行動モデル夏の学校2018

行動モデルの最新理論の動向

行動モデルと双対概念

(Behavioral Model and Duality Theory)

東京工業大学 環境・社会理工学院
福田 大輔
fukuda@plan.cv.titech.ac.jp

発表の構成

- 数理最適化/ミクロ経済学における双対概念
- ロジットモデル/ランダム効用モデルと双対性
- 一般化エントロピーモデル
- 合理的無反応 (Rational Inattention) モデル
- 効用と支払い意思額

消費者行動理論における双対性

効用最大化問題(主問題)

$$\max_{x_1, x_2} u(x_1, x_2)$$
$$\text{s.t.} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = I$$

双対関係

支出最小化問題(双対問題)

$$\min_{x_1, x_2} p_1 x_1 + p_2 x_2$$
$$\text{s.t.} \quad u(x_1, x_2) \geq \bar{u}$$

Marshall型
需要関数

Hicks型
需要関数

$$x_j^M(p_1, p_2, I)$$

$u = V(p_1, p_2, I)$ を代入

$I = M(p_1, p_2, \bar{u})$ を代入

$$x_j^H(p_1, p_2, \bar{u})$$

目的関数
に代入

偏微分(Royの恒等式)

$$-\frac{\partial V}{\partial p_j} \Big/ \frac{\partial V}{\partial I}$$

目的関数
に代入

偏微分(Shepardの補題)

$$\frac{\partial M}{\partial p_j}$$

$$u = V(p_1, p_2, I)$$

I について解く

u について解く

$$I = M(p_1, p_2, \bar{u})$$

間接効用関数

支出関数

数理最適化における双対概念の意義

- 主問題に有界な最適解が存在するとき，
双対問題にも有界な最適解が存在し，
それぞれの目的関数値は一致する．（強双対定理）

- 同一の行動を違った観点から説明できる．
- 主問題を解くより，双対問題を解き，双対定理を用いて解を導いた方が簡単な場合がある．
- 効率的な計算アルゴリズムの開発に応用できる．
（e.g. 利用者均衡配分の効率的解法）
- 数値解の精度保証の検証に使うことができる．

ロジットモデルと双対性(1)

Miyagi (1986)，宮城・小川(1986)：
Logit Model が Entropy Modelを定義する際の数理最適化問題と同型の問題から導出できることを示し，効用最大化問題としての新たな解釈を加えている

（maxの内側：直接効用関数）

$$S(\mathbf{V},\ \theta) = \max_{\mathbf{P}} \sum_{j \in \mathcal{J}} \left\{ P_j V_j - \frac{1}{\theta} P_j \left(\ln P_j - 1 \right) \right\}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j \in \mathcal{J}} P_j = 1$$

（消費総量制約）

最適解

（需要関数）

$$P_j = \frac{\exp(\theta V_j)}{\sum_{j' \in \mathcal{J}} \exp(\theta V_{j'})}, \quad \forall j \in \mathcal{J}$$

（間接効用関数）

$$S(\mathbf{V},\ \theta) = \frac{1}{\theta} \ln \left\{ \sum_{j' \in \mathcal{J}} \exp(\theta V_{j'}) \right\}$$

ロジットモデルと双対性(2)

Anderson, de Palma, & Thisse (1988), Verboven (1996)：
消費する財の「バラエティ」に対する選好をEntropy関数によって表現した
直接効用関数の最大化問題の解が，(Nested) Logit 型の需要関数になると共に，
間接効用関数がログサム関数の形式になることを示した．

[Logit Representative Consumer Behavior]

（Shannon Entropy型直接効用関数）

$$U^* = \max_{\mathbf{x}} \left(X_0 + \sum_{j=1}^{J} a_j X_j - \frac{1}{\theta} \sum_{j=1}^{J} X_j \ln \frac{X_j}{N} \right)$$

Entropy term → Variety-seeking behaviour

s.t.

（消費総量制約）

$$\sum_{j=1}^{J} X_j = N$$

（所得制約）

$$Y = \sum_{j=1}^{J} p_j X_j + p_0 X_0$$

最適解

（需要関数）

$$\tilde{X}_j = N \frac{\exp[\theta(a_j - p_j)]}{\sum_{j'=1}^{J} \exp[\theta(a_{j'} - p_{j'})]}, \quad \forall j \in \mathcal{J}$$

（間接効用関数）

$$U^* = \frac{Y}{p_0} + N\theta \ln \left(\sum_{j=1}^{J} \exp\left(\frac{a_j - p_j/p_0}{\theta} \right) \right)$$

Logit, Entropy & Random Utility

- Miyagi, ADT, Verbovenらのアプローチ
  - 消費者の直接効用関数をShannon Entropy型に特定すれば，効用最大化問題の最適解として得られる需要関数がLogit型，間接効用関数がlogsum型になるということを示したもの．
    - 経済理論との整合性を求められる場面（交通ネットワーク均衡モデル，応用一般均衡モデル等）で主に活用
  - 注：ランダム効用理論(総効用≡確定効用＋確率効用)に基づくアプローチではない [定式化にεは出てこない]

- 次に，ランダム効用理論 (McFadeen 1974) との関連性について考える．

ランダム効用理論～Logit Example

Additive random utility model (ARUM) *with Gumbel error term*

$$u_j = \delta_j + \epsilon_j, \forall \mathcal{J}$$

McFadden (1974)

Surplus (Indirect utility) ～ *Logsum*

$$G(\boldsymbol{\delta}) \equiv \mathbb{E}\left(\max_{j \in \mathcal{J}} u_j\right) = \ln\left(\sum_{j \in \mathcal{J}} e^{\delta_j}\right)$$

Williams (1977)
Daly & Zachary (1978)

Ben-Akiva (1973)
McFadden (1978)
Small & Rosen (1981)

Choice Probability (Demand) ～ *Logit model*

$$q_j(\boldsymbol{\delta}) = \frac{e^{\delta_j}}{\sum_{j' \in \mathcal{J}} e^{\delta_{j'}}}$$

$\mathbf{q}$: 需要(シェア)ベクトル
$\boldsymbol{\delta}$: 確定効用ベクトル
$0, 1, \ldots, J$: 選択肢 (0: 合成財)

ランダム効用理論〜General

- Additive Random Utility Model (ARUM)
  - ランダム効用 (ARUM)：$u_j = \delta_j + \epsilon_j, \forall \mathcal{J}$
  - 余剰 (Surplus) 関数〜期待最大効用〜間接効用：
$$G(\boldsymbol{\delta}) \equiv \mathbb{E}\left(\max_{j \in \mathcal{J}} u_j\right)$$
  - 期待最大効用の1階偏微分は選択確率に等しい：[Williams (1977) 〜 Daly & Zachary (1978) Theorem]
$$q_j(\boldsymbol{\delta}) = \frac{\partial G(\boldsymbol{\delta})}{\partial \delta_j}$$

※WDZ Theoremは，ロジットモデルに限らず任意のARUMで成り立つ.

ARUM-Logit Model と Entropy Model

ARUM-Gumbel

$$u_j = \delta_j + \epsilon_j, \forall \mathcal{J}$$

Surplus as Logsum

$$G(\boldsymbol{\delta}) \equiv \mathbb{E}\left(\max_{j \in \mathcal{J}} u_j\right) = \ln\left(\sum_{j \in \mathcal{J}} e^{\delta_j}\right)$$

$$G^{\bullet}(\mathbf{q}) = \max_{\boldsymbol{\delta}} \{\mathbf{q}^{\top}\boldsymbol{\delta} - G(\boldsymbol{\delta})\}$$

Shannon EntropyはLogsumの凸共役
(Convex conjugates)

Choice probability as Multinomial Logit

$$q_j(\boldsymbol{\delta}) = \frac{\partial G(\boldsymbol{\delta})}{\partial \delta_j} = \frac{e^{\delta_j}}{\sum_{j' \in \mathcal{J}} e^{\delta_{j'}}}$$

Entropy Demands

Shannon Entropy

$$-G^{\bullet}(\mathbf{q}) = -\sum_{j \in \mathcal{J}} q_j \ln q_j$$

Representative Consumer

$$\max_{\mathbf{q} \in \boldsymbol{\Delta}} \left\{\sum_{j \in \mathcal{J}} \delta_j q_j + G^{\bullet}(\mathbf{q})\right\}$$

where $\boldsymbol{\Delta} = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}_+^{J+1} \ : \ \sum_{j=0}^{J} q_j = 1\}$

任意のARUMの選択確率は,
あるGEMの需要関数として得ることができる

GEMとARUM

- GEM：単位シンプレックス内の需要ベクトルに関する効用最大化 $\max_{\mathbf{q}\in\boldsymbol{\Delta}}\left\{\sum_{j\in\mathcal{J}}\delta_j q_j + G^{\bullet}(\mathbf{q})\right\}$

- Generalized Entropy (GE)："Generator"関数 $\mathbf{S}$ を用いて定義

$$G^{\bullet}(\mathbf{q}) \equiv -\sum_{j\in\mathcal{J}} q_j \ln S^{(j)}(\mathbf{q})$$

※Logitの場合, $\mathbf{S}(\mathbf{q}) = \mathbf{q}$ (Shannon Entropy)

- Generatorの逆関数 $\mathbf{H} = \mathbf{S}^{-1}$ を導入すると, $H^{(j)}(e^{\boldsymbol{\delta}}) = \dfrac{\partial e^{G^{\bullet}(\boldsymbol{\delta})}}{\partial \delta_j}$

- このとき，財 j の選択確率は, $P_j(\boldsymbol{\delta}) = \dfrac{H^{(j)}(e^{\boldsymbol{\delta}})}{\sum_{j'=0}^{J} H^{(j')}(e^{\boldsymbol{\delta}})}$

- 余剰関数(期待最大効用)は, $G(\boldsymbol{\delta}) = \ln\left(\sum_{j\in\mathcal{J}} H^{(j)}(e^{\boldsymbol{\delta}})\right)$

GEMのメリット(1)

1. 任意のARUMの選択確率は，あるGEMの需要関数として得ることができる（逆は必ずしも真ではない）．
2. GE (もしくは等価なGenerator)を設定することにより，より柔軟な代替関係/補完関係を表現可能な「需要システム(需要関数)」を導出することができる．特に，代替関係しか表現できないARUMに対し，GEMでは財の補完関係を表すような需要モデル (e.g. GEN) も記述することができる．

例1. Nested Logit

$$S^{(j)}(\mathbf{q}) = q_j^{\mu}\left(\sum_{j'\in g_j} q_{j'}\right)^{1-\mu}$$

例2. Generalized Nested Entropy (GEN)

$$S^{(j)}(\mathbf{q}) = \begin{cases} q_0, & (j=0) \\ q_j^{\mu_0}\prod_{c=1}^{C} q_{\sigma_c(j)}^{\mu_c}, & (j>0) \end{cases}$$

3. 離散型財のマーケットシェア需要モデルの代表例であるBerry, Levinsohn & Pakes (1995) Method の推定方法を大幅に簡略化することができる(数値積分計算が不要).

$$\ln\left(\frac{q_{jt}}{q_{0t}}\right) = \beta_0 + \mathbf{X}_{jt}\boldsymbol{\beta} - \alpha p_{jt} + \sum_{c=1}^{C}\mu_c \ln\left(\frac{q_{jt}}{q_{\sigma_c(j),t}}\right) + \xi_{jt}$$

→線形操作変数法によるパラメータ推定

GEMのメリット(2)

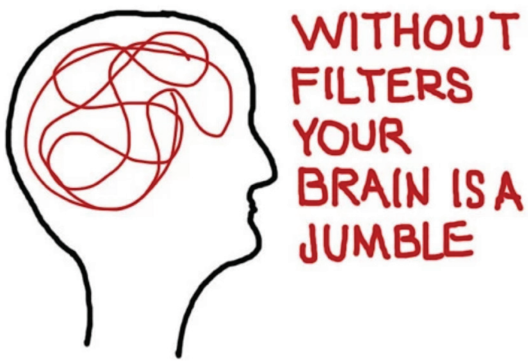
4. 動的離散選択モデル (e.g. Rust 1987) の推定性能向上
   - Chiong et al. (2016)
     a. $G^{\bullet}(\mathbf{q}(x))$ の劣勾配として Choice-Specificな価値観数 $\boldsymbol{\delta}(x)$ を求める問題を，Monge-Kantorovich 問題（最適輸送問題）に準えて導出し，誤差分布を離散近似した上で線形計画問題として求解
     b. 前ステップで得られた$\boldsymbol{\delta}(x)$ を用いて $\boldsymbol{\delta}(x) \equiv \bar{u}(x) + \beta\mathbb{E}\left[V(x')\right]$ における$\bar{u}(x)$（即時効用）を算出
        ※ Foegerau et al. (2013) のベルマン方程式求解法と同じ行列計算

   → Hotz & Miller (1993) と同程度に高速ながらも，精度の高いパラメータ推定を実現

5. Entropy=相互情報量 という観点に立てば，情報獲得の影響を考慮した不確実性下での離散選択モデルの基礎を与えることができる．
   - 合理的無反応 (Rational Inattention: RI) モデル

合理的無反応 (Rational Inattention)

- 人の情報処理能力には限界があり，情報処理に要する
  コストの存在は，不確実性下での意思決定にも影響する
- Sims (2003)の**「合理的無反応 (RI)」**仮説:
  - 情報の蓄積によって生じるEntropyが閾値を超えたとき，
    経済主体が情報獲得に動くという仮説（マクロ経済学分野で進展）
  - 人々が<u>合理的に不注意になる状況</u>を選択する理論
- Matějka & McKay (2015):
  - Mutual Shannon Entropyにより情報コストを定義したとき，不確実性下での離散的選択行動が多項Logitモデル形式になることを証明
- Fosgerau, Melo, de Palma & Shum (2018):
  - Generalized Entropyによる
    情報コスト定義への拡張と，IIA特性の緩和
- Fosgerau & Jiang (2017):
  - 旅行時間信頼性分析 (旅行時間変動下での
    出発時刻選択分析) への適用



https://tcagley.wordpress.com/

Rational Inattention Model

RIに従う意思決定者の選択問題を変分問題として定式化：

Matějka & McKay (2015)

利得(効用)ベクトル

$$\max_{\mathbf{p}(\cdot)} \{\mathbb{E}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{A}) - \lambda \times \text{information cost}\}$$

離散選択ベクトル
離散選択ベクトル

ランダムなアクション
(標準基底ベクトル)

Information cost に Mutual Shannon Entropyを仮定すると

事前確率の期待値

事前確率

$$= \max_{\mathbf{p}(\cdot)} \left\{ \sum_{\mathbf{v}\in\mathcal{V}} \{\mathbf{p}(\mathbf{v})\cdot[\mathbf{v}+\lambda\log\mathbf{p}^0] - \lambda\mathbf{p}(\mathbf{v})\cdot\log\mathbf{p}(\mathbf{v})\}\,\mu(\mathbf{v})\right\}$$

$$\text{s.t.}\ \ p_i(\mathbf{v}) \geq 0\ \forall i, \quad \sum_{i=1}^{N} p_i(\mathbf{v}) = 1$$

最適解 (MNL)

$$p_i(\mathbf{v}) = \frac{p_i^0 e^{v_i/\lambda}}{\sum_{j=1}^N p_j^0 e^{v_j/\lambda}} = \frac{e^{(v_i+\log p_i^0)/\lambda}}{\sum_{j=1}^N e^{(v_j+\log p_j^0)/\lambda}} = \frac{e^{\tilde{v}_i/\lambda}}{\sum_{j=1}^N e^{\tilde{v}_j/\lambda}}$$

「選好」と「支払い意思」の双対性

ARUMにおける非観測異質性 (Unobserved Taste Heterogeneity) の表現

個人 (n) 毎に誤差項のスケールやパラメータの係数が異なる状況 (Train & Weeks 2005)

$$U_{njt} = \alpha_n p_{njt} + \beta_n x_{njt} + e_{njt}$$
$$\text{where } \mathrm{Var}(e_{njt}) = k_n^2(\pi^2/6)$$

k_n で両辺を割る

*WTP: Willingness-to-pay

A) Model in Preference-Space

$$U_{njt} = (\alpha_n/k_n)p_{njt} + (\beta_n/k_n)x_{njt} + \varepsilon_{njt}$$
$$= \lambda_n p_{njt} + c_n x_{njt} + \varepsilon_{njt}$$
$$\text{where } \mathrm{Var}(\varepsilon_{njt}) = \pi^2/6$$

k_n が係数の分母に含まれていることから
本来，係数同士が相関する．
係数同士が独立であると仮定することは，
スケールパラメータが母集団で共通である
ことを暗に仮定することになる．

$w_n \equiv c_n/\lambda_n$

WTP* (時間価値等)

B) Model in WTP-Space

$$U_{njt} = \lambda_n p_{njt} + (\lambda_n w_n)x_{njt} + \varepsilon_{njt}$$

WTP w_n の個人間変動は誤差スケールと独立になり，(誤差スケールを暗に含む)価格係数 λ_n とも区別される．

Model A の方がデータへの適合度は良いが，より理に適った時間価値分布はModel Bにより得られた (Scarpa et al. 2008)

参考文献(1)

1. Anas, A., 1983. Discrete choice theory, information theory and the multinomial logit and gravity models. Transportation Research Part B: Methodological 17, 13–23.
2. Anderson, S.P., De Palma, A., Thisse, J.-F., 1988. A Representative Consumer Theory of the Logit Model. International Economic Review 29, 461–466.
3. Berry, S., Levinsohn, J., Pakes, A., 1995. Automobile Prices in Market Equilibrium. Econometrica 63, 841–890.
4. Chiong, K.X., Galichon, A., Shum, M., 2016. Duality in dynamic discrete-choice models: Duality in dynamic discrete-choice models. Quantitative Economics 7, 83–115.
5. Daly, A., Zachary, S., 1979. Improved multiple choice models, in: Hensher, D., Dalvi, Q. (Eds.), Identifying and Measuring the Determinants of Mode Choice. Teakfield, London.
6. de Palma, A., Kilani, K., Laffond, G., 2017. Relations between best, worst, and best–worst choices for random utility models. Journal of Mathematical Psychology 76, 51–58.
7. Fosgerau, M., 2007. Using nonparametrics to specify a model to measure the value of travel time. Transportation Research Part A: Policy and Practice 41, 842–856.
8. Fosgerau, M., de Palma, A., Monardo, J., 2018. Demand Models for Differentiated Products with Complementarity and Substitutability. Social Science Research Network, Rochester, NY.
9. Fosgerau, M., Frejinger, E., Karlstrom, A., 2013a. A link based network route choice model with unrestricted choice set. Transportation Research Part B: Methodological 56, 70–80.
10. Fosgerau, M., Jiang, G., 2017. Travel Time Variability and Rational Inattention. Social Science Research Network, Rochester, NY.
11. Fosgerau, M., Melo, E., Palma, A. de, Shum, M., 2017. Discrete Choice and Rational Inattention: A General Equivalence Result. Social Science Research Network, Rochester, NY.
12. Gallotti, R., Porter, M.A., Barthelemy, M., 2016. Lost in transportation: Information measures and cognitive limits in multilayer navigation. Science Advances 2, e1500445.
13. Hotz, V.J., Miller, R.A., 1993. Conditional Choice Probabilities and the Estimation of Dynamic Models. The Review of Economic Studies 60, 497–529.
14. Matějka, F., McKay, A., 2015. Rational Inattention to Discrete Choices: A New Foundation for the Multinomial Logit Model. American Economic Review 105, 272–298.
15. McFadden, D., 1978. Modelling the Choice of Residential Location, in: A. Karlquist, F. Snickars and J. W. Weibull (Eds) Spatial Interaction Theory and Planning Models. North Holland Amsterdam, pp. 75–96.

参考文献(2)

16. Miyagi, T., 1986. On the Formulation of a Stochastic User Equilibrium Model Consistent with the Random Utility Theory – A Conjugate Dual Approach. Presented at the Proceedings of the Fourth World Conference on Transport Research, University of British Columbia, Vancouver, pp. 1619–1635.
17. Rust, J., 1987. Optimal Replacement of GMC Bus Engines: An Empirical Model of Harold Zurcher. Econometrica 55, 999–1033.
18. Scarpa, R., Thiene, M., Train, K., 2008. Utility in Willingness to Pay Space: A Tool to Address Confounding Random Scale Effects in Destination Choice to the Alps. Am J Agric Econ 90, 994–1010.
19. Sims, C.A., 2003. Implications of rational inattention. Journal of Monetary Economics 50, 665–690.
20. Small, K.A., Rosen, H.S., 1981. Applied Welfare Economics with Discrete Choice Models. Econometrica 49, 105–130.
21. Sun, L., Jin, J.G., Axhausen, K.W., Lee, D.-H., Cebrian, M., 2015. Quantifying long-term evolution of intra-urban spatial interactions. Journal of The Royal Society Interface 12, 20141089.
22. Train, K., Weeks, M., 2005. Discrete Choice Models in Preference Space and Willingness-to-Pay Space, in: Scarpa, R., Alberini, A. (Eds.), Applications of Simulation Methods in Environmental and Resource Economics, Economics of Non-Market Goods and Resources. Springer Netherlands, Dordrecht, pp. 1–16.
23. Verboven, F., 1996. The nested logit model and representative consumer theory. Economics Letters 50, 57–63.
24. Williams, H.C.W.L., 1977. On the formation of travel demand models and economic evaluation measures of user benefit. Environment and Planning A 9, 285–344.
25. Wilson, A.G., 1967. A statistical theory of spatial distribution models. Transportation Research 1, 253–269.
26. Wilson, A., 2010. Entropy in Urban and Regional Modelling: Retrospect and Prospect. Geographical Analysis 42, 364–394.
27. 宮城俊彦, 小川俊幸, 1986. 共役性概念に基づくロジットモデルのパラメータ推定法とその統計的検定について. 土木計画学研究・論文集, 3, 185–192.
28. 室田一雄, 2007. 離散凸解析の考えかた 最適化における離散と連続の数理. 共立出版.