A general and operational representation of Generalised Extreme Value models

A. Daly and M. Bierlaire
Transportation Research Part B, Vol.40, Issue.4,
pp.285-305, 2006

M.Bierlaire (2002) “The network GEV model”
In: Proceedings of the 2nd
Swiss Transportation Research Conference,
Ascona, Switzerland
も参考に

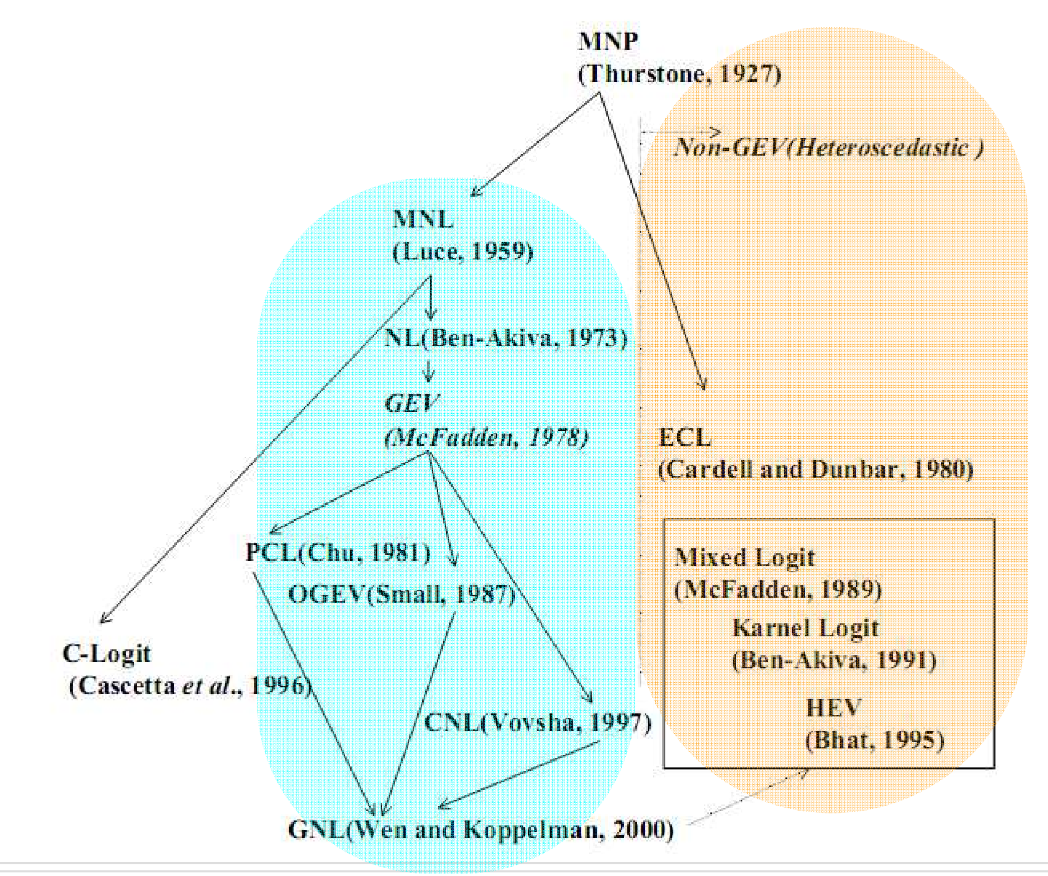
2008/11/26
論文ゼミ後期#8
M2 原 祐輔

本日の流れ

- Network-GEVモデル
  - GEVモデルとnetwork GEVモデル
  - GEV-inheritance
  - GEV-network
- パラメータ推定してみた
- スーパー妄想タイム

1. 背景

□ Mixed族とGEV族の争い



■GEVファミリー

○IIA特性の緩和

○closed formで書ける

○さらなるポテンシャルを秘めるが・・・

■Probitファミリー

○ランダムな選好を表現

○IIA特性の緩和

○時点間の誤差項の相関を扱える

×シミュレーション積分の必要性

行動モデル発展の経緯　羽藤(2001)より

1. 導入

- 近年のmixed logitモデルの勃興
  - つくるのが簡単という利点
- GEVのメリット
  - Closed formだと定式化や推定がシンプル
  - GEV関数は消費者によって享受される総効用の要約であり、理論的にもしっかりしている
  - 配分ともうまく連動できることが証明されている (Prashker and Bekhor (1999))
  - 一方でGEVモデルの仮定の複雑さ(後述)があまり適用されない主たる原因

⇒直観的で、定式化がたやすく、新たな証明を必要としないGEVモデルの提案とその理論的土台を証明することがこの論文の目的

2. GEVモデル(復習)

選択肢集合C内から選択肢iを選択する確率は

$$P(i|C) = \frac{y_i \frac{\partial G}{\partial y_i}(y_1, ..., y_J)}{\mu G(y_1, ..., y_J)}$$

ここでJ:利用可能な選択肢数、 $y_i = e^{V_i}$ 選 V_i iの効用の確定項

G: μ −GEV関数。 μ −GEV関数の特徴(満たすべき性質・仮定)は

1. $G(y) \geq 0$ for all $y \in \mathcal{R}_+^J$
2. G 関数は μ 次である。つまり、$G(\lambda y) = \lambda^\mu G(y), for \lambda > 0$
3. $\lim_{y_i \to \infty} G(y_1, ..., y_i, ..., y_J) = \infty$, for each $i = 1, ..., J$
4. G 関数の混合型偏微分が存在し、連続である。さらに、k が奇数のとき k 番目の偏微分は非負であり、k が偶数のときは非正である。つまり、任意の別々の値 $i_1, ..., i_k \in \mathcal{J} = 1, ..., J$ において

$$(-1)^k D_\mathcal{K}(y) \leq 0 \qquad \forall y \in \mathcal{R}_+^J$$

2. GEVモデル(復習)

たとえば、こんな感じ

MNL

$$G(y) = \sum_{i=1}^{J} y_i^{\mu}.$$

NL

$$G(y) = \sum_{m=1}^{M} \left(\sum_{i=1}^{J_m} y_i^{\mu_m} \right)^{\frac{\mu}{\mu_m}}$$

CNL

$$G(y_1, \ldots, y_J) = \sum_{m=1}^{M} \left(\sum_{j \in C} (\alpha_{jm}{}^{1/\mu} y_j)^{\mu_m} \right)^{\frac{\mu}{\mu_m}}$$

しかし、McFaddenもDagsvikも
どんなG関数をつくればいいのか、教えてくれない！

３．GEV-inheritance

- あるGEV関数から別のGEV関数を導出できることを示す⇒これは新しいG関数の導出を促進する
- 定理１でG関数の線形結合が別のG関数になっていることを示す。
- 定理4でG関数の累乗が別のG関数になっていることを示す。
- 定理7で上記2つの結果をまとめて一般化する。

３．GEV−inheritance

- 定理１　p個の部分空間におけるμ−GEV関数をGⁱ (i=1,2,…,p)とすると、その線形結合であるGはμ−GEV関数である。

$$G(y) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i G^i([y]_i)$$

任意のベクトル $y \in \mathcal{R}^J$ において、$[y]_i$ は $\mathcal{R}^{J_i}$ 上の y の写像を表す。

ただし　$\alpha_i > 0, i = 1, \ldots p$

- 証明　$\alpha_i > 0, i = 1, \ldots p$ であれば、4つの性質が満たすことは明らか。

３．GEV-inheritance

- 定理4　Gをμ-GEV関数とすると、0<β<1ならばG$^\beta$は$\mu\beta$-GEV関数である。
- 証明

１．Gβは明らかに非負

２．$G(\lambda y)^\beta=(\lambda^\mu G(y))^\beta=\lambda^{\mu\beta}G(y)^\beta$

３．β>0より極限は無限大になる

４．簡単な証明の方向性は論文本文に、

詳細な証明はAppendixにあり。

３．GEV-inheritance

- 定理7　あるμ_i-GEV関数の累乗の線形結合はμ-GEV関数である。

$$G(y)=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i G^i([y]_i)^{\mu/\mu_i}$$

ただし、$\alpha_i>0, 0<\mu\leq\mu_i, i=1,...p$ ならば

- 証明　定理1、4より。

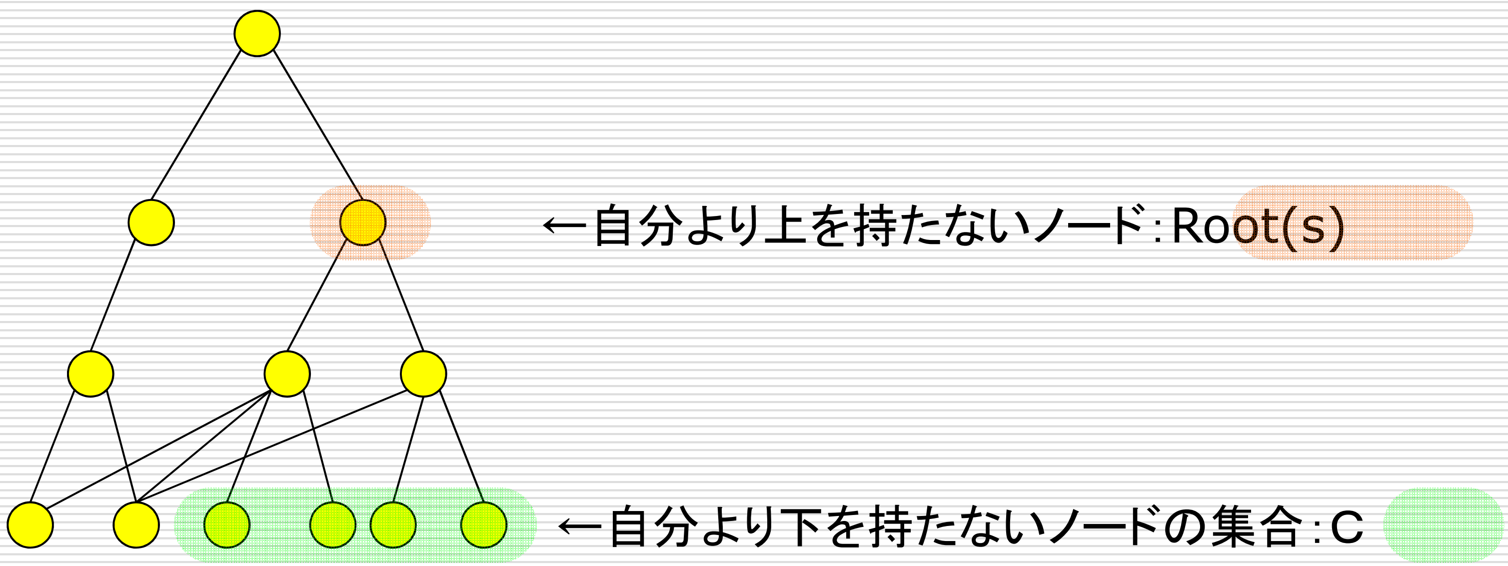
４．GEV−network

- いよいよ本丸に突入
- N:ノードの集合、E:リンクの集合（有限）とすると、(N, E)は有限非空有向グラフ
- 各リンク(i, j)は非負のassociated parameter α_{ij} をもつ
- 上記の有向グラフはネットワークである
- このネットワーク上にはどんな回路もない

⇒このようなネットワークをGEV−networkと呼ぶ

4. GEV-network

- 目的はGEV networkベースのGEVモデルをつくること
- ほとんどのモデルはシングルルートで定義できる



4．GEV−network

- 定理10　各ノードをv_i、associated parameter α_iとすると、GEVネットワークの任意のノードv_iとそれに関連するG^iはすべての$v_i \in C$であれば、μ_i−GEV関数である

$$G^i(y_i) = \sum_{v_j \in S(v_i)} \alpha_{ij} G^j(y)^{\frac{\mu_i}{\mu_j}}$$

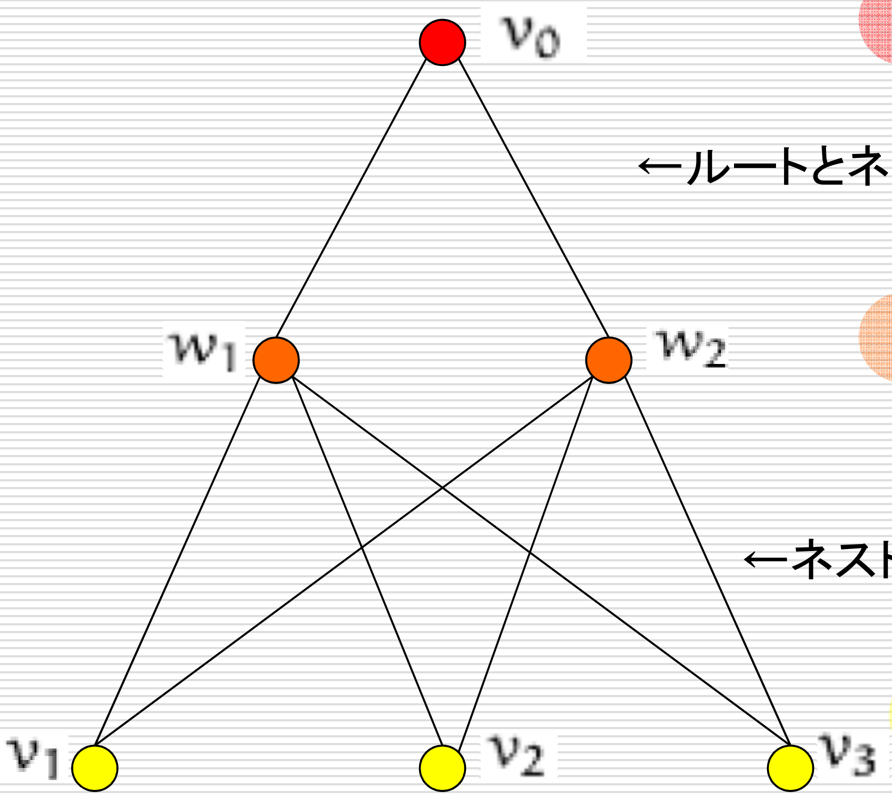
- 証明　定理7を用いて帰納法的にやってく

４．GEV-network

- この定理が証明されたということは、GEVネットワークの任意のノードにおいて、GEVモデルが適用され、McFaddenのGEV理論や効用最大化理論と一致していることを示せたということ。
- ということは、有限、非空、回路でないネットワークであれば、GEVモデルをつくることが可能であり、これ以上の証明も必要ない！
- モデラーの役割はモデル内の潜在的な誤差項の相関を十分に表現するネットワーク構造をデザインすること！！！

5. 具体的な定式化の例

- CNLをnetwork−GEVで表現



ルートのassociated parameter μ

←ルートとネストのエッジのパラメータ $\alpha_{0m}=1$

ネストのassociated parameter μ_m

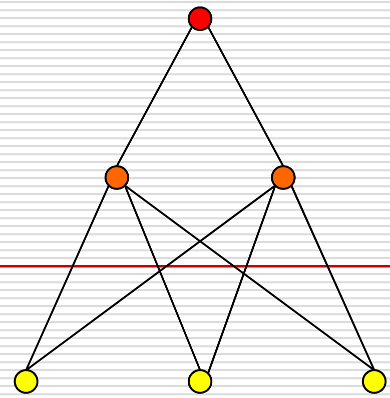
$\mu \leq \mu_m, m=1,\dots,M$

←ネストと選択肢のエッジのパラメータ α_{im}

選択肢のassociated parameter μ_j

$\mu \leq \mu_j, j=1,\dots,J$

5. 具体的な定式化の例



- CNLをnetwork-GEVで表現

	G関数	期待最大化効用	選択確率
(red)	$G(y)=\sum^{M}(G^m(y))^{\mu/\mu_m} = \sum_{m=1}^{M}\left(\sum_{j\in C}\alpha_{jm}y_j^{\mu_m}\right)^{\mu/\mu_m}$	$\overline{U}=\frac{\gamma}{\mu}+\frac{1}{\mu}\log\sum_{m=1}^{M}e^{\mu(\overline{U}_m-\frac{\gamma}{\mu_m})}$	$P(m)=\frac{(\sum_{i\in C}\alpha_{im}e^{\mu_m V_i})^{\mu/\mu_m}}{\sum_{n=1}^{M}\left(\sum_{i\in C}\alpha_{in}e^{\mu_n V_i}\right)^{\mu/\mu_n}}$
(orange)	$G^m(y)=\sum_{j\in C}\alpha_{jm}(G^j(y))^{\mu_m/\mu_j} = \sum_{j\in C}\alpha_{jm}y_j^{\mu_m}$	$\overline{U}_m=\frac{\gamma}{\mu_m}+\frac{1}{\mu_m}\log\sum_{j\in C}\alpha_{jm}e^{\mu_m V_j}$	$P_m(i)=\frac{\alpha_{im}e^{\mu_m V_i}}{\sum_{j\in C}\alpha_{jm}e^{\mu_m V_j}}$
(yellow)	$G^i(y)=y_i^{\mu_i}$	$\overline{U}_i=V_i+\frac{\gamma}{\mu_i}$	$P_i(k)=\begin{cases}1 & \text{if } i=k\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$

６．まとめ(n−GEVのすごいところ)

- ネットワーク構造をつくれば、それに合うG関数を自分でつくれる！
- しかも、つくったG関数はGEVの４つの特徴を満たしていることを(Daly and Bierlaire (2006)による、と書けば)確認しなくていい
- 下から上へとどんどん上げていくことができるので、マルチクラスのnestを積み上げ可能
- Bierlaire (2002)によれば「GEVとnetwork GEVは等価なのかどうかが興味深い疑問である」らしい。

  network GEV⊂ GEVなのか、

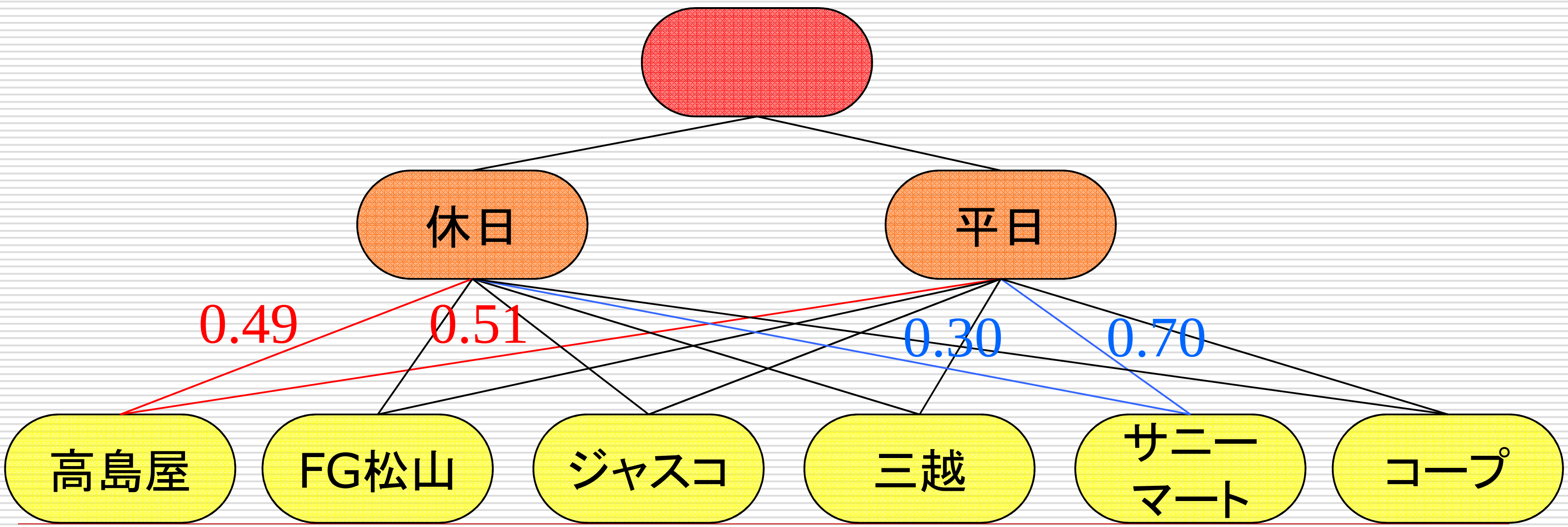
  network GEV⇔GEVなのか。

パラメータ推定してみた。

- 行動モデル冬の学校が密かに開校
- 買物データのうち、上位6位の施設を抽出
- 目的地選択モデルを構築
- 説明変数は距離のみ。＋ASC

パラメータ推定してみた。

- ネットワーク構造
- 平日と休日のノード
- アロケーションパラメータはその施設へのトリップにおける平日・休日の割合



パラメータ推定してみた。

	MNL		network-GEV	
変数	パラメータ	t値	パラメータ	t値
距離	-0.000574	-10.13	-0.000405	-4.70
ASC2	-0.151	-0.90	-0.106	-1.03
ASC3	-0.594	-3.14	-0.376	-1.98
ASC4	-0.882	-4.65	-0.640	-3.57
ASC5	-0.372	-1.66	-0.426	-2.44
ASC6	-1.11	-5.07	-0.778	-3.77
nest Aのμ	-		3.11	1.47
サンプル数	311		311	
初期尤度	-557.237		-557.237	
最終尤度	-468.870		-467.874	
尤度比	0.159		0.160	
修正済み尤度比	0.148		0.148	

スーパー妄想タイムに突入

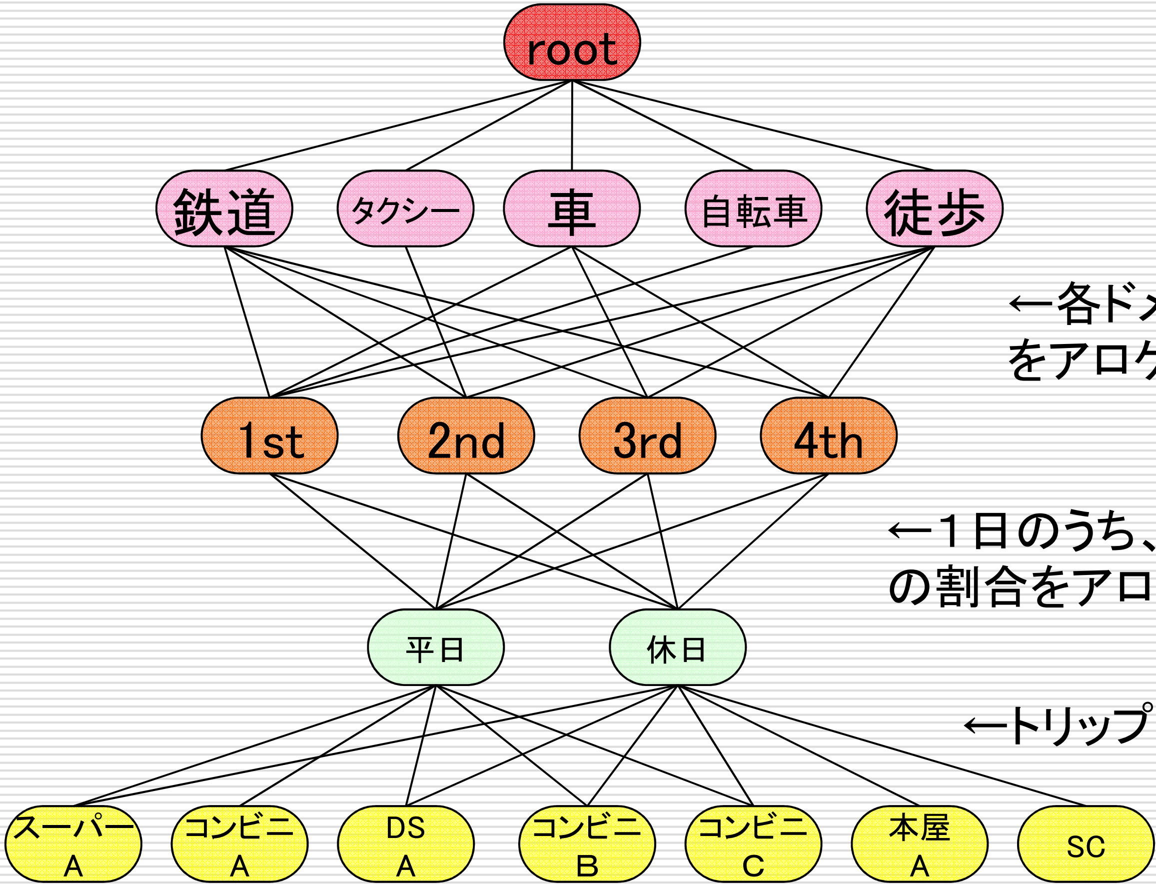
- みなさま、自分の研究対象をもとに、
  ネットワーク構造を考えてみてください。
- とりあえず自分の妄想を紹介

スーパー妄想タイム

自宅	移動	会社		居酒屋	移動	自宅

1st ドメイン	自宅		1st時間
2nd ドメイン	自宅以外で最も滞在時間の長い場所	会社、学校など	2nd時間
3rdドメイン	自宅以外で2番目に滞在時間の長い場所	バイト先、お気に入り場所など	3rd時間
…	…	…	…
			移動時間

スーパー妄想タイム



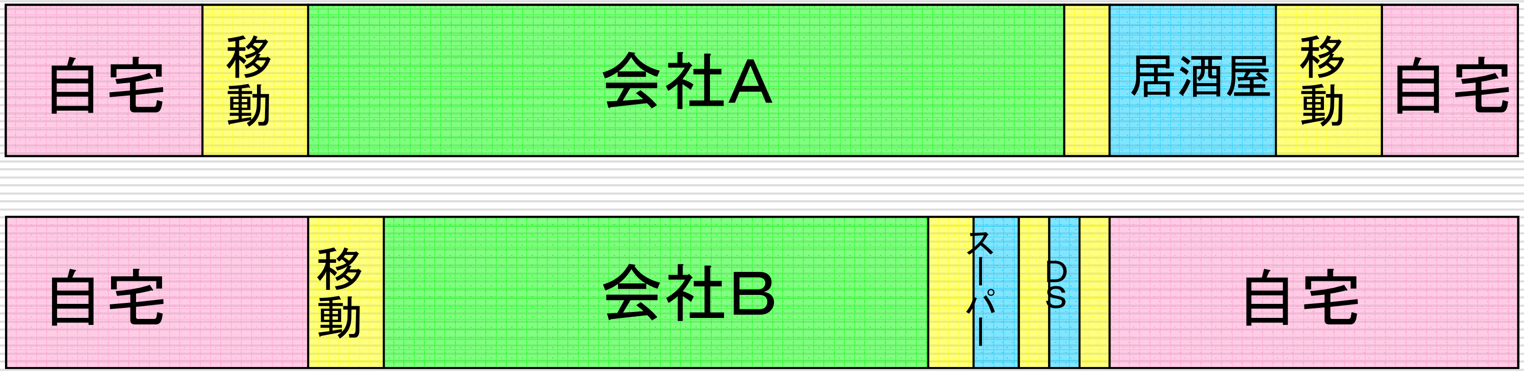
←各ドメインへのメイン交通手段の割合をアロケーション

←１日のうち、各ドメインでの滞在時間の割合をアロケーション

←トリップ頻度とかで

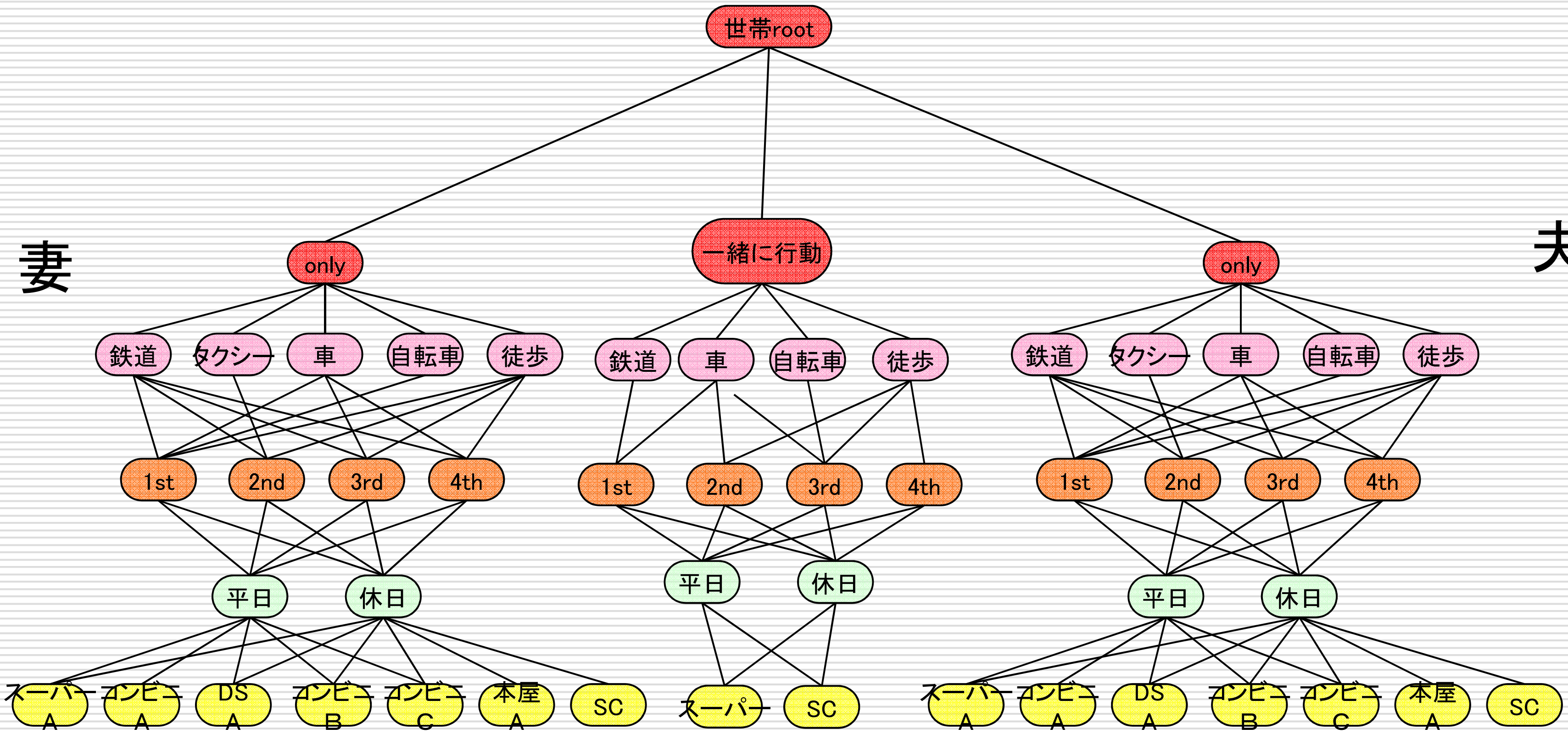
ハイパー妄想タイム

もう一人いたりして。。。



ハイパー妄想タイム

もう一人いたりして。。。



世帯内相互作用とかモデル化できたらおもしろいです。