached.

推定法3：MPEC型アルゴリズム

MPEC (Mathematical Programming with Equilibrium Constraints)を用いた求解

(11)式, (15)式を等価な均衡制約条件付き最適化問題と定式化.

(等価であることの証明は定理1より)

$$\max_{(\theta, EV)} \frac{1}{M} \mathcal{L}(\theta, EV) \quad (11)$$

$$\text{subject to } EV = T(EV, \theta) \quad (15)$$

NFXPが不動点の算出プロセスを毎回解いているのに比べて,
Bellmanの等式(15)を一度評価すればよいので, 計算負荷は小さい.

計算精度の比較

| β | Implementation | True values: | Parameters | | | | | MSE | |
|---------|----------------|--------------|------------|---------------|---------------|---------------|---------------|----------|---------------|
| | | | RC | θ_{11} | θ_{30} | θ_{31} | θ_{32} | | θ_{33} |
| 0.975 | MPEC/AMPL | Mean | 12.212 | 2.607 | 0.0943 | 0.4473 | 0.4454 | 0.0127 | 3.111 |
| | | Std. dev. | (1.613) | (0.500) | (0.0036) | (0.0057) | (0.0060) | (0.0015) | - |
| | MPEC/MATLAB | Mean | 12.212 | 2.607 | 0.0943 | 0.4473 | 0.4454 | 0.0127 | 3.111 |
| | | Std. dev. | (1.613) | (0.500) | (0.0036) | (0.0057) | (0.0060) | (0.0015) | - |
| | NFXP/MATLAB | Mean | 12.213 | 2.606 | 0.0943 | 0.4473 | 0.4445 | 0.0127 | 3.123 |
| | | Std. dev. | (1.617) | (0.500) | (0.0036) | (0.0057) | (0.0060) | (0.0015) | - |
| 0.980 | MPEC/AMPL | Mean | 12.134 | 2.578 | 0.0943 | 0.4473 | 0.4455 | 0.0127 | 2.857 |
| | | Std. dev. | (1.570) | (0.458) | (0.0037) | (0.0057) | (0.0060) | (0.0015) | - |
| | MPEC/MATLAB | Mean | 12.134 | 2.578 | 0.0943 | 0.4473 | 0.4455 | 0.0127 | 2.857 |
| | | Std. dev. | (1.570) | (0.458) | (0.0037) | (0.0057) | (0.0060) | (0.0015) | - |
| | NFXP/MATLAB | Mean | 12.139 | 2.579 | 0.0943 | 0.4473 | 0.4455 | 0.0127 | 2.866 |
| | | Std. dev. | (1.571) | (0.459) | (0.0037) | (0.0057) | (0.0060) | (0.0015) | - |
| 0.985 | MPEC/AMPL | Mean | 12.013 | 2.541 | 0.0943 | 0.4473 | 0.4455 | 0.0127 | 2.140 |
| | | Std. dev. | (1.371) | (0.413) | (0.0037) | (0.0057) | (0.0060) | (0.0015) | - |
| | MPEC/MATLAB | Mean | 12.013 | 2.541 | 0.0943 | 0.4473 | 0.4455 | 0.0127 | 2.140 |
| | | Std. dev. | (1.371) | (0.413) | (0.0037) | (0.0057) | (0.0060) | (0.0015) | - |
| | NFXP/MATLAB | Mean | 12.021 | 2.544 | 0.0943 | 0.4473 | 0.4455 | 0.0127 | 2.136 |
| | | Std. dev. | (1.368) | (0.411) | (0.0037) | (0.0057) | (0.0060) | (0.0015) | - |
| 0.990 | MPEC/AMPL | Mean | 11.830 | 2.486 | 0.0943 | 0.4473 | 0.4455 | 0.0127 | 1.880 |
| | | Std. dev. | (1.305) | (0.407) | (0.0036) | (0.0057) | (0.0060) | (0.0015) | - |
| | MPEC/MATLAB | Mean | 11.830 | 2.486 | 0.0943 | 0.4473 | 0.4455 | 0.0127 | 1.880 |
| | | Std. dev. | (1.305) | (0.407) | (0.0036) | (0.0057) | (0.0060) | (0.0015) | - |
| | NFXP/MATLAB | Mean | 11.830 | 2.486 | 0.0943 | 0.4473 | 0.4455 | 0.0127 | 1.880 |
| | | Std. dev. | (1.305) | (0.407) | (0.0036) | (0.0057) | (0.0060) | (0.0015) | - |
| 0.995 | MPEC/AMPL | Mean | 11.819 | 2.492 | 0.0942 | 0.4473 | 0.4455 | 0.0127 | 1.892 |
| | | Std. dev. | (1.308) | (0.414) | (0.0036) | (0.0057) | (0.0060) | (0.0015) | - |
| | MPEC/MATLAB | Mean | 11.819 | 2.492 | 0.0942 | 0.4473 | 0.4455 | 0.0127 | 1.892 |
| | | Std. dev. | (1.308) | (0.414) | (0.0036) | (0.0057) | (0.0060) | (0.0015) | - |
| | NFXP/MATLAB | Mean | 11.819 | 2.492 | 0.0942 | 0.4473 | 0.4455 | 0.0127 | 1.892 |
| | | Std. dev. | (1.308) | (0.414) | (0.0036) | (0.0057) | (0.0060) | (0.0015) | - |

^aFor each β , there are 250 replications. Standard deviations are reported in parentheses. MSE is calculated by summing over all structural parameters.

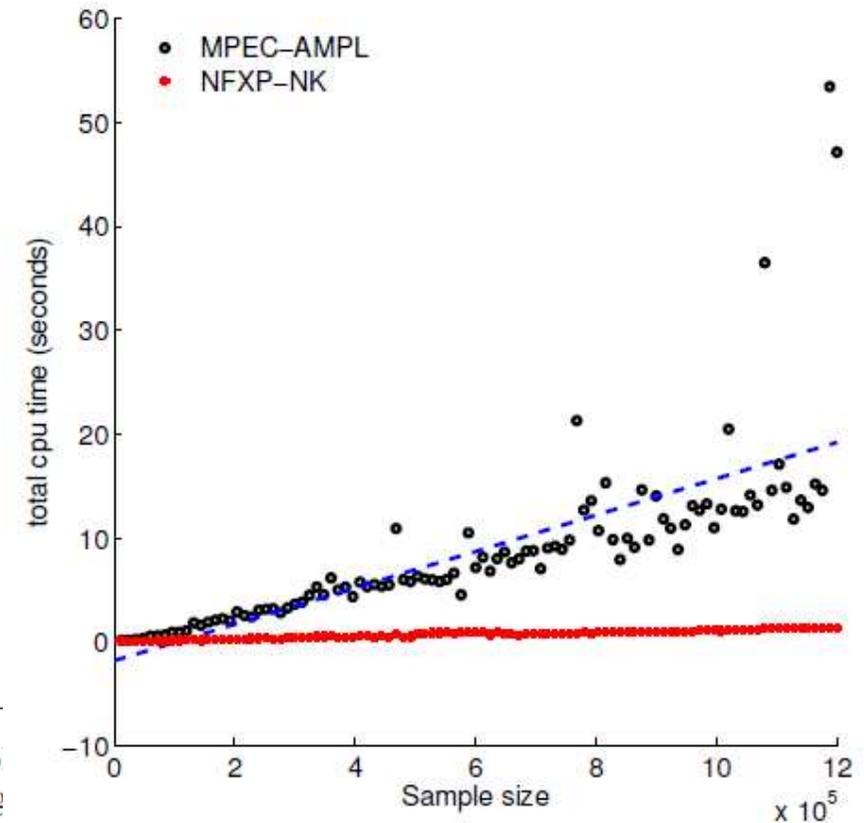
- 250回計算の平均をとり，パラメータの平均，分散を比較
- β が大きい場合は，NFXPと同じ結果であるなど，両者の精度の差はほぼない

計算時間の比較

- MPECのほうがNFXPよりも計算時間は短い(AMPLで180倍以上, MATLABで3倍以上)

| β | Implementation | Runs Converged (out of 1250 runs) | CPU Time (in sec.) | # of Major Iter. | # of Func. Eval. | # of Contraction Mapping Iter. |
|---------|----------------|--------------------------------------|-----------------------|---------------------|---------------------|-----------------------------------|
| 0.975 | MPEC/AMPL | 1240 | 0.13 | 12.8 | 17.6 | – |
| | MPEC/MATLAB | 1247 | 7.90 | | | |
| | NFXP | 998 | 24.60 | | | |
| 0.980 | MPEC/AMPL | 1236 | 0.15 | | | |
| | MPEC/MATLAB | 1241 | 8.10 | | | |
| | NFXP | 1000 | 27.90 | | | |
| 0.985 | MPEC/AMPL | 1235 | 0.13 | | | |
| | MPEC/MATLAB | 1250 | 7.50 | | | |
| | NFXP | 952 | 43.20 | | | |
| 0.990 | MPEC/AMPL | 1161 | 0.19 | | | |
| | MPEC/MATLAB | 1248 | 7.50 | | | |
| | NFXP | 935 | 70.10 | | | |
| 0.995 | MPEC/AMPL | 965 | 0.14 | | | |
| | MPEC/MATLAB | 1246 | 7.90 | | | |
| | NFXP | 950 | 111.60 | | | |

^aFor each β , we use five starting points for each of the 250 rep number of function evaluations and number of contraction mapping



Iskhakov, F. et al. (2015) Rustのアルゴリズムの方が速い.

まとめ

- 式レベルで見れば，行動モデルの求解過程でやっていることは最適化問題.
- Recker(1995)では，トリップチェーンの最適化を線形計画問題として記述し，最適アクティビティ経路を獲得
- 動的計画法では，将来効用の計算方法は複数存在.
制約付き最適化問題としてもアプローチ.
- 時間軸上の表現を入れ込むことで，考えられる要素が広がる. (のでチャレンジしてみてください)

参考文献

- 藤井聡, 北村隆一, 瀬戸公平: 生活行動に伴う個人の効用を考慮した生活行動-交通行動モデルシステムの開発, 土木学会論文集, No. 562/IV-35, pp.83-96, 1997.
- Arentze, T. A. Timmermans, H. J.: A learning-based transportation oriented simulation system, *Transportation Research Part B*, Vol. 38(7), 613-633, 2004.
- Bowman, J. L., Ben-Akiva, M. E.: Activity-based disaggregate travel demand model system with activity schedules, *Transportation Research Part A*, Vol. 35(1), 1-28, 2000.
- Recker, W. W., McNally, M. G., Root, G. S.: A model of complex travel behavior: Part I -- Theoretical development, *Transportation Research Part A*, Vol. 20(4), pp. 307-318, 1986.
- MATSIM: <http://www.matsim.org/> (2017年4月27日閲覧)
- Bhat, C. R., Goulias, K. G., Pendyala, R. M., Paleti, R., Sidharthan, R., Schmitt, L., Hu, H. H.: A household-level activity pattern generation model with an application for Southern California, *Transportation*, Vol. 40(5), 1063-1086, 2013.
- Miller, E., Roorda, M.: Prototype model of household activity-travel scheduling, *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*, No. 1831, 114-121, 2003.
- Recker, W. W.: The Household Activity Pattern Problem: General Formulation and Solution, *Transportation Research Part B*, Vol. 29(1), pp. 61-77, 1995.
- Rust, J., Optimal Replacement of GMC Bus Engines: An Empirical Model of Harold Zurcher, *Econometrica*, Vol.55, pp.999-1033, 1987.
- Aguirregabiria, V., Mira, P.: Swapping the nested xed point algorithm: A class of estimators for discrete Markov decision models, *Econometrica*, Vol. 70(4), pp. 1519-1543, 2002.
- Su, C.J., Judd, K.L.: Constrained optimization approaches to estimation of structural models, *Econometrica*, Vol. 80, pp. 2213-2230, 2012.
- Iskhakov, F., Lee, J., Rust, J., Schjerning, B., Seo, K.: Constrained optimization approaches to estimation of structural models: Comment, Discussion Papers, Department of Economics University of Copenhagen, 2015.1.